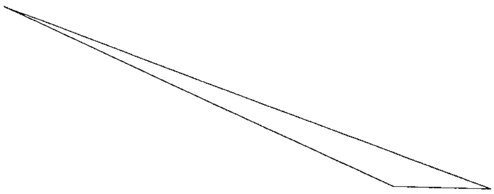
De vlakke meetkunde komt weer terug in het nieuwe leerplan voor wiskunde B op het vwo. Bij sommige docenten roept dat nostalgische herinneringen op. Voor de 'mammoet-generatie' betekent het een heel nieuw vakgebied. **Thijs Notenboom** bewijst in dit artikel dat er ook aan de aloude driehoek nog veel nieuwe dingen te beleven zijn.

Een opmerkelijke driehoek



Inleiding

In het oude meetkundeprogramma dat in grote lijnen de opbouw van de Elementen van Euclides volgde, resulteerde het feit dat een driehoek met drie gegevens vast lag in een hele serie opgaven waarbij een driehoek gevonden ('geconstrueerd' heette dat toen) moest worden als drie dingen gegeven waren. Eenvoudige voorbeelden: drie zijden gegeven of twee zijden gegeven en de ingesloten hoek. De opgaven beperkten zich natuurlijk niet alleen tot zijden en hoeken die gegeven waren. Ook hoogtelijnen, bissectrices, zwaartelijnen, stralen van om en ingeschreven cirkels mochten meedoen. Dat maakte het natuurlijk veel kleurrijker, vooral als ook bepaald moest worden aan welke voorwaarden de gegevens moesten voldoen om een oplossing te krijgen. Soms waren er schoonheidsfoutjes (vond ik) zoals in het geval van twee zijden en een hoek die niet ingesloten is tussen die twee zijden: dan waren er soms twee oplossingen mogelijk. Vraag leerlingen maar om driehoek ABC te tekenen met $AC = 10$, $BC = 6$ en $\angle A = 30°$, dan zullen sommigen met een scherpe hoek in B komen en anderen met een stompe hoek.

Vraag 1. Gegeven $AC = 10$, $\angle A = 30°$. Bepaal het mogelijke aantal driehoeken ABC afhankelijk van de lengte van de zijde BC.

Uitdagingen

Vrijwel alle meetkundesommen in mijn middelbareschooltijd waren van de vorm: Bewijs dat ... . Ik moest daarmee laten zien dat ik dingen goed geleerd had of geleerde dingen kon toepassen in niet al te lastige nieuwe situaties. Daar had ik over het algemeen geen moeite mee. Soms kreeg ik opgaven van mijn leraar die me wel moeite kostten. Omdat dat niet vaak voorkwam, herinner ik me die opgaven nog steeds.

Vraag 2. Construeer een driehoek als de hoogtelijn, de zwaartelijn en de bissectrice uit één hoekpunt gegeven zijn.

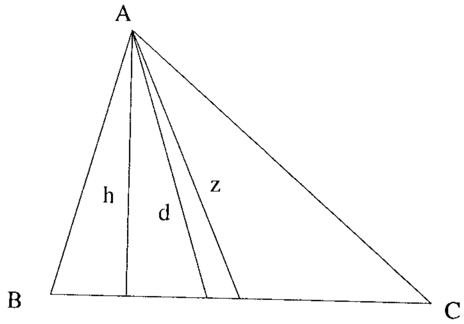


fig. 1

Dat is nog steeds een leuke opgave, die achteraf gezien toch niet echt lastig is. Echt lastig was de laatste vraag in een serie van drie.
De eerste was: bewijs dat een driehoek gelijkbenig is als twee hoogtelijnen gelijk zijn (dat kostte weinig moeite).
De tweede vraag was: bewijs dat een driehoek gelijkbenig is als twee zwaartelijnen gelijk zijn (dat kostte wat meer moeite).
De derde vraag hoefde de leraar niet meer te stellen, die had ik zelf al bedacht: bewijs dat de driehoek gelijkbenig is als twee bissectrices gelijk zijn.

Achteraf is de moeite die dat gaf zeer verklaarbaar. Bottema heeft er destijds een van zijn 'Verscheidenheden' in *Euclides* aan gewijd (XVII, ook opgenomen in de gelijknamige bundel). Voor oplossingen verwijs ik naar dat boekje.
Na het bovenstaande is duidelijk dat met drie evenlange hoogtelijnen (of zwaartelijnen, of bissectrices) de driehoek gelijkzijdig is.

De volgende vraag ligt nu voor de hand.

Wat kun je van een driehoek zeggen als gegeven is dat (al) drie elementen uit de verzameling van de negen bijzondere lijnen h_a, z_a, d_a, h_b, z_b, d_b, h_c, z_c, d_c even lang zijn?

Dit vraagt om een systematische aanpak.
Het geval van drie hoogtelijnen of drie zwaartelijnen of drie deellijnen is al beslist. De driehoek is dan gelijkzijdig.
Nu het geval van bijvoorbeeld (minstens) twee hoogtelijnen even lang: $h_a = h_b$. De driehoek is dan gelijkbenig, dus $a = b$ en dus $h_c = z_c = d_c$. Als dus bijvoorbeeld ook geldt $h_b = d_c$ of $h_b = z_c$, dan is de driehoek weer gelijkzijdig. Het geval van twee bissectrices of twee zwaartelijnen die gelijk zijn, gaat analoog.

In het geval dat twee bijzondere lijnen uit één hoekpunt even lang zijn (bijvoorbeeld $d_a = z_a$) geldt dat de driehoek gelijkbenig is. Dat is niet triviaal, maar niet moeilijk te bewijzen. (Teken driehoek ABC met omgeschreven cirkel, middelloodlijn van BC en verleng d_a.) Het gevolg is dat geldt: óf $h_a < d_a < z_a$ óf $h_a = d_a = z_a$.

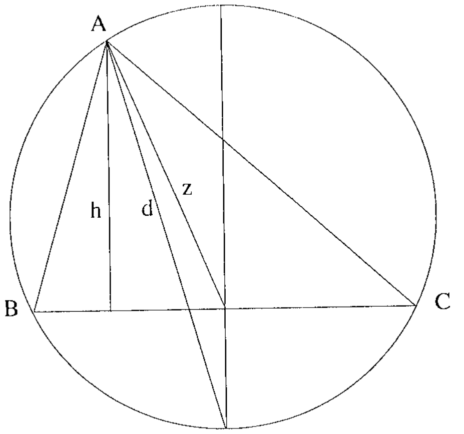


fig. 2

Dus twee bijzondere lijnen uit één hoekpunt met dezelfde lengte houdt in dat alle drie lijnen uit dat hoekpunt even lang zijn en dat heeft weer tot gevolg dat de driehoek gelijkbenig is. Heeft een bijzondere lijn uit een van de overige twee hoekpunten ook dezelfde lengte, dan is de driehoek weer gelijkzijdig.
Als laatste mogelijkheid blijft dus te onderzoeken het geval van een zwaartelijn, een deellijn en een hoogtelijn die uit drie verschillende hoekpunten komen en die even lang zijn. Als u zelf wilt puzzelen, dan dient u nu het blad terzijde te leggen.

Laatste uitdaging

De laatste uitdaging in dit artikel is het probleem van de drie verschillende lijnen uit verschillende hoekpunten. Veronderstel: $z_a = d_b = h_c$. De vraag is natuurlijk of de driehoek noodzakelijk gelijkzijdig moet zijn.
Het antwoord is nee. Dat is als volgt in te zien. Neem punt C vast en lijn l op afstand h_c van C; A en B moeten dan op l liggen. Kies A ergens op l, dan zijn er twee mogelijkheden voor het midden D van BC. We beperken ons tot één van de mogelijkheden vanwege de symmetrie. Noem de projectie van D op l even E. In driehoek ADE heeft AD een vaste lengte ($AD = z_a$) en liggen de hoeken vast (30°, 60°, 90°). CD snijden met l levert B. Door nu de driehoek ADE met basis AE langs l te laten schuiven, krijgen we alle mogelijkheden van driehoek ABC met $h_c = z_a$. Het is duidelijk uit de figuur dat behalve de gelijkzijdige driehoek er nog een driehoek is die aan de eisen voldoet en wel in de situatie dat B op het verlengde van EA komt te liggen!
Ten slotte nog wat rekenwerk om de afmetingen van de driehoek precies te bepalen. Daarbij zijn de volgende formules gebruikt:

$$\text{Opp. driehoek } ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$h_a = \frac{2 \cdot Opp\Delta ABC}{a}, \quad d_a^2 = a \cdot b - p \cdot q$$

met p, q de lengtes van de stukken waarin d_a de zijde BC verdeelt en

$$z_a^2 = \tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}a^2.$$

Een aantal tussenstappen heb ik weggelaten om het geheel overzichtelijk te houden.

$$z_a = d_b = h_c \text{ met } z_a^2 = \tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}a^2.$$

$$h_c^2 = \frac{4Opp^2}{c^2} =$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-(a-b))}{4c^2}$$

$$= \frac{((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2)}{4c^2} =$$

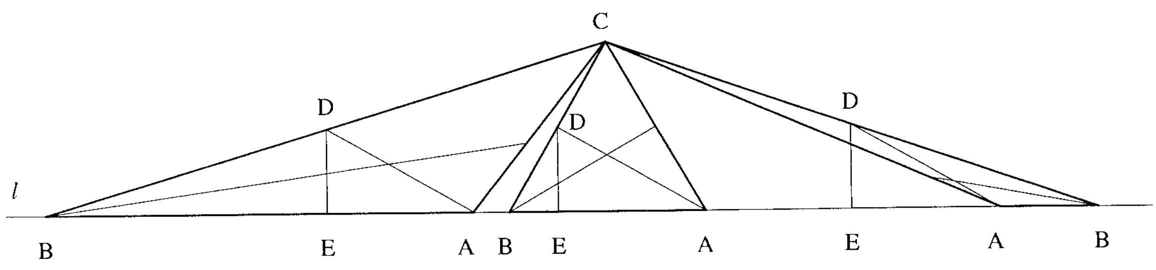


fig. 3

$$= \frac{-c^4 + c^2((a+b)^2 + (a-b)^2) - (a^2 - b^2)^2}{4c^2} =$$

$$= -\tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}b^2 - \frac{(a^2-b^2)^2}{4c^2}$$

$z_2^a = h_c^2$ dus

$$-\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{2}c^2 =$$

$$= -\tfrac{1}{4}c^2 + \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}b^2 - \frac{(a^2-b^2)^2}{4c^2}$$

en $(a^2 - b^2)^2 = 3c^2(a^2 - c^2)$.

Dat levert de gelijkzijdige driehoek in het geval $a = b$ en $a = c$.

$$d_b^2 = ac\left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right) = ac\,\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{(a+c)^2}$$

$d_b^2 = h_c^2$ impliceert $\dfrac{ac}{(a+c)^2} = \dfrac{(a+b-c)(-a+b+c)}{4c^2}$

dus $\dfrac{4ac^3}{(a+c)^2} = b^2 - a^2 + 2ac - c^2$

ofwel $b^2 - a^2 = \dfrac{4ac^3}{(a+c)^2} - 2ac + c^2$

Gecombineerd met de eerdere resultaten levert dit het volgende:

$$(b^2 - a^2)^2 = c^2\left(\frac{4ac^2}{(a+c)^2} - 2a + c\right)^2 = 3c^2(a^2 - c^2)$$

dus $\dfrac{(4ac^2 + (a+c)^2(-2a+c))^2}{(a+c)^4} = 3(a^2 - c^2)$

en $((a-c)(2a^2 + 5ac + c^2))^2 = 3(a-c)(a+c)^5$

en $(a-c)(2a^2 + 5ac + c^2)^2 = 3(a+c)^5$.

Noem $\frac{a}{c} = x$, dan krijgen we een vergelijking van de 5e graad in x:

$$x^5 + x^4 - 21x^3 - 49x^2 - 24x - 4 = 0.$$

Factor $x + 2$ uitdelen ($a = -2c$ levert geen oplossing) geeft:

$$x^4 - x^3 - 19x^2 - 11x - 2 = 0.$$

Deze vergelijking is exact op te lossen!
Benaderen van de oplossingen werkt veel nauwkeuriger en gaat veel sneller. Volgens de tekenregel van Descartes is er precies één positieve oplossing. Met behulp van bijvoorbeeld DERIVE is dat ook snel te zien door de grafiek van de veelterm te laten tekenen.
Met hetzelfde programma is een benadering van de positieve oplossing snel gevonden: $x = 5.133434$.
Nemen we voor het gemak $c = 1$, dan geldt dus $a = 5.133434$ en via $(a^2 - b^2)^2 = 3c^2(a^2 - c^2)$ vinden we $b = 4.198942$. Voor de hoeken van de driehoek vinden we $\alpha = 156{,}8389°$, $\beta = 18{,}76688°$ en $\gamma = 4{,}394248°$.

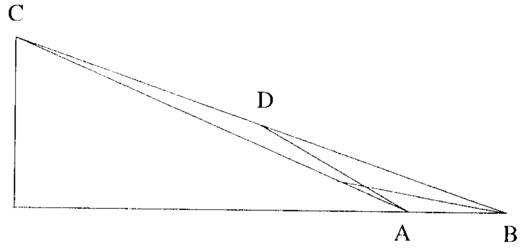


fig. 4

Een tekening van deze driehoek zonder de bijzondere lijnen doet niets vermoeden over de speciale eigenschap die deze driehoek bezit. Vandaar dat de driehoek boven het artikel staat zonder de bijzondere lijnen en hier met de bijzondere lijnen! De gelijkzijdige driehoek was al lang een opmerkelijke driehoek, maar deze driehoek is dat pas sinds kort!

Antwoorden

Vraag 1
Voor $BC \leq 5$ zijn er geen oplossingen, voor $BC = 5$ of $BC > 10$ één oplossing en voor $5 < BC < 10$ twee oplossingen.

Vraag 2
Hint: teken de omgeschreven cirkel van de driehoek d_a en de middelloodlijn van BC snijden elkaar op de omgeschreven cirkel.
Bij de constructie van de driehoek begin je met het hoekpunt A waaruit de drie bijzondere lijnen gaan. Teken de hoogtelijn met daar loodrecht op de lijn waar B en C moeten komen te liggen. Teken vervolgens de bissectrice en de zwaartelijn in de figuur. Met behulp van de hint hierboven is het middelpunt van de omgeschreven cirkel te vinden. Door vervolgens die cirkel te tekenen vind je de hoekpunten B en C.

Thijs Notenboom, Hogeschool van Utrecht

Literatuur

Bottema, O. (1987). *Hoofdstukken uit de elementaire meetkunde*. Epsilon Uitgaven, Utrecht.