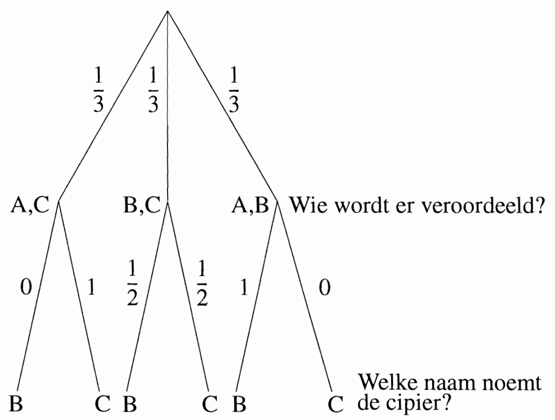
In het vorige nummer van de *Nieuwe Wiskrant* presenteerde **Ronald Meester** enkele vraagstukken over conditionele kansen en verwachtingen. In dit nummer gaat hij in op de oplossingen van deze problemen.

Conditionele kansen II: gevangenen, cipiers en enveloppen

In de vorige editie van de *Nieuwe Wiskrant* heb ik betoogd dat conditionele kansen vaak verwarrend zijn. Om mijn bewering kracht bij te zetten heb ik vier vragen geformuleerd. In dit vervolg wil ik ingaan op de antwoorden op die vier vragen.

De gevangenen en de cipier

Drie gevangenen, A, B en C, weten dat twee van hen veroordeeld zijn en één niet. Zonder extra informatie is voor A de kans dat hij veroordeeld is gelijk aan $\frac{2}{3}$, er even vanuit gaande dat ze allemaal met dezelfde kans veroordeeld zijn.
Stel nu dat A de cipier (die weet wie er veroordeeld zijn) tegenkomt en hem vraagt: 'Kunt u mij de naam geven van een van de andere gevangenen die veroordeeld is?' De cipier vertelt A hierop dat B veroordeeld is. A knikt blij, bedenkt dat van de overgebleven mogelijkheden A en C er slechts één veroordeeld is (A heeft nu immers extra informatie dat B veroordeeld is) en hij concludeert dat hijzelf en C allebei met kans $\frac{1}{2}$ veroordeeld zijn. Dit is minder dan $\frac{2}{3}$, de oorspronkelijke kans dat A veroordeeld was. De extra informatie heeft dus voor A (denkt hij) de kans op veroordeling kleiner gemaakt. Heeft A gelijk of niet en waarom?
De mogelijkheden met bijbehorende kansen zijn in schema 1 weergegeven.



Schema 1

Uit het schema lezen we af dat de kans dat B genoemd wordt gelijk is aan

$$\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Op dezelfde manier zien we dat de kans dat B genoemd wordt *en* A veroordeeld is, gelijk is aan $\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}$. De conditionele kans dat A veroordeeld is, gegeven dat B genoemd wordt, is dus gelijk aan

$$\frac{P(A \text{ veroordeeld en } B \text{ genoemd})}{P(B \text{ genoemd})}=\frac{2}{3}.$$

Hier komt dus gewoon $\frac{2}{3}$ uit, zoals we vorige keer al intuïtief hadden gezien.

Vraag 2 van vorige keer luidde: is na het antwoord van de cipier de conditionele kans (van A uit gezien) dat C veroordeeld wordt ook gewoon $\frac{2}{3}$ of is hier toch iets meer aan de hand?
Uit hetzelfde schema lezen we af dat de kans dat C veroordeeld is *en* B genoemd, gelijk is aan

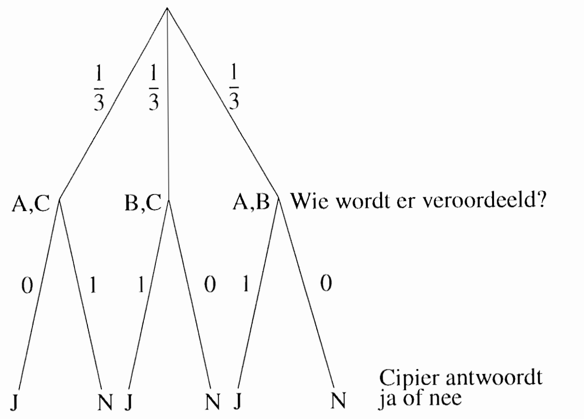
$$\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

De conditionele kans dat C veroordeeld is gegeven dat B genoemd wordt, is dus gelijk aan

$$\frac{P(C \text{ veroordeeld en } B \text{ genoemd})}{P(B \text{ genoemd})}=\frac{1}{3}.$$

We zien dus dat de conditionele kans dat C veroordeeld is, afneemt op het moment dat de cipier als antwoord op A's vraag 'B' geeft. Dit lijkt in tegenspraak met de wet van de grote aantallen, aangezien C toch echt in ongeveer tweederde van de gevallen veroordeeld zal worden. De oplossing van dit probleem ligt in het feit dat de cipier simpelweg niet altijd 'B' kan antwoorden. Als namelijk A en C veroordeeld zijn, is de cipier gedwongen om C als antwoord te geven.
De wet van de grote aantallen kunnen we dus niet zomaar toepassen in deze situatie.

Vraag 1 luidde: stel dat A de cipier had gevraagd: 'Is B veroordeeld?' en dat de cipier 'Ja' had geantwoord. Zou dit voor A de conditionele kans dat hij veroordeeld is wél veranderen?
Bij deze vraag hoort schema 2.



Schema 2

We zien dat de kans dat A veroordeeld is *en* het antwoord van de cipier ja is, gelijk is aan

$$\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

De kans dat de cipier ja antwoordt is gelijk aan

$$\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

De gevraagde conditionele kans is dus gelijk aan

$$\frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}.$$

Nu blijkt het antwoord van de cipier dus *wel* effect te hebben op de conditionele kans dat A veroordeeld is. Dit is ook goed in te zien door te kijken wat er gebeurt als de cipier 'Nee' antwoordt. In dat geval moeten A en C wel veroordeeld zijn en wordt de conditionele kans dus 1.

Het eerste enveloppenprobleem

Stel ik heb twee enveloppen met verschillende hoeveelheden geld erin waarvan ik jou er één laat trekken. Je maakt hem niet open. Je hebt geen idee hoeveel geld erin zit en de kans dat je de envelop met het hoogste bedrag hebt getrokken, is uiteraard $\frac{1}{2}$. Nu geef ik je extra informatie: ik vertel je namelijk dat de ene envelop (welke weet ik niet) twee maal zo veel geld bevat als de andere. Vervolgens krijg je van mij de gelegenheid om de enveloppen om te ruilen. Is het verstandig om dit te doen? Hier is een interessante redenering: we weten natuurlijk niet hoeveel geld er in de verschillende enveloppen zit, maar stel dat jij x gulden in jouw envelop hebt. Op grond van mijn extra informatie weet je dan dat de andere envelop $2x$ of $\frac{1}{2}x$ gulden bevat en dat deze mogelijkheden gelijke kans hebben. De gemiddelde opbrengst van de andere envelop is dan dus

$$\frac{1}{2}\,2x + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,x = \frac{5}{4}x.$$

Dit is meer dan ik nu heb (namelijk x) dus het is zeker verstandig om te ruilen, aangezien de conditionele verwachte opbrengst op grond van deze redenering hoger wordt na ruilen.
Deze redenering kan uiteraard niet juist zijn. *Vraag 3* van vorige keer luidde: wat is er dan niet correct aan deze redenering? We zullen nu zien dat het onmogelijk is om geld in de enveloppen te doen op zo'n manier dat de conditionele kansen (na het openen van een envelop) dat de andere envelop de helft respectievelijk twee keer zo veel bevat, allebei gelijk zijn aan een $\frac{1}{2}$.
We gaan er voor het gemak even van uit dat alle bedragen machten van 2 zijn. Het bedrag in de gekozen envelop duiden we aan met X, en het bedrag in de andere envelop met Y. (Onze aanname zegt dat $X, Y \in \{2^k, k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$.) De informatie die we hebben, vertelt ons dat als X gelijk is aan a, dan is Y gelijk aan $2a$ of $\frac{1}{2}a$, allebei met kans $\frac{1}{2}$. Als we dit formeel opschrijven levert dit

$$P(Y = a) = \frac{1}{2}P(X = 2a) + \frac{1}{2}P(X = \frac{1}{2}a).$$

Merk nu op dat de kans dat de gekozen envelop een bepaald bedrag bevat gelijk moet zijn aan de kans dat de andere envelop datzelfde bedrag bevat; ik kies ze tenslotte gewoon met kans $\frac{1}{2}$. Dit levert

$$P(Y = a) = P(X = a).$$

Als we de laatste twee vergelijkingen combineren, dan vinden we tenslotte dat

$$P(X = a) = \frac{1}{2}P(X = 2a) + \frac{1}{2}\,P(X = \frac{1}{2}a). \qquad (1)$$

Bedenk nu dat dit moet gelden voor elke a. We definiëren nu $a_k = P(X = 2^k)$. Als je er even over nadenkt, dan zie je dat (1) impliceert dat alle punten (k, a_k) in het vlak op een rechte lijn moeten liggen. Als deze lijn horizontaal loopt, dan tellen de a_k's niet op tot 1 en dat is in tegenspraak met het feit dat ze kansen op disjuncte gebeurtenissen voorstellen. Als de lijn niet horizontaal loopt, dan zullen er a_k's zijn die negatief zijn en dat kan ook niet, want het zijn allemaal kansen. We hebben dus een tegenspraak afgeleid. Er bestaan dus geen X en Y met de gewenste eigenschappen.

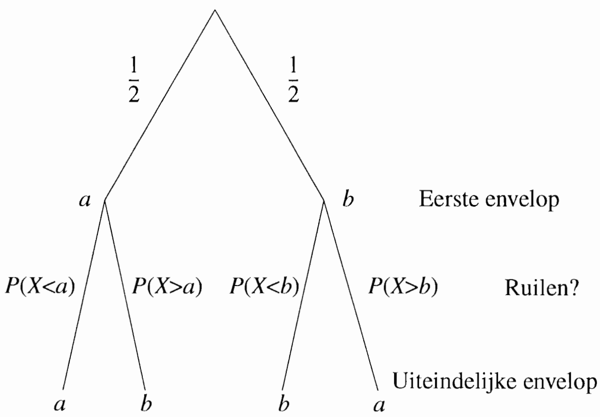
Het tweede enveloppenprobleem: een winnende strategie!

Ik heb weer twee enveloppen met geld waarvan jij er één trekt. In dit geval maak je hem *wel* open en je ziet een bepaald bedrag, zeg 30 gulden. In vergelijking met het vorige vraagstuk heb je nu dus andere informatie: je weet precies hoeveel geld jouw envelop bevat, maar je weet niets meer over de verhouding van de hoeveelheden geld. Is na deze extra informatie de conditionele kans dat jouw envelop het hoogste bedrag bevat nog steeds $\frac{1}{2}$?

Vraag 4 luidde: is er nu een beslissingsprocedure die vertelt of je al dan niet moet ruilen, en die ook winstgevend is? De strategie zou altijd moeten werken, ongeacht de geldbedragen die in de envelop gedaan zijn.

Verrassend genoeg kunnen we de extra informatie die we nu hebben, gebruiken om een winnende strategie te ontwikkelen. Dit gaat als volgt. Laat je computer een random getal trekken uit een of andere verdeling, bijvoorbeeld de exponentiële verdeling, en noem dat getal X. (Er is niets bijzonders aan de exponentiële verdeling hier; de procedure werkt voor elke verdeling, maar als we de procedure straks willen simuleren, dan moeten we een keuze maken.) De procedure is als volgt: als het bedrag in jouw envelop groter is dan X dan ruil je niet; als het bedrag kleiner is dan ruil je wel. Waarom werkt dit?

Laten we er even vanuit gaan dat de bedragen in de envelop gelijk zijn aan a en b, en dat $a < b$. Bij deze situatie hoort schema 3:



Schema 3

We zien dus dat de kans dat we uiteindelijk b hebben gelijk is aan

$$\frac{1}{2} \cdot P(X > a) + \frac{1}{2} \cdot P(X < b)$$

en dit is gelijk aan

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} P(a \leq X < b) > \frac{1}{2}.$$

We zien dus dat we nu een kans strikt groter dan $\frac{1}{2}$ hebben om de grootste envelop te kiezen! Het stochastische karakter van de procedure is nodig omdat we zelf niet weten hoe groot a en b zijn en we dus iets moeten doen dat voor alle mogelijke waarden van a en b werkt.

We kunnen dit heel eenvoudig simuleren op een computer. In het volgende PASCAL-programma vullen we de enveloppen 0 en 1 met 1 en 2 gulden respectievelijk. We volgende de beschreven random procedure en herhalen dit 1.000.000 maal. De variabelen in het programma zijn de volgende:

`env0:`	aantal keren dat initieel voor envelop 0 gekozen is
`env1:`	aantal keren dat initieel voor envelop 1 gekozen is
`env(0):`	inhoud van de eerste envelop
`env(1):`	inhoud van de tweede envelop
`min:`	aantal keren dat de uiteindelijke keuze op envelop 0 viel
`max:`	aantal keren dat de uiteindelijke keuze op envelop 1 viel

```
begin
  env0 := 0; env1 := 0;
  env(0) := 1; env(1) := 2;
  min := 0; max := 0;
  randomize;
  for i := 1 to 1000000 do begin
    x := random;
    if  (x<1/2) then begin
        keuze := 0;
        env0 := env0+1;
    end else begin
        keuze := 1;
        env1 := env1+1;
    end;
    x := -ln(random);
    if  (x>env(keuze)) then
    keuze := 1-keuze;
    if  (keuze=1) then max := max+1
    else min := min+1;
  end;
    writeln('env0 = ',env0, 'env1 = ',
    env1,
    'max = ',max, 'min = ',min);
  end.
```

Dit programma hebben we vijf maal gerund. De waarden van `max` en `min` waren respectievelijk:

616742 en 383258
615926 en 384074
617278 en 382722
617019 en 382981
615408 en 384592.

We zien dus dat voor deze geldbedragen (1 en 2 gulden) de strategie een succeskans oplevert van ruim 61%. Verrassend toch?!

Ronald Meester, Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht