Wat te bewijzen is

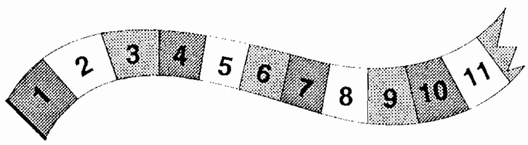
Rubriek

11 is niet deelbaar door 3, 111 wel, 1111 niet. Met een rekenmachientje kun je gemakkelijk uitzoeken hoe dat verdergaat. Vroeger leerden we op school een handige vuistregel: *een getal is deelbaar door 3, als (en alleen als) de som van de cijfers deelbaar is door 3.*

Of dit criterium bewezen werd, kan ik me niet herinneren. Als leraar heb ik lang geleden wel eens een poging in die richting gedaan in de brugklas; het lukte geloof ik wel, maar om daar nou over naar huis te schrijven ...

Deze bijdrage moet dan maar gezien worden als een poging tot revanche. Destijds ontbrak mij de fantasie en de ervaring om er echt iets moois van te maken.

Als ik nu het probleem zou aankaarten, zou ik een driekleuren-getallenstrook (rood-wit-blauw natuurlijk) introduceren.



De blauwe getallen zijn deelbaar door 3, de rode zijn een 3-voud + 1, de witte een 3-voud + 2.

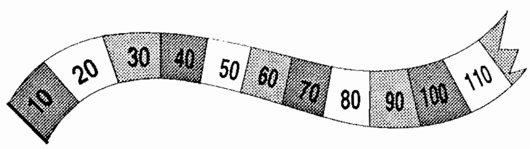
10 stapjes langs deze getallenlijn betekent opschuiven van kleur: van rood naar wit, van wit naar blauw of van blauw naar rood. Immers: 10 = 3 keer 3 + 1.

Omdat 10 rood is (evenals 1), is 20 wit (evenals 2), 30 blauw (evenals 3), enzovoort.

Kortom: de tientallen 10, 20, 30, ... hebben dezelfde kleur als 1, 2, 3, ...

Hoe zit het nu met 100, 200, 300, ...

Een nieuwe kleuring (maak de eerste tien vakjes rood, de volgende tien wit, enzovoort) en toepassing van de tienstaps-regel leert dat 100, 200, 300, ... van dezelfde kleur zijn als 10, 20, 30, ...



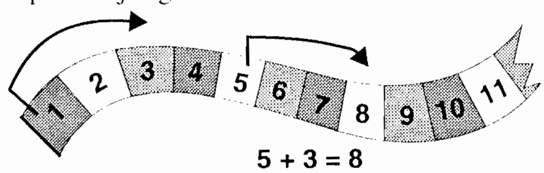
De stap naar duizendtallen is nu een fluitje van een cent. Zo hebben we regel 1:

beschouw de getallen waarvan alleen het eerste cijfer ongelijk is aan nul; het aantal nullen achter het begincijfer is ***niet*** *van invloed op de kleur van het getal.*

Dit is een flinke stap op weg naar het bewijs van het 'door-drie-deelbaarheidscriterium'.

Als tweede stap hebben we een regel nodig die iets zegt over de kleur van de som van twee getallen.

Optellen kan meetkundig worden geïnterpreteerd op de oorspronkelijke getallenstrook:



5 + 3 = 8

Direct duidelijk is nu dat een blauw getal optellen bij een doet-er-niet-toe-wat-voor-een-kleur getal een getal met dezelfde doet-er-niet-toe-wat-voor-een-kleur geeft.

Schematisch:

+	R	W	B
R			R
W			W
B	R	W	B

De rest van de tabel kan nu al redenerend worden ingevuld:

'rood + rood' = 'rood + blauw + 1' = 'rood + 1' = 'wit';
evenzo: 'wit + rood' = 'wit + 1' = 'blauw' en ten slotte:
'wit + wit' = 'wit + blauw + 2' = 'wit + 2' = 'rood'.

Dus wordt de complete tabel:

+	R	W	B
R	W	B	R
W	B	R	W
B	R	W	B

Blijkbaar is het zo dat *de kleur van de som van twee getallen slechts afhangt van de kleur van die twee getallen (en niet van de waarde van de vertegenwoordigers).*

Dit is regel 2, waarin de oplettende lezers onmiddellijk het rekenen modulo 3 zullen herkennen.

Hoe bepaal je nu de kleur van bijvoorbeeld 83476?

Wel: 83476 = 80000 + 3000 + 400 + 70 + 6.

Volgens regel 1 hebben 80000 en 8 dezelfde kleur; evenzo 3000 en 3, 400 en 4, 70 en 7. Volgens regel 2 heeft 83476 dezelfde kleur als 8 + 3 + 4 + 7 + 6 = 28 en dat is rood. Het paradigmatische karakter van dit voorbeeld is duidelijk: de kleur van een getal wordt bepaald door de kleur van de som der cijfers! En dat is zelfs nog wat krachtiger dan het deelbaarheidscriterium.

Martin Kindt, Freudenthal Instituut, Utrecht