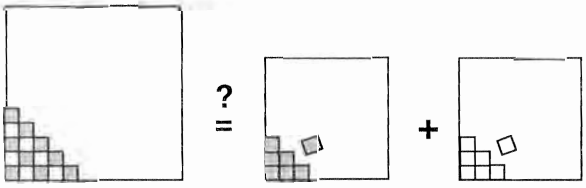
Wat te bewijzen is

Rubriek

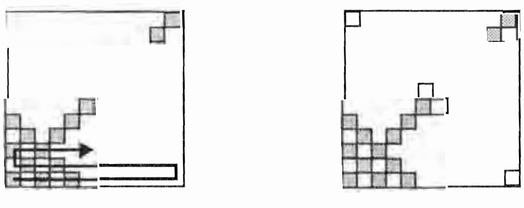
Bewijzen is actueel in discussies rondom het wiskunde-onderwijs. De laatste duit in het zakje is gedaan door Frans Keune: *deduceren is vervangen door waarnemen*. Speelt bewijzen helemaal geen rol meer in het onderwijs en moet daar op korte termijn iets aan veranderen?
In deze rubriek willen we niet uitgebreid discussiëren over de wenselijkheid van bewijzen. Wat we wél willen is aan de hand van voorbeelden laten zien dat bewijzen soms heel mooi of aanschouwelijk of zelfs grappig zijn. Misschien dat leraren er door geïnspireerd raken ook in klassen waar dit niet uitdrukkelijk op het wiskunde-menu staat, af en toe een bewijs te laten proeven; of nog beter: om leerlingen uit te dagen zelf een onomstotelijk bewijs (is dat nu een pleonasme?) te leveren. Het zou mooi zijn als dit stukje (mede dankzij de inbreng van lezers) de start is van een inductief proces dat in elk nummer van de Nieuwe Wiskrant een 'bewijs-pagina' oplevert.

Schaakborden en de wortel uit twee

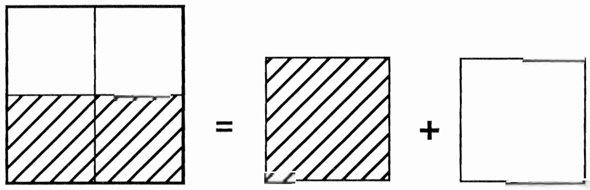
Met 100 vierkante tegeltjes kun je één groot vierkant leggen, met 200 niet. Dat komt omdat 200 geen kwadraat is (zit tussen de kwadraten van 14 en 15). De context van tegelpatronen is heel geschikt om kwadraten te introduceren. Een stapje verder gaat het volgende probleem: is het mogelijk een vierkant tegelpatroon te maken, zó dat dit 'eerlijk' gedeeld kan worden in twee kleinere vierkanten. Anders gezegd: kun je een 'schaakbord' bedenken waarbij je met alle zwarte velden (en ook met alle witte velden) een vierkant kunt maken. Ik noem dit hier de 'discrete halvering' van het vierkant.



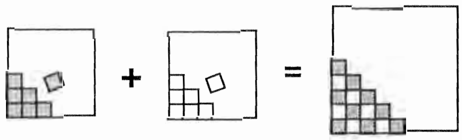
Wil de halvering lukken, dan moet het schaakbord een *even* aantal velden bezitten. Daaruit volgt dat het bord twee verschillend gekleurde diagonalen heeft. Immers:



doorloop nu dit bord in zig-zag lijn te beginnen op het zwarte veld links onder; vanwege het even aantal velden op het bord, moet je op een wit veld eindigen. Dat ligt dan noodzakelijk links-boven, want het veld rechtsboven is zwart. Nu weet je zeker dat langs een rand van het bord een even aantal velden ligt (van zwart naar wit).
Vanwege die even aantallen velden langs de rand, kan het bord pijnloos worden gevierendeeld.

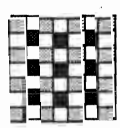


Dat geeft dan, na overschilderen van de velden, een kleiner halveerbaar schaakbord:



Nu komt het:
Als er een halveerbaar schaakboord bestaat, dan bestaat er ook een ***kleiner*** *halveerbaar schaakbord.*
Dat is strijdig met de evident ware uitspraak:
Als er een halveerbaar schaakboord bestaat, dan bestaat er een ***kleinste*** *halveerbaar schaakbord.*

Zo is bewezen (zonder dat er algebra aan te pas kwam) dat er geen oplossing kan zijn voor het discrete halveringsprobleem. Formeler gezegd: er bestaan géén positieve aantallen m en n zódat $m^2 = 2n^2$.
Het getal $\sqrt{2}$ dat meetkundig bestaansrecht heeft (denk aan de oplosssing van het continue halveringsprobleem), is ongelijk aan welk rationaal getal dan ook.
Bovenstaand bewijs is een visuele vorm van het klassieke bewijs dat wordt toegeschreven aan de Pythagoreeërs en waarvan het resultaat een crisis in de Griekse wiskunde veroorzaakte. In het nieuwe programma wiskunde B2 vwo staat letterlijk dat *de kandidaat de irrationaliteit van een getal als* $\sqrt{2}$ *moet kunnen bewijzen.* Op dat niveau kan het best wat formeler. Maar is het niet mogelijk om, ik zeg maar wat, in een derde klas met vwo-leerlingen de tegel-versie van het probleem aan te kaarten?



Er is nog een leuk vervolg. Neem het oneven bord van 7 bij 7. De 25 gekleurde velden vormen een kwadraat, voor de halvering ontbreekt slechts één wit veld. Optisch is het duidelijk dat die 25 de som van twee opvolgende kwadraten is. Onderzoek of er meer van zulke bijzondere oneven schaakborden zijn. (Antwoord: ja, zelfs oneindig veel; de eerstvolgende is 41 bij 41).

Martin Kindt, Freudenthal Instituut