Het meest opmerkelijke nieuwe onderwerp uit het profiel N&T voor het vwo is Voortgezette Meetkunde. Op de scholen die op dit moment met de Profi-materialen werken, worden ervaringen opgedaan waar andere scholen hun voordeel mee kunnen doen. **Gerard Huls** doet verslag.

# Voronoi-diagrammen en bewijzen in de klas

## Inleiding

Sinds het begin van het schooljaar 1996/'97 neemt de Werkplaats Kindergemeenschap in Bilthoven als volgschool deel aan het Profi-project. We hadden hier verschillende motieven voor. De Werkplaats was de voorbereiding op de nieuwe Tweede Fase begonnen met een cursus 'leren leren' en we experimenteerden met studiewijzers. We wilden ons ook op de vakinhoudelijke kant oriënteren. Daarnaast waren we benieuwd welke algemene doelen je met wiskundeonderwijs kunt realiseren. Ik zelf was met name benieuwd naar de andere inhoud van het wiskundeprogramma voor de exacte profielen. Het rapport van de studiecommissie wiskunde B VWO heb ik bestudeerd en ik had deelgenomen aan de veldraadpleging over de wiskunde voor de profielen in de nieuwe tweede fase. Ik citeer uit het rapport:

> ... meer nadruk leggen op onderliggende concepten, redeneren en bewijzen, abstraheren en generaliseren.

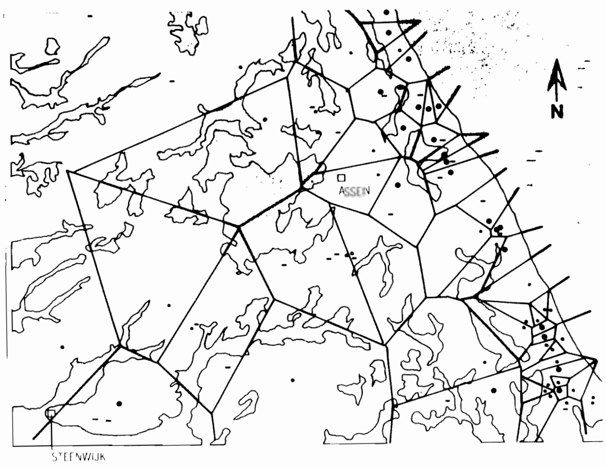
Zou het lukken om deze doelstellingen althans ten dele te realiseren in het nieuwe lesmateriaal?
Het bewijzen van stellingen in de vlakke meetkunde komt daartoe terug in het wiskundeprogramma van het voortgezet onderwijs. Toen ik op de HBS zat, was dit een belangrijk onderdeel van het wiskundeprogramma. We begonnen er al mee in de eerste klas. Ik bewaar er goede herinneringen aan. Nu beginnen we er pas mee in 5 VWO, dit lijkt een goede zaak.
Bewijzen werden vroeger genoteerd volgens een vast stramien:

Gegeven: .....
Te bewijzen: .....
Bewijs: .....

Ik vraag me af of we daar weer naar terug moeten. Het zoeken van een bewijs gaat meestal toch anders en vaak minder schematisch. Bovendien heb je bepaalde punten van houvast nodig, zoals de leerlingen tijdens het doorwerken van het pakketje duidelijker zal worden. Pas als je gaat controleren of je bewijs correct is en daar met anderen over gaat praten, krijg je behoefte aan een duidelijke notatie. In het lespakket *Afstanden, grenzen & gebieden* dat deel uitmaakt van het Profi-materiaal, heb ik samen met mijn leerlingen meetkundige bewijzen bekeken en zelf gezocht. De aanpak is anders dan ik mij van vroeger herinner. Er worden geen schema's aangeboden en er wordt nog geen strak kader aangebracht. Bovendien is er een praktische context: de Voronoi-diagrammen. Daarnaast kunnen we gebruik maken van de computer en dat was 35 jaar geleden beslist onmogelijk. Over onze ervaringen met deze nieuwe leerstof gaat dit stukje.

## Een Voronoi-diagram

Een Voronoi-diagram is een figuur met enkele centra en een gebiedsindeling gemaakt volgens het *naaste-buur-principe.*




*Opdeling van het oostelijk gedeelte van het Drents Plateau in denkbeeldige gebieden. Centra zijn hier groepjes hunnebedden.*

In hoofdstuk 1 van het pakket blijkt dat je Voronoi-diagrammen ook tegen komt in de meteorologie, de aardrijkskunde en de archeologie, een Voronoi-cel heet daar Thiessen-polygoon. Thiessen gebruikte ze bij het bepalen van de hoeveelheid neerslag in een gebied waarbij maar op een klein aantal punten is gemeten.

## Ervaringen

Het tekenen van al die Voronoi-diagrammen vinden sommige werkers (zo worden de leerlingen van de Werkplaats genoemd) al snel vervelend. Roel vraagt bijvoorbeeld of er niet een programmaatje is voor de grafische rekenmachine waarmee je dit kunt doen, hij biedt aan om dit op internet te zoeken. Ik kan hem geruststellen: Aad Goddijn heeft een programma geschreven dat op elke MSDOS computer draait en waarmee je naar hartelust kunt experimenteren met Voronoi-diagrammen. Hierdoor getroost gaat hij verder met de opdracht. Maar hij protesteert nog wel als hij ziet dat in het antwoordenboekje de tekeningen niet allemaal helemaal zijn afgemaakt.

Overigens levert het tekenen van Voronoi-diagrammen weinig problemen op. Aan het eind van dit hoofdstuk wordt een methode beschreven waarmee je drie mogelijke centra van een eenvoudig drielanden Voronoi-diagram terug kunt vinden als je de grenzen kent. Je kiest een willekeurig punt, spiegelt dat punt zes keer in een Voronoigrens, dan blijkt dat je op hetzelfde punt terugkomt. Nummer de beeldpunten achtereenvolgens $P_1$, $P_2$, .... en $P_6$. Het midden van $P_3P_6$ is dan een mogelijk centrum van de Voronoi-cel. Iedereen kan constateren dat deze methode altijd werkt. Maar dat is nog geen wiskundig bewijs! Het hoofdstuk besluit met een onderzoeksopdracht. De leerlingen mogen zoeken naar een bewijs voor deze methode.
Ik laat één lesuur aan deze opdracht werken en vraag het werk thuis af te maken en de oplossing in te leveren met een verslagje. Helaas kan ik niet beloven dat ik er een cijfer voor zal geven, want ik heb op dat moment geen idee hoe je zoiets zou moeten beoordelen. De leerlingen vinden dat geen probleem en ik krijg de volgende les – er zat een weekend tussen – prachtige verslagen van de zoektochten.
Helaas heeft niemand een sluitende redenering, een bewijs, gevonden. Nienke vraagt zich af hoe ze verslag moet doen van al haar pogingen om een bewijs te vinden. Het is gisteravond niet gelukt, maar ze heeft wel eindeloos veel tekeningetjes gemaakt. Zal ik al die tekeningen mee laten inleveren? Het is in elk geval prima dat ze geen onvolledig bewijs inlevert, vind ik. Karim vraagt of je door drie punten altijd precies één cirkel kunt tekenen. Daan constateert dat je over een hoek van precies 360° moet draaien en zegt 'Je spiegelt een willekeurig punt en spiegelt het. Als hij niet 360° draait, is het nieuwe te 'ver' en het oude te 'kort' en moet je dus het middelpunt daartussen nemen om de goede centra te vinden'. Maar hij verklaart niet waarom je precies net zoveel te 'ver' als te 'kort' uitkomt. Edouard meent: 'De waarheid ligt, zoals het gezegde gaat, in het midden, dus neem je het punt $R$ midden tussen $P$ en $Q$ in. Na drie keer spiegelen merk je dat je weer op punt $R$ uitkomt!'

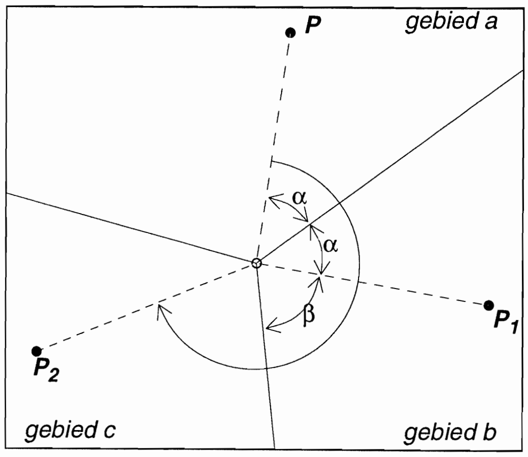
Het is achteraf gezien niet verwonderlijk dat leerlingen nog weinig van bewijzen terechtbrengen. Het is tenslotte de eerste keer dat ze met zo'n vraag worden geconfronteerd en ze kennen nog weinig voorbeelden van bewijzen uit de meetkunde. Al met al is er echter voldoende gespreksstof voor een geanimeerde klassikale behandeling van het probleem. Het lukt om samen in een min of meer centraal gestuurd klassegesprek een sluitend bewijs te vinden dat iedereen bevredigt. En er is een basis gelegd voor hoofdstuk twee waar het redeneren in de meetkunde

**Opgave EEN**

Vind en beschrijf een redenering, waaruit blijkt dat de manier van opgave 16 altijd werkt.

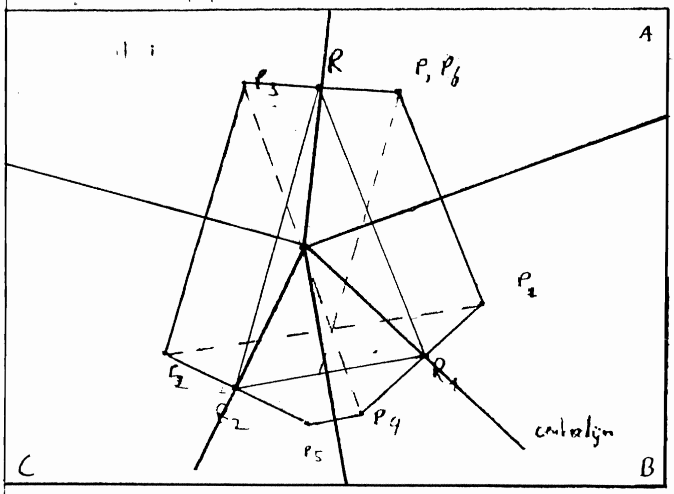
Enkele tips:

a. In nevenstaande figuur zijn $P_1$ en $P_2$ al aangegeven. Het volgende gespiegelde punt zou $Q$ zijn, maar noem dat punt nu $P_3$ en spiegel nog drie keer door. Je ontdekt iets over $P_6$.
b. *Als* je zeker zou zijn dat het voorgaande altijd klopt, *dan* kun je concluderen dat het midden $R$ van $PP_3$ na drie keer spiegelen op zichzelf terechtkomt.
Zoek uit waarom dat zo is.
c. Maar waaróm is $P_6$ gelijk aan $P$?
In de figuur zijn enkele hoeken aangegeven. Je kunt het spiegelen ook opvatten als draai van de staaf $MP$ om het draaipunt $M$. Vergelijk de draaihoek van $MP$ naar $MP_2$ met de hoek van cel $b$.




*Deel van Onderzoeksopdracht A: centra terugvinden*

Onderzoeksopdracht A: Centra terugvinden.




We zetten eerst punt P neer, vervolgens spiegelen we todat we punt $P_1$, $P_2$ en $P_3$ hebben. Als we vervolgens een lijn van P naar $P_3$ via $P_1$ en $P_2$ trekken, weten we dat de hoeken van deze driehoek bij elkaar minder dan 360° zijn het verschil noemen we X.
Dus : $360 - x$ : som hoeken
We gaan nu door met spiegelen, todat we op $P_6$ aankomen, welke gelijk is aan
We zien nu dat de som van de hoeken groter is dan 360 en wel $x$ groter! Dus $x + 360 =$ som. Als we de 2 functies samenvoegen krijgen we : $360 + x + 360 - x = 360 + 360 = 720$ is 2 rondjes.
Nu trekken we een lijn van P naar $P_1$, $P_4$, $P_5$, $P_2$ en $P_3$ (met pen aangegeven): We zien dat die lijnen een verdeelde driehoek vormen. Als we nu de som functie : $(360 - x) + (360 + x)$ uit voeren, krijgen we het gemiddelde, is een punt waar de centralijn doorheen gaat. Op de centralijn kunnen alle centra liggen, probeer maar.

*Leerlingenwerk bij de onderzoeksopdracht*

centraal staat. En ik ben blij dat ik niet heb beloofd dat ik een cijfer zou geven. Ik bestudeer alle verslagen uitvoerig en kom tot de conclusie dat het onmogelijk is om cijfers toe te kennen. Ik leg drie werkstukken voor aan verschillende collega's en niemand kan een correctie-model produceren en cijfers toekennen.

## Redeneren en bewijzen

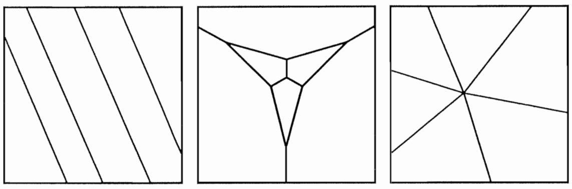
Hoofdstuk 2 gaat over redeneren met afstanden en hoofdstuk 4 over een speciale vierhoek.
Leerlingen verwoorden het gevoel dat ze in deze hoofdstukken krijgen met 'Het is alsof je op eieren loopt'. Ze moeten bijvoorbeeld aan de hand genomen door de tekst bewijzen dat voor drie centra de Voronoi-grenzen door precies één punt gaan. Ze maken kennis met de driehoeksongelijkheid. En leren dat je die kan gebruiken bij het bewijs dat geldt: 'Elk punt dat niet op de middelloodlijn ligt, ligt niet op de Voronoi-grens.' Ik krijg hierbij het gevoel dat de context verduidelijkt dat je dit apart moet bewijzen. Voor de meeste leerlingen is dit niet direct duidelijk.
Bovendien wordt hier voor het eerst gepoogd tot een heldere notatie van de redenering en het bewijs te komen.
Een ander probleem betreft de middelen die je mag gebruiken bij een bewijs. De opgaven waarin een bewijs wordt gevraagd, roepen hierover vragen op. Daniël meent dat je wel punten van houvast moet kiezen! Bij een poging te bewijzen dat ....... Je kunt je wel gaan afvragen hoe Pythagoras aan zijn stelling is gekomen of waarom de driehoeksongelijkheid geldt. Het is wel sneaky: je kunt je steeds afvragen: *Is dit uitgangspunt wel correct?* vindt hij. En Jan Willem zegt dat hij niet zo gestructureerd werkt als hij de oplossing van een probleem pro-

beert te vinden. Ik ben het met hem eens, maar breng te berde dat je enige structuur in je redenering moet aanbrengen als je denkt dat je een bewijs hebt gevonden. Je moet er dan toch met anderen over kunnen praten en je moet het toch eens kunnen worden over een bewijs. Bovendien, meen ik, zul je toch je redenering leesbaar en overtuigend moeten noteren.

## Practicum Voronoi-diagrammen

Het doorwerken van hoofdstuk 3, dat bestaat uit een computerpracticum Voronoi-diagrammen, lukt prima in één lesuur. Iedereen is er geanimeerd mee bezig, al vindt Joost dat de computers er wel lang over doen als er veel punten gegeven zijn waarbij een Voronoi-diagram getekend moet worden. Ik nodig hem uit het thuis ook eens te proberen op de Pentium 200 van zijn vader. Hij komt de volgende dag melden dat het thuis niet veel sneller ging. Ik vraag of hij eens wil nadenken over een mogelijke verklaring voor de traagheid als er veel punten meespelen. Helaas krijg ik geen reactie op deze vraag.

3 Maak door handig centra te kiezen de Voronoi-diagrammen van de figuren hieronder.
Denk eraan dat je ook eerst lijnen of cirkels kunt tekenen om uit te zoeken waar de centra moeten komen. Geef dan in de figuren aan waar de centra ongeveer komen.



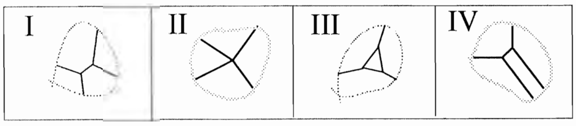
*Opgave uit het computerpracticum*

Roel en Daniël verschillen bij opgave 3 van mening. Moet je de centra eerst met de hand en op een blaadje papier construeren of is het goed mogelijk om direct met de computer en een beetje handig experimenteren een goede tekening te vinden.
In paragraaf 14, over de invloed van het vierde punt, wordt de inzet van de computer als nuttig ervaren. Ik krijg de indruk dat de leerlingen hierbij iets extra's opsteken.

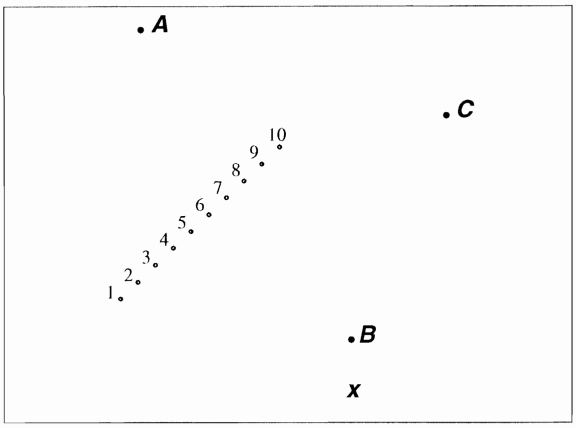
We bekijken de volgende les tijdens een klassikale terugblik op de les in het computerlokaal samen de tekening bij opgave 21. En we zoeken klassikaal een bewijs dat deze figuur inderdaad ongeveer een parabool is. Het bezoek aan het computerlokaal wordt algemeen gewaardeerd en is ervaren als een prettige afwisseling.

**14: De invloed van het vierde punt**

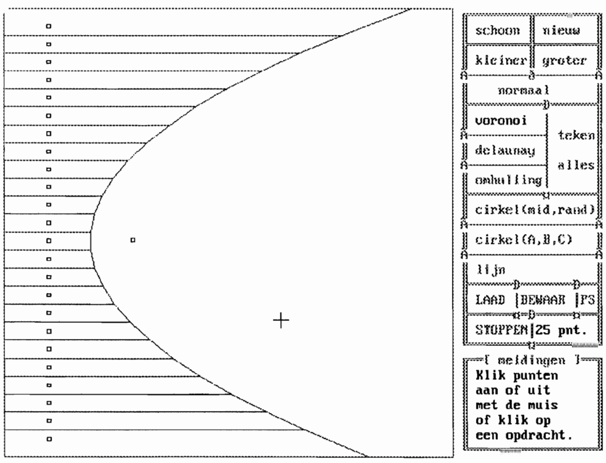
Er zijn eigenlijk maar vier duidelijk onderscheidbare diagrammen bij vier punten mogelijk. Namelijk deze vier:




Kies drie punten ongeveer zoals de zwarte punten *A*, *B* en *C* in de figuur hieronder.




4. Bij deze opgave voegen we steeds opnieuw een vierde punt (*D*) toe en kijken we wat de invloed van dat punt is. (De punten 1 t/m 10 spelen pas een rol bij de volgende opgave.)
a. Klik een vierde punt aan, maar zó, dat een diagram van type III ontstaat. Als je dat punt een klein beetje verplaatst, blijft het diagram van type III.
b. Toon op het scherm alle mogelijke plaatsen voor *D*, waarbij het Voronoi-diagram van type II is.
c. Doe hetzelfde voor type IV.
d. Welk type ontstaat als *D* bij *x* ligt? Gebruik eventueel de opdracht `kleiner` als het niet duidelijk wordt.

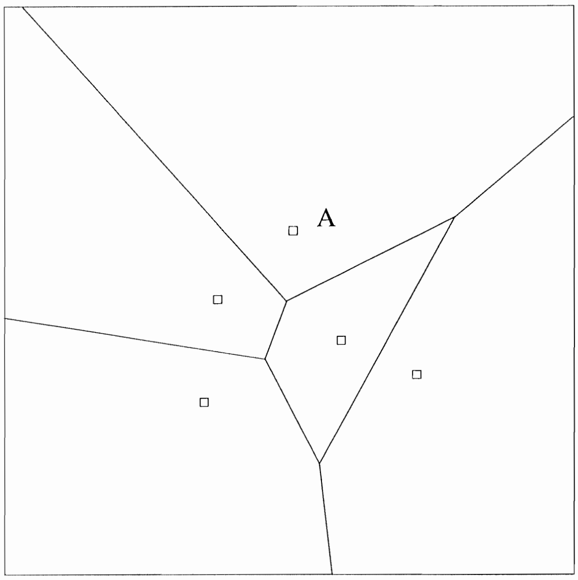



*Figuur bij opgave 21*

## De toets

Ter afsluiting van de hoofdstukken 1 t/m 4 krijgen de leerlingen een toets. Het is een hele opgave om een test te maken die recht doet aan de leerstof. Er moet natuurlijk ook iets in zitten waaruit blijkt dat leerlingen weten wat redeneren en bewijzen is. Het is vooral lastig om een vraagstuk te ontwerpen waarin leerlingen zelf een redenering of een bewijs moeten vinden.
De afsluitende toets wordt redelijk gemaakt waar het constructies betreft die met het geleerde direct gemaakt kunnen worden, dit geldt voor de eerste twee vragen van de test.
De vraag naar het bewijs van de stelling dat de middelloodlijn van twee punten samenvalt met de Voronoigrens tussen twee punten levert een score op van 49%. De meeste werkers hebben wel het bewijs dat een punt op de middelloodlijn dezelfde afstand heeft tot *A* als tot *B*, de score is 67%. Maar het bewijs dat een punt dat (niet op de middelloodlijn) aan de kant van *A* ligt een grotere afstand heeft tot *B* wordt slechts door 22% van de werkers gereproduceerd.

Opgave 4
In de Voronoi-cel waarvan punt *A* het centrum is, wordt een punt *B* gekozen en worden de nieuwe grenzen van de Voronoi-cellen bepaald. De vierhoek in de figuur wordt nu een vijfhoek. Arceer het gebied waarbinnen punt *B* kan liggen. Beargumenteer je constructie.




Vraagstuk 4, een nieuw, origineel probleem dat met de geleerde stof toch opgelost kan worden, bleek moeilijk. Leerlingen proberen wel het probleem aan te pakken, soms experimenteel, soms ook met cirkels, maar slagen er, misschien ook door tijdgebrek, niet in een sluitende redenering te vinden. Alleen Guido vond een (bijna) goede oplossing. Misschien is dit vraagstuk beter geschikt als onderzoeksopdracht waarbij leerlingen ruim de tijd krijgen om te experimenteren met de computer en rustig na kunnen denken.

## Ten slotte

Van de algemene doelen van de nieuwe Tweede Fase wordt de integratie van ICT een beetje gerealiseerd in hoofdstuk 3. Daarnaast komt het onderzoekend leren goed uit de verf in dit pakketje, maar tegelijkertijd wordt weer duidelijk dat een klassegesprek een belangrijke rol kan spelen. Individuele eigen planning van het tempo is bij dit pakketje zinloos en waarschijnlijk zelfs nadelig, omdat leerlingen die het klassikale tempo niet bijhouden weinig opsteken tijdens een klassegesprek. De leerlingen vragen of ze meer duidelijkheid kunnen krijgen over de uitgangspunten waar ze vanuit mogen gaan bij de redeneringen en bewijzen. Wat dat betreft heeft het pakketje zijn doel bereikt. Ik kan ze ook geruststellen; in deel II worden de vertrekpunten, hulpmiddelen en stellingen preciezer omschreven. Bovendien staan daarin meer voorbeelden van goede bewijzen, zodat ze een beter beeld kunnen krijgen van wat een bewijs is. Daarnaast krijgen ze nog talrijke gelegenheden om geleid naar (stukjes van) bewijzen te zoeken.
Ik heb samen met de meeste leerlingen met plezier aan dit onderwerp gewerkt. Ik meen te mogen concluderen dat voor een aantal werkers een tipje van de sluier is opgelicht. Ze beginnen te begrijpen wat een wiskundige redenering en een wiskundig bewijs is. Ze zijn met mij benieuwd naar deel II van de meetkunde.

*Gerard Huls, Werkplaats Kindergemeenschap, Bilthoven*

## Vierkant wiskunde zomerkampen 1998

Deze zomer organiseert de stichting Vierkant voor Wiskunde voor de vijfde keer wiskunde zomerkampen. De kampen worden gehouden in jeugdherberg de Poelakker in Lunteren. De week van 10-14 augustus is voor 10 tot 14 jarigen, de week van 17-21 augustus is voor 12 tot en met 17 jarigen.
Ben je geïnteresseerd en wil je je aanmelden of meer informatie ontvangen, neem dan contact op met Liesbeth De Clerck van de stichting Vierkant voor Wiskunde. Telefoon 020-4447776, e-mail: vierkant@cs.vu.nl.