problemen met diepe wortels

Recreatierubriek

Diepe wortels van binnen en van buiten

Sinds de computer van ons instituut bereid is ook voor niet-deskundigen grote formules mooi af te drukken, droom ik van een recreatierubriek vol eindeloos doorlopende wortelstapelingen.
Het werkt tegenwoordig als volgt.
Op zeker moment staat deze formule op mijn scherm, waarin het vraagteken staat voor een nog onafgewerkte staart:

$$\sqrt{1+?}$$

Kopieer nu op-zijn-computers de hele formule en plak die op de plek van het vraagteken. Mijn eerste wortelteken wordt opgehoogd en bijgelengd; resultaat:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+?}}$$

Nog eens kopiëren, op het vraagteken plakken, en nog eens:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}}}}}$$

De puntjes van 'enzovoort' zijn nu ook ingevuld.
Mooi hoor, zo'n oneindige formule, maar mag het ook iets betekenen?
In dit voorbeeld kunnen we denken dat we steeds meer van de formule te zien krijgen:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1\boxed{+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}}}}}}$$

Zo ontstaat in feite een rij, namelijk

$$\sqrt{1},\ \sqrt{1+\sqrt{1}},\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}},\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}},\ \dots$$

Eigenlijk pak je de formule nu van buiten aan. Een andere manier is juist diep in de wortel beginnen:

$$\boxed{+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+}}}}}}}\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}$$

In dit geval stuiten we weer op dezelfde rij, maar de methode ligt nu dichter bij het echte berekenen. Daar begin je immers steeds binnenin; daarom moest in het hart van de formule (rechtsonderin dus) nu wel een getal ingevuld worden om een begin te hebben.
We zijn klaar voor een serie diepe wortelopgaven.

Opgave 160
Bepaal

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}}}}}$$

Dat wil natuurlijk zeggen: laat zien dat de gesuggereerde limiet bestaat en bereken die. (Verderop in deze tekst staat nog een tip.)
Als u succes heeft met de vorige opgave, zult u dat ook hebben met deze:

Opgave 161
Bepaal

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\dots}}}}}}}}$$

voor positieve a.

In het kader bovenaan de volgende bladzijde vindt u twee mooie identiteiten. De schijn bedriegt echter. Wat met de wortels van opgave 160 nog goed afliep, mag niet zomaar met de wortel met de minnen gedaan worden.

Opgave 162
Toon aan dat bij de wortels met de minnen de tweede schuifmethode werkt, als maar in het hart van de wortel met een getal tússen 0 en 1 begonnen wordt. Bepaal de limiet en constateer dat alles 'klopt'.

Opgave 163
De derde identiteit in het kader bevat in de wortelvorm helemaal geen getallen. Uit deze verdunde lucht komt op een of andere manier '2' voort. Maak dit 'hard'.

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}}}} - \sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\ldots}}}}}}}} = 1 \qquad (1)$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}}}} \times \sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\ldots}}}}}}}} = 1 \qquad (2)$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots}+\ldots+\sqrt{\ldots}+\ldots}+\sqrt{\sqrt{\ldots}+\ldots+\sqrt{\ldots}+\ldots}}+\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots}+\ldots+\sqrt{\ldots}+\ldots}+\sqrt{\sqrt{\ldots}+\ldots+\sqrt{\ldots}+\ldots}}} = 2 \qquad (3)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}{2}\times\ldots = \frac{2}{\pi} \qquad (4)$$

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+7\sqrt{1+8\sqrt{1+9\sqrt{1+10\sqrt{1+\ldots}}}}}}}}}} = 3 \qquad (5)$$

Grotere getallen!

Bij het voorgaande kon nog gedacht worden aan een recurrent gedefinieerde rij:

$$f_n = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 0 \\ \sqrt{1+f_{n-1}} & \text{als } n \ge 1 \end{cases}$$

Voor zulke gevallen bestaat een techniek: een iteratieweb maken bij de grafieken van $y = x$ en $y = \sqrt{1+x}$
Dit alles faalt bij de uitdrukking

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{5+\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{8+\ldots}}}}}}}}$$

Deze kunnen we betekenis geven via de eerste schuifmethode; met andere woorden, door te kijken naar de rij:

$$\sqrt{1},\ \sqrt{1+\sqrt{2}},\ \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}},\ \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4}}}},\ \ldots$$

Zou die rij een limiet hebben? De grotere getallen hebben meer wortels boven zich, en misschien lukt het daarom toch. Om dat te onderzoeken passen we een trucje toe: het naar voren halen van een factor 2. Na wat herschrijven van de vierde term

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4}}}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4}}}}$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{2}{2^2}+\frac{1}{2^2}\sqrt{3+\sqrt{4}}}}$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{2}{2^2}+\sqrt{\frac{3}{2^4}+\sqrt{\frac{4}{2^8}}}}}$$

zien we in de diepte van de wortels hoge machten van twee in de noemer komen. De wortel in de laatste uitdrukking is af te schatten met

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}$$

en zo komen we wel tot een conclusie: ja er is een limiet waarde.
Dat de limiet toch bestaat, komt blijkbaar doordat de gezamenlijke wortels erg krachtig zijn, de getallen in de staart kunnen daar in dit geval niet tegen op. De limietwaarde zelf is echter moeilijk te bepalen.
Nu maken we het bonter.

Opgave 164
Toon aan dat ook bij de volgende vorm een limiet hoort

$$\sqrt{1+\sqrt{10+\sqrt{100+\sqrt{1000+\sqrt{10000+\sqrt{100000+\ldots}}}}}}$$

In het algemeen: neem een stijgende rij getallen a_1, a_2, a_3, ... en kijk naar de wortelvormen

$$b_n = \sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\sqrt{a_4+\ldots+\sqrt{a_n}}}}}$$

Opgave 165
Vind een zo ruim mogelijke voorwaarde voor de rij a_1, a_2, a_3, ... waaronder de rij b_n nog een (eindige) limiet heeft.

Twee juwelen

Juweel 4 in het kader is opgedolven door François Viète (1540-1603). Hij stuitte erop bij het berekenen van de oppervlakte van regelmatige 2^n-hoeken met dezelfde straal, uiteraard om de oppervlakte van een cirkel te berekenen.

Opgave 166
Bewijs deze formule, eventueel gebruik makend van de (uitbreidbare) identiteit:

$$\sin x = 4\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}$$

Nummer 5 stamt van Ramanujan. Na observeren van

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\cdot 8}}}}} = 3$$

met een 'enzovoort' erbij zou dat toch moeten lukken, maar ik had er toch behoorlijk moeite mee. Niettemin:

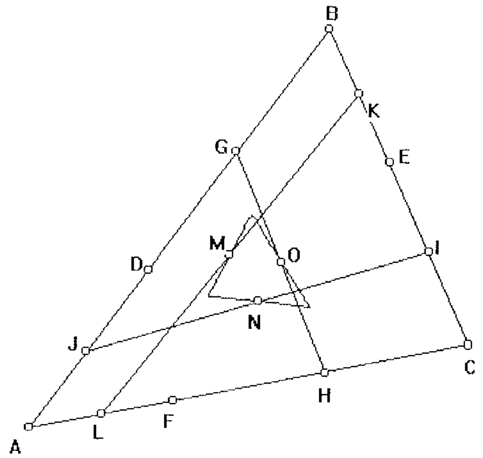
Opgave 167
Probeer deze identiteit van Ramanujan te bewijzen!

Reacties Cabri puzzels

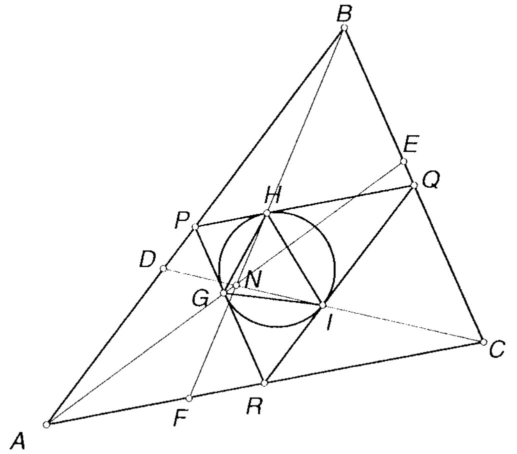
Reacties kwamen binnen op opgave 154, 157 en 159.
Ik hoop dat niet meer mensen per e-mail hebben gereageerd en hun mail terugkregen. In de rubriek stond een foutje in mijn mailadres. Zie voor het juiste adres het eind van deze rubriek.
Niet alle oplossers gebruikten Cabri of een ander constructieprogramma. Dat hoefde ook niet.
Uit de reacties is op te maken dat er zowel geëxperimenteerd als bewezen is; ik tref niet altijd beide activiteiten bij dezelfde inzender aan!

Dit was opgave 154:
Neem een vaste driehoek en een lopend punt P op de driehoek. Er bestaat een punt Q dat helemaal aan de andere kant van P ligt, dat wil zeggen PQ verdeelt de driehoek in twee delen met gelijke lengte.
Wat is de figuur der middens M van de lijnstukken PQ, als P de driehoek doorloopt?
Zelfde vraag voor oppervlakte verdelende PQ's.

Sjaak Kamerling zond figuren in die met het programma *WinGeom* van Rick Parris zijn gemaakt.
Bij de omtrekverdelende lijnen hoort deze figuur:

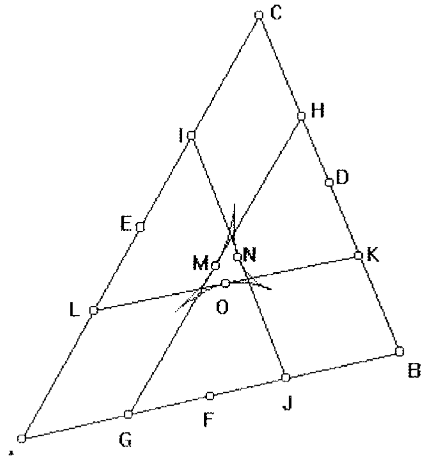


Het kleine driehoekje waar M, N en O op liggen, is de bewuste meetkundige plaats.
De lijn LK is zo'n omtrekverdelende lijn, M is het midden ervan. De lijnen AD, BE en CF zijn de bijzondere omtrekverdelers door de hoekpunten. Als K van E naar B loopt, loopt L van A naar F. Het midden M loopt dan over een lijnstuk, dat is niet zo moeilijk te bewijzen. Nu moeten we nog de eindpunten van zo'n lijnstuk karakteriseren, dan weten we ook welk driehoekje de meetkundige plaats precies is. Die punten corresponderen met de bijzondere standen AE, CD en BF.



Het midden H van BF ligt op de middenparallel tussen AC en B. Noem die PQ, met P op AB en Q op BC. Evenzo vinden we de punten G en I op de andere middenparallellen, zie de figuur hierboven.
Nu nog de positie van G, H en I op die middenparallelen.
De sleutel ligt in de waarneming dat $|AF|$ en $|BE|$ gelijk zijn. Beide vullen immers $|AB|$ aan tot de halve omtrek. Maar dan zijn $|PH|$ en $|PG|$ ook even groot, die zijn immers de helft van respectievelijk $|AF|$ en $|BE|$. Net zo vinden we $|QH| = |QI|$ en $|RG| = |RI|$. Dat betekent G, H en I de raakpunten zijn van de ingeschreven cirkel van driehoek PQR. Nu is de meetkundige plaats volledig in kaart gebracht.
De figuur toont nog een extraatje: AE, BF en CD gaan door één punt, N. Dat kan eenvoudig met de stelling van Ceva bewezen worden.
De punten D, E en F zijn juist de raakpunten van de drie aangeschreven cirkels aan de zijden van de driehoek.
In de litanie der bijzondere punten staat N bekend als het punt van Nagel van driehoek ABC.
De hier geschetste bewijsgang ontleen ik aan *More Mathematical Morsels* van Ross Honsberger, die terecht spreekt van 'An Amazing Locus'.

Bij de oppervlakteverdelende lijnen hoort deze figuur van Sjaak Kamerling:

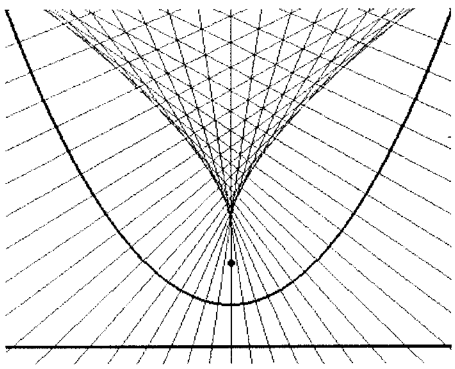


Een driehoekachtig figuurtje is weer het resultaat.

E, F en D zijn nu middens van de zijden van ABC.
Omdat $|GB||BH|$ constant is, is de kromme zijde waar M op ligt een stukje van een hyperbool die AB en BC als asymptoten heeft. Die hyperbool moet ook door het punt K op BE gaan met $BK : BE = 1 : \sqrt{2}$ en is daardoor geheel bepaald.
Roelof Bruggeman heeft de constructies ook gemaakt en ook bijhorende berekeningen uit gevoerd om de driehoek van het omtreksgeval te vinden.

Roelof Bruggeman hielp ons ook aan een oplossing bij probleem 158, over de normalen van een parabool.
Met Cabri was een parabool met een serie normalen getekend, waarbij aangenomen mag worden dat de punten waarin de normalen worden genomen in de links-rechts richting (zie de figuur) op onderling gelijke afstanden liggen. Dat wil zeggen: hun projecties op de richtlijn liggen regelmatig, waarbij één zo'n projectie op de as van de parabool ligt. De opgave was:

Toon aan dat onder deze omstandigheden de selectie van de normalen inderdaad doet wat er schijnt te gebeuren: in een bepaald gebied gaan er steeds drie door één punt.



Bewezen moet dus worden dat *van de beschreven selectie* er steeds drie door één punt gaan, waardoor het mooie netwerkje ontstaat.
Ik geef (bijna letterlijk) de oplossing zoals Roelof Bruggeman deze toestuurde.

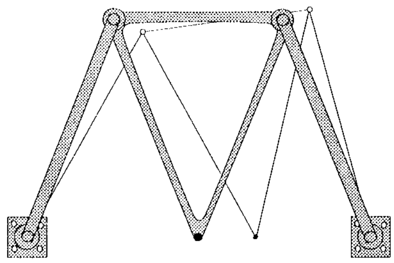
> Gisteravond heb ik gerekend aan de drie normalen aan een parabool $y = x^2$ die door één punt gaan.
> Als je voor een gegeven punt (x, y) de vergelijking opstelt voor de x-waarden u van een punt op de parabool waarvoor de normaal door (x, y) gaat, vind je een derdegraads veelterm waarvan de kwadratische term 0 is. Dat betekent dat de drie oplossingen som 0 hebben.
> Liggen twee van die oplossingen in de ondergroep $(1/n)\mathbb{Z}$ van $\mathbb{R}$, dan ligt de derde oplossing ook in die ondergroep. Dus als je normalen tekent in punten met x-waarden in $(1/n)\mathbb{Z}$, dan snijden die elkaar niet twee bij twee, maar drie bij drie.

Narekenen valt nogal mee; als spin-off kan nog bepaald worden voor welke punten (x, y) er twee van de drie normalen samenvallen. Men vindt dan op betrekkelijk eenvoudige wijze de vergelijking van de brandkromme in de figuur, de zogenaamde evoluut:

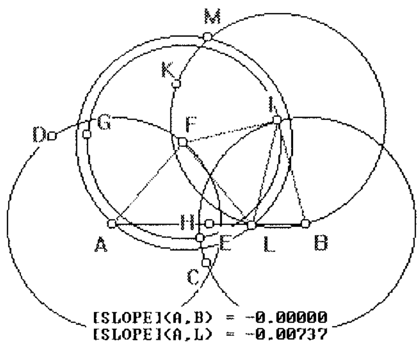
$$y = \frac{1}{2} + 3\left(\frac{x}{4}\right)^{2/3}$$

Opmerkelijk is dat Apollonius van Perga (derde eeuw voor Christus) die kromme al precies beschreven heeft.

Opgave 159 ging over het stangenmechanisme van Robert Manchester.

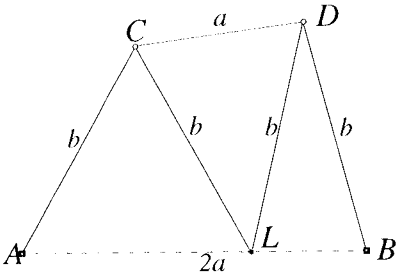


Sjaak Kamerling heeft een simulatie in *WinGeom* gemaakt.



L is het bewegende punt. Door *Wingeom* nu de helling van de lijnen AB en AL te laten uitrekenen, kan vastgesteld worden: L ligt niet op AB.
Een goed moment om te vragen: gaat zo de wiskunde niet naar de knoppen?
In de gegeven situatie zou je de numerieke kwaliteiten van *WinGeom* moeten kennen. Je moet vervolgens beoordelen in hoeveel decimalen de berekende hellingen juist zijn. Omdat *Wingeom* beweert dat de berekende hellingen al in de derde decimaal *verschillen*, ben ik geneigd te zeggen dat nu inderdaad bewezen is dat L niet altijd op AB ligt. Als berekende hellingen *gelijk waren volgens Wingeom* mag je echter *nooit* concluderen dat ze inderdaad gelijk *zijn*. Een subtiel verschil en onze wiskunde gaat niet naar de knoppen als we zulke subtiliteiten er bij blijven betrekken.
Toch is de meetkundige in ons ontevreden: bewijs of niet, het gebeurt teveel in de zwarte doos.
Gelukkig leverde Sieb Kemme een elegant 'echt' bewijs; het is een bewijs uit het ongerijmde.
Veronderstel dat punt L zich inderdaad in de hier getekende situatie óp AB bevindt (maar niet in het midden).
Let nu op de *hoogtelijnen* uit C en D in de beide gelijkbe-

nige driehoeken ACL en LDB. Deze zijn, omdat A, L en B op één lijn liggen, evenwijdig. De snijpunten van deze hoogtelijnen met AB zijn de middens van AL en LB en deze liggen dus op onderlinge afstand a. Maar dat kan niet want CD is niet evenwijdig aan AB als L niet het midden van AB is, en CD heeft wél lengte a. Tegenspraak.
Gaf de *Wingeom*-benadering ons hoe dan ook de zekerheid in handen dat L niet op AB ligt, het bewijs van Sieb geeft inzicht, doordat het expliciet met de eigenschappen van het mechaniek werkt.



Hulde aan constructiemakers en bewijzers!

Cabri, Sketchpad, GeomTricks, Wingeom, ...

Sjaak Kamerling wil het programma *WinGeom* gaan gebruiken met de N&T leerlingen in de nieuwe tweede fase van het VWO.
Het probleem met *Cabri* wordt vooral de hoge prijs gevonden in de toch al prijzige tweede fase en *WinGeom* is (gratis) te downloaden vanaf `www.exeter.edu/~rparris/`.
De grootste Nederlandse schoolboekenuitgever levert *Cabri* mee met zijn drie methodes, zo is intussen gebleken. Daardoor kunnen leerlingen ook zelf over *Cabri* beschikken en is het prijsprobleem toch voor een heel groot deel opgelost wat betreft de markt van die uitgever.
In de programmavergelijking van de vorige *Nieuwe Wiskrant* kon ik *WinGeom* niet opnemen omdat ik het niet kende. Ik blijf wel vinden dat de inhoudelijke vergelijking van de programma's voorop moet staan en dat de prijs altijd moet worden omgerekend naar centen per leerlinggebruiker per uur. Bij 5 jaar gebruik van een programma in heel wat lessen voor toch meestal wel zo'n 30 leerlingen of meer per scholengemeenschap is dat bij *Cabri* niet veel meer dan bij *WinGeom.*
Er kwam nog een reactie binnen op de programmavergelijking, meer een aanvulling daarop.
Omdat die toch wel informatief is, neem ik de reactie van Gerard Koolstra hier op.
Enkele kleine foutjes worden rechtgezet:

> pag 46 (2e kolom):
> Ook Sketchpad geeft aan of je op de cirkel zit, maar doet dat wat bescheiden in de statusregel
>
> pag 48 (1e kolom):
> Het is bij Sketchpad niet echt nodig zelf een button te maken. Je moet wel mvd shift-knop en muis zowel het punt als de cirkel selecteren

En er is aanvullende informatie over deze en andere programma's.

> Demoversies van Cabri II (ook Windows) op
> http://www.ti.com/calc/docs/cabri.htm
>
> Demoversies van Sketchpad op:
> http://www.keypress.com/sketchpad/sketchdemo.html
>
> Informatie over prijzen e.d.:
> http://www.keypress.com/product_info/sketch30.html
>
> Het programma GeomeTricks wordt/werd (dacht ik) in Nederlandse versie uitgegeven onder de naam GeomeTrucs door uitgeverij Visiria voor *f* 239,-
> http://ites.ima.nl/scripts/itesinetsrvr.exe/Prog?progkey=589
>
> Veel informatie en discussie over het gebruik van dit soort programma's is te vinden op de pagina's van Monika Schwarze:
> http://kunden.swhamm.de/Geometriepage/welcome.htm
> Zij geeft ook een nieuwsbrief uit:
> http://kunden.swhamm.de/Geometriepage/abo.htm

Met dank!

Bronnen

Diverse van de meetkunde opgaven uit de Cabri-rubriek komen uit:

Honsberger, Ross (1995). *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry.* The Mathematical Association of America.
Honsberger, Ross (1991). *More Mathematical Morsels.* The Mathematical Association of America.

In dat laatste boek stonden ook enkele van de wortelvormen. Andere bronnen voor de wortels:

Pólya, G. & G. Szegö (1964). *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Erster Band.* Berlin etc., Springer.
Young, Robert M. (1992). *Excursions in Calculus, an interplay of the continuous and the discrete.* The Mathematical Association of America.

Reacties

Reacties op deze rubriek zijn welkom op het bekende adres van het Freudenthal instituut en op mijn (verbeterde) e-mail adres: `A.Goddijn@fi.uu.nl`.
In plaats van uu mag ook nog met het achterhaalde `ruu` gewerkt worden.

Aad Goddijn, Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht