

Voortgezette meetkunde kan gerust een van de meest ingrijpende veranderingen in het nieuwe wiskundeprogramma worden genoemd. Het gebruik van het computerprogramma Cabri Géomètre is hierin een opvallende nieuwkomer. **Michiel Doorman** en **Sieb Kemme** vroegen twee docenten of die computer nu echt nodig is bij meetkunde.

Voortgezette Meetkunde en Cabri Géomètre

Paul Thiel en Wil Janssen geven wiskunde aan de bovenbouw van HAVO en VWO op het Cals College in Nieuwegein. Sinds enkele jaren werken ze met de experimentele Profi-pakketjes in VWO-B. Paul had vorig jaar een zesde klas en heeft het experimentele examen mogen meemaken. Wil heeft dit jaar voor het eerst een zesde klas en heeft nog geen ervaring met het nieuwe examen. Allereerst komen de meest recente ervaringen van de meetkunde in de klas aan bod.

Redeneren en bewijzen zijn een essentieel onderdeel van de Voortgezette Meetkunde. In de drie Profi-pakketjes komt dit dan ook uitvoerig aan de orde. Wat gaat goed en wat gaat niet zo goed?

Paul: Sommige zaken die bewezen moeten worden, liggen zo verschrikkelijk voor de hand, dat de leerlingen niet goed beseffen waar ze eigenlijk mee bezig zijn. Dat maakt ze slordig. Ze gebruiken zaken door elkaar heen. Bijvoorbeeld zaken die je eigenlijk nog moet bewijzen. Als de problemen moeilijker worden, loopt het beter.

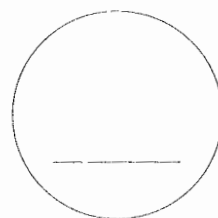
Wil: Het is jammer dat er in de onderbouw op dit punt geen voorbereiding heeft plaatsgevonden. Je moet nu helemaal van voren af aan beginnen. Het bewijs dat in een driehoek de buitenhoek gelijk is aan de som van de tegenoverliggende binnenhoeken, is nu meteen al een heel kloek bewijs. Ook het bewijs dat de som van overstaande hoeken in een koordenvierhoek 180° is, is een fors bewijs. Terwijl dat eigenlijk gewoon onderwerpen zijn uit de onderbouw. Daarnaast ben je veel tijd kwijt aan elementaire vaardigheden in rekenen en algebra. Dat $x^2 + 2x^2 = 3x^2$ vinden ze in 4 VWO al heel moeilijk te begrijpen. Trouwens, er zit wel erg veel over de koordenvierhoeken in het programma en wat heb je daaraan? Is de algebra niet veel essentiëler?

Paul: Nee, de koordenvierhoeken zélf zijn niet zo belangrijk. Het gaat om het leren opzetten van een correct bewijs. Wat je wel en wat je niet mag gebruiken.

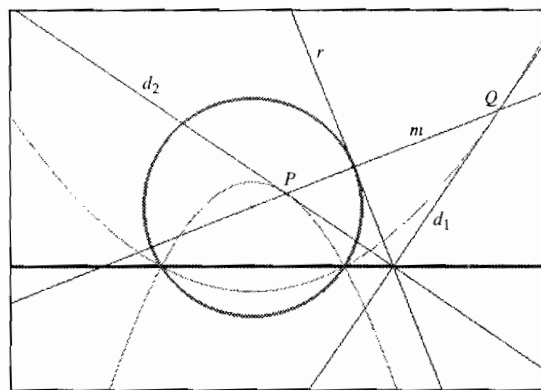
Wat zijn de winstpunten van deze meetkunde?

Wat ik winst vind, is dat je zo heerlijk met de hele klas

aan het zoeken kunt zijn naar een goede aanpak. Zo komt in het Profi-materiaal de vraag voor naar de conflictlijn van een figuur die bestaat uit een cirkel en een lijn buiten die cirkel. Een leerling vroeg zich af hoe dat eruit zag als die lijn een lijnstukje was binnen de cirkel. Ik wist de oplossing zelf niet zo gauw.



We hebben toen maar het lijnstukje doorgetrokken tot een lijn. Het lijkt dan een parabool, maar is dat ook zo? We zijn daar met zijn allen de hele les mee bezig geweest.



Constructie met Cabri: lijn m gaat door het midden van de cirkel en lijn r is de raaklijn aan de cirkel. De conflictpunten van het raakpunt en de dikke lijn liggen dan op de hoekdeellijnen d_1 en d_2 . Zo worden P en Q geconstrueerd. De parabolen ontstaan als je vervolgens m laat draaien.

Wil: Sommige zaken zijn heel mooi, vooral bij bewijzen, als je je afvraagt of iets altijd zo is. En dan blijkt met een tegenvoorbeeld dat dat niet het geval is.

Hoe ervaren jullie het meetkundeprogramma als geheel?

Wil: Ik heb toch wel een grote graat dwars in mijn keel zitten dat de ruimtemeetkunde is verdwenen. Daar ben ik rancuneus over en daardoor zie ik deze meetkunde door een negatief gekleurde bril.

Paul: Het is moeilijk om een bewijs netjes en helder op te schrijven. Vooral de kleine bewijzen. Je bent ook met elkaar aan het zoeken om het zoekproces duidelijk te maken. Als het er dan staat, is de spanning eraf. Daardoor sla je de fase van het netjes opschrijven wel eens over, terwijl dat op het proefwerk wel moet. Verder duurt het te lang voor we op het goede niveau zijn. Het begin van de pakketjes gaat te langzaam.

Wat vonden jullie van de meetkunde op het examen?

Wil: Ik heb daar nog geen oordeel over, ik heb nog niet met het experimentele examen te maken gehad.

Paul: Mijn eerste reactie over de opgaven was een schrikreactie. De antwoorden zagen er gelukkig beter uit dan ik had verwacht. Door de vraag goed te bekijken en rust te nemen bij het zoeken naar een oplossing komen leerlingen er wel uit. Leerlingen hadden ook heel charmante oplossingen gevonden. De resultaten vielen echt mee. Er was echter een perfecte discriminatie. Leerlingen die de opgave slecht hadden gemaakt, hadden ook een slecht cijfer voor het examen en, omgekeerd, leerlingen met een goed examen hadden de opgave ook goed. De meetkundeopgave uit het tweede tijdvak was heel mooi. Leerlingen genieten daarvan.

Tussendoor eerst even iets over Cabri-Géomètre

In de Profi-pakketjes wordt royaal gebruikgemaakt van het computerprogramma Cabri Géomètre. Dit van oorsprong Franstalige programma wordt inmiddels door Texas Instruments in een Engelse versie uitgebracht. Met het programma kunnen (vlakke) meetkundige constructies worden gemaakt. Het meest spectaculaire is de mogelijkheid om figuren te veranderen simpelweg door met de muis hoekpunten of lijnen te verslepen. Daardoor worden allerlei wetmatigheden zichtbaar die anders op puur toeval lijken te berusten. Dit biedt de leerlingen de mogelijkheid zelf op onderzoek uit te gaan.

Kan Voortgezette Meetkunde zonder Cabri?

Paul: Het programma dwingt leerlingen om duidelijk te zijn. Je moet precies je objecten definiëren. 'Dat is een los punt en dat een losse lijn, maar dat punt is het snijpunt van die twee lijnen.' Je moet dus allerlei afhankelijkheden tussen objecten expliciet maken.

Wil: Door het programma krijg je ook de behoefte om een stuk papier te pakken en een bewijs te leveren. Het wordt een probleem van jezelf.

Paul: Dat de conflictlijn van een punt en een lijn een parabool wordt, vind je niet zomaar aan de hand van twee getekende punten. Daar heb je echt Cabri voor nodig.

Leerlingen bedenken ook zelf situaties. Dat lijnstuk in de cirkel bijvoorbeeld hebben ze uitgeprobeerd met Cabri. Trouwens, daar kwam Cabri ook niet uit.

Je moet wel met het programma leren omgaan. Je moet het iedere keer weer even opnieuw leren.

Hoeveel tijd heb je nodig om het programma goed te leren kennen?

Paul: Zelf had ik een uur nodig. Bij leerlingen zie ik grote onderlinge verschillen. Het programma heeft de narigheid dat je moeilijk kunt achterhalen wat een leerling onderweg fout heeft gedaan. Misschien moeten we het meer doen. Als leerlingen het thuis konden doen, zouden we het zeker vaker gebruiken.

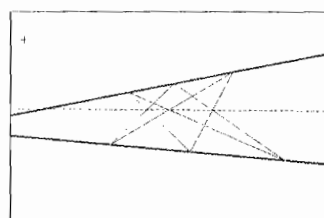
Wil: Ik vind het een moeilijk te bedienen programma. Ik heb gewoon met de leerlingen meegedaan. Ik ging langzamer.

Is het geen nagemaakte meetkunde op het beeldscherm?

Paul: Zeker niet. Leerlingen moeten daarnaast ook nog met potlood en papier aan de gang. Cabri levert vermoedens op. Ik verbaas me erover dat leerlingen het zo leuk vinden. Want je hebt het eigenlijk nergens over. Je bent alleen maar met meetkunde bezig.

Wil: Met Cabri is de meetkunde praktisch, praktischer dan integraalrekening. Het is mooi, want het verleidt tot uitspraken die vanzelfsprekend lijken. En dat blijkt dan helemaal niet zo te zijn. Dat moet je dan achteraf ook nog laten zien.

Paul: Het levert verwondering. Drie punten die zomaar op een rechte lijn blijken te blijven liggen, zonder dat daar een directe reden voor is. Zoals bijvoorbeeld bij de stelling van Pappus. Cabri dwingt je daarvoor een analyse te geven.



Stelling van Pappus

Nog eens, kan Voortgezette Meetkunde zonder Cabri?

Paul: Nee. Het is zeker heel belangrijk in het studiehuis. Leerlingen kunnen echt meetkundig onderzoek doen. Wiskunde is voor een deel zoeken.

Wil: Nee. Het biedt de mogelijkheid om van de standaardrecepten af te komen. Al moeten we dan niet te lang bij die koordenvierhoeken blijven hangen, want die stof is erg beperkt. □