Het domein CONTINUE DYNAMISCHE MODELLEN maakt deel uit van het nieuwe programma van de N-profielen van het VWO. Na veel discussie toch weer differentiaalvergelijkingen in de klas? **Michiel Doorman** en **Paul Drijvers** schetsen de sfeer van het nieuwe domein.

Continue dynamische modellen

Inleiding

Tijdens het werken aan een opgave uit het pakket met de titel *Continue dynamische modellen* op één van de Profi-proefscholen ontstaat een korte dialoog tussen een leerling en de docent. Hieronder volgen eerst de opgave en een fragment van die discussie.

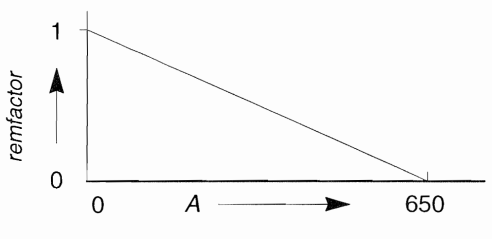
In het exponentiële model $\frac{dA}{dt} = c \cdot A$ wordt nu een remfactor ingebouwd:

$$\frac{dA}{dt} = c \cdot A \cdot \mathit{remfactor}.$$

Deze remfactor moet aan drie voorwaarden voldoen:

- Als $A \approx 0$, dan *remfactor* ≈ 1, want dan vindt nog nauwelijks remming plaats.
- Als $A \approx 650$, dan *remfactor* ≈ 0, want dan is er nauwelijks groei meer.
- Naarmate A dichter bij het maximum van 650 komt, neemt de groei af.

Het eenvoudigste is om aan te nemen dat *remfactor* een lineaire functie van A is:



1 a. Geef een formule die aangeeft hoe *remfactor* onder deze veronderstellingen van A afhangt.

b. Een iets andere manier om tegen de remfactor aan te kijken, is de volgende.
De groei van A is niet alleen evenredig met A zelf, maar ook met het relatieve aantal nog beschikbare plaatsen, dus het aantal nog beschikbare, vrije plaatsen per cm^3 gedeeld door de maximale capaciteit.
Ga na dat dit tot dezelfde formule voor *remfactor* leidt.

Een leerling loopt kennelijk vast bij 1b, en zoekt hulp bij de docent.

leerling: *Wat moet ik nu doen?*
docent: *Doen wat er staat...*
leerling: *Wat staat er dan?*
docent: *Lees nog eens vanaf 'dus ...'.*
leerling: *... het aantal beschikbare plaatsen ...*
docent: *Wat is dat?*
leerling: *650 min eh ... A.*
docent: *Ga nu verder.*
leerling: *... gedeeld door 650 ...*

Dit leidt tot de goede formule.

Bovenstaande opgave en observatie geven een indruk van het domein CONTINUE DYNAMISCHE MODELLEN in de klas. In dit artikel schetsen we de voorgeschiedenis van dit onderwerp. Vervolgens gaan we in op de uitwerking ervan in het Profi-project.

Voorgeschiedenis

De geschiedenis van differentiaalvergelijkingen in het VWO-programma kenmerkt zich door ups en vooral downs. Bij de invoering van de mammoetwet in 1968 verschenen de differentiaalvergelijkingen op het toneel. De manier waarop het onderwerp in de loop van de jaren (ook in examens) gestalte kreeg, stemde weinigen tevreden. Het oplossen van een differentiaalvergelijking bleef voor veel leerlingen een ondoorzichtige truc. Aan toepassingen kwam men in het algemeen niet toe.
In 1987 en 1988 stond het onderwerp 'in de ijskast', terwijl een commissie van de NVVW zich bezon op een nieuwe interpretatie. Die heeft niet veel aan de praktijk veranderd. Vervolgens stelde de Studiecommissie Wiskunde B in 1994 voor om differentiaalvergelijkingen te laten vallen.
Terwijl de vakontwikkelgroep juist weer aan een terugkeer begon te denken, besloot de staatssecretaris na het slecht verlopen CSE van 1996 dat differentiaalvergelijkingen wederom niet op het examen getoetst worden. Een heikel onderwerp, kennelijk ...

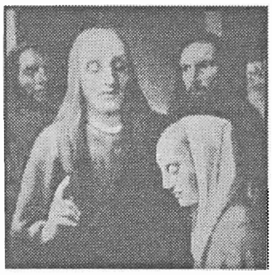
De vakontwikkelgroep

De plannen van de vakontwikkelgroep voorzagen in een domein CONTINUE DYNAMISCHE MODELLEN van veertig studielasturen voor de profielen N&G en N&T van het VWO. Een nieuw domein, een nieuw geluid; immers, de vakontwikkelgroep streefde naar aandacht voor modelleren en benadrukte het belang van een toegepast kader waarin de analyse wordt gepresenteerd. Tevens zou dit domein zich lenen voor een discreet-numerieke aanpak, die aan de continue methode kan voorafgaan. Dankzij de profilering zou kunnen worden aangesloten bij de kennis die de leerlingen hebben van vakken waaruit de probleemsituaties afkomstig zijn, zoals natuurkunde en biologie. Ten aanzien van het algebraïsch oplossen van differentiaalvergelijkingen stelde de vakontwikkelgroep zich terughoudend op: men zou zich beperken tot differentiaalvergelijkingen van de typen $y' = c \cdot y$ en $y'' = c \cdot y$.

De Profi-experimenten

In het schooljaar 1996-1997 hebben in klas VWO 5 van twee scholen experimenten met het nieuwe domein plaatsgevonden. Daartoe is het pakket '*Continue dynamische modellen*' ontwikkeld, dat nauw aansluit bij de ideeën van de vakontwikkelgroep. Een in het oog springende afwijking hiervan vormt het uitbreiden van het 'repertoire' van standaardmodellen met de differentiaalvergelijkingen $y' = c \cdot (y - k)$ en $y' = c \cdot y \cdot (1 - y/M)$. Profi vond één type van de eerste orde en één van de tweede orde toch wat mager. Naast deze modellen kunnen ook andere differentiaalvergelijkingen aan de orde komen, maar die kan de leerling dan niet exact oplossen.
Saillant is het feit dat de leerlingen op het moment dat ze aan dit pakket werken nog geen integraalrekening hebben gehad. Vanwege het ontbreken van algemene exacte oplosmethoden is dat geen bezwaar.
De volgende voorbeelden geven een indruk van de onderwerpen die in het pakket aan de orde komen.

De Emmausgangers

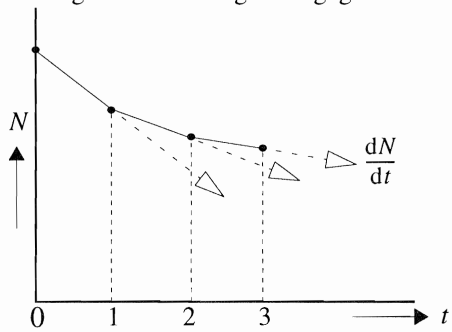


Het schilderij 'de Emmausgangers' is geschilderd door de 'meestervervalser' Van Meegeren. Een tijd lang werd het gezien als een echte Vermeer. Van andere vervalsingen was men snel overtuigd dat het geen Vermeer betrof. Voor dit schilderij was echter een speciale methode nodig, gebaseerd op radioactief verval van verfstoffen, om iedereen te overtuigen.
Deze context leidt in het pakket tot de eerste differentiaalvergelijking. De vergelijking wordt nog niet opgelost; er wordt alleen mee gerekend. In een later hoofdstuk komt deze vergelijking terug en wordt de oplossing met de methode van Euler benaderd.

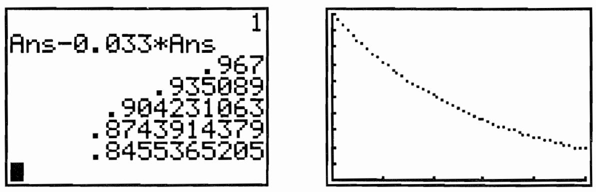
De methode van Euler is gebaseerd op het principe dat een differentiaalvergelijking de helling in een punt bepaalt. De grafiek van de oplossing wordt dan benaderd door vanuit dat punt een stukje die richting te volgen om zo een nieuw punt te vinden. Vervolgens bereken je daar weer de helling, enzovoort. De differentiaalvergelijking die bij het radioactief verval van de Emmausgangers een rol speelt is:

$$\frac{dN}{dt} = -0.033\,N$$

Hierin stelt N het aantal aanwezige radioactieve loodatomen (in grammen) voor, en t de tijd (in jaren).
Stel nu dat er oorspronkelijk, op $t = 0$, één gram lood in de verf zat, ofwel $N(0) = 1$. De differentiaalvergelijking zegt nu dat de helling in (0, 1) gelijk is aan -0.033. Als je die richting nu één jaar volgt, blijkt dat $N(1) \approx 0.967$. Zo ontstaat een benadering van de grafiek van N. Dit principe wordt grafisch als volgt weergegeven:



Met de grafische rekenmachine kun je zo'n proces doorrekenen. Hierbij kun je handig gebruikmaken van Ans, de variabele die in de grafische rekenmachine het antwoord van de vorige berekening voorstelt.
Je begint met het invoeren van de beginwaarde van de differentiaalvergelijking. Vervolgens geef je in een rekenopdracht aan hoe je de volgende waarde berekent met behulp van Ans. Als de laatst berekende hoeveelheid gelijk is aan Ans, dan is de helling daar gelijk aan:
-0.033*Ans, en dus benader je de hoeveelheid voor 1 tijdstap verder met: Ans – 0.033*Ans.
Door op Enter te drukken, kun je dit recept een gewenst aantal keer herhalen. Zo vind je snel dat na zo'n twintig jaar de hoeveelheid lood gehalveerd is. Het is niet ingewikkeld om een klein programmaatje te schrijven dat deze getallen in een grafiek zet. Hieronder staat het resultaat van rekenen met Ans en de bijbehorende grafiek:



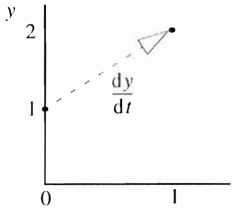
Deze werkwijze geeft snel een beeld van de oplossingsgrafiek van iedere differentiaalrekening. De methode van

Euler is daarom een krachtig hulpmiddel. Bovendien past de aanpak goed in de analyselijn van Profi, waarin ook bijvoorbeeld hellingen en oppervlaktes eerst in discrete situaties benaderd worden, voordat een algebraïsche techniek geleerd wordt. Algebraïsche technieken zijn vaak minder inzichtelijk en verleiden tot algebraïsche activiteiten die in een te vroeg stadium de aandacht voor zich opeisen ten koste van de aandacht voor de concepten.

Het getal e

In bovenstaand voorbeeld geeft de grafiek aanleiding tot het vermoeden dat er sprake is van exponentiële afname. Het aardige is dat hier een verband zit met een limiet die de leerlingen krijgen bij voortgezette analyse. Nemen we namelijk een eenvoudig geval, de differentiaalvergelijking $y' = y$ met $y(0) = 1$.

Nu wordt de methode van Euler toegepast om $y(1)$ te bepalen. Uit de differentiaalvergelijking volgt $y'(0) = 1$ en een ruwe benadering is om nu in één stap te concluderen dat $y(1) \approx 1 + 1 = 2$.



Het ligt voor de hand om hier kleinere stappen te zetten, bijvoorbeeld met stapgrootte 0.1. Dat geeft:

$$y(0.1) \approx 1 + 0.1 * 1 = 1.1.$$

Met Ans wordt dit Ans + 0.1*Ans. Tien keer op Enter drukken geeft ongeveer 2.358. Een betere benadering krijg je met nog kleinere stapjes. Echter, bij een stapgrootte van 0.01 moet je al honderd keer op Enter drukken. Het programmaatje is dan sneller en geeft als benadering 2.705. Uiteindelijk lijkt het getal in de buurt van e te komen. Uitschrijven van de berekening en slim ontbinden in factoren geeft echter (bij stapgrootte 0.1):

$$y(0.1) \approx 1 + 0.1$$
$$y(0.2) \approx (1 + 0.1) + 0.1 * (1 + 0.1) = (1 + 0.1)^2$$
$$\dots$$
$$y(1) \approx (1 + 0.1)^{10} \approx 2.358$$

Een betere benadering krijg je met stapgrootte 0.01:
$y(1) \approx (1 + 0.01)^{100} \approx 2.705.$
Of: $(1 + 0.000001)^{1000000} \approx 2.71828.$
Zo kun je de limiet herkennen die bij voortgezette analyse bewezen wordt:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

De Zuiderzee

Nadat de differentiaalvergelijking $y' = c \cdot y$ in het algemeen is opgelost, komt de opgave aan bod, die in iets andere vorm te vinden is in De Gee (1994) (zie kader).

In 1932 werd de Zuiderzee afgesloten door de Afsluitdijk. Zo ontstond het IJsselmeer. Als gevolg daarvan daalde het zoutgehalte van het water in het IJsselmeer. Voor deze daling kun je een model opstellen.
Noem $Z(t)$ het zoutgehalte (in kg/m^3) t jaar na 1932.
Jaarlijks stroomt S m^3 water via de IJssel het meer in. Dit water heeft, naar wij aannemen, een constant zoutgehalte van a kg/m^3.
Evenveel water verlaat jaarlijks het meer via sluizen in de Afsluitdijk. Dit water heeft, aangenomen dat het zich goed gemengd heeft met de rest van het meerwater, een zoutgehalte van $Z(t)$.

a. Hoe groot is de hoeveelheid zout die jaarlijks het IJsselmeer instroomt?
b. Jaarlijks verlaat via de sluizen $S \cdot Z(t)$ kg zout het meer. Verklaar dit.
c. Als V het volume van het IJsselmeer in m^3 voorstelt, dan is de daling van de totale hoeveelheid zout in het meer gelijk aan

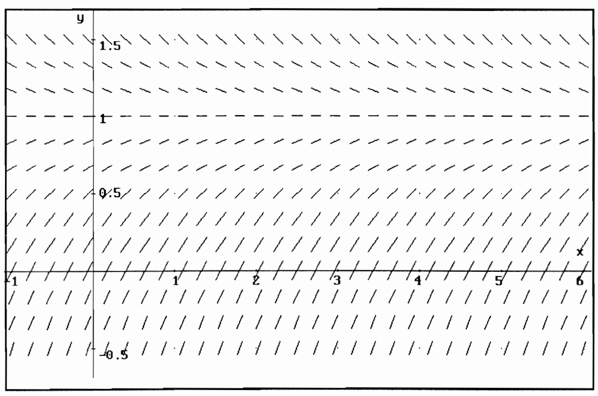
$$V \cdot \frac{dZ}{dt}.$$

Tot welk groeimodel leidt dit?
d. Verwerk de volgende gegevens in het model: $V = 13 \cdot 10^9$ m^3, $S = 13 \cdot 10^9$ m^3/jaar, $Z(0) = 5.9$ kg/m^3 en $a = 0.1$ kg/m^3.

Het volgen van dit modelleerproces vonden de leerlingen een hele klus. De verschillende waarden en dimensies van de constanten maken het nog lastiger. Vandaar dat die pas in laatste instantie in het model worden verwerkt. Als alles goed gaat, ontstaat het model

$$\frac{dZ}{dt} = -\frac{S}{V} \cdot Z + a \cdot \frac{S}{V}.$$

Nu even terug naar de wiskunde: neem voor het gemak S gelijk aan V en a gelijk aan 1. Dat geeft, afgekort,
$Z' = -Z + 1.$
Eerst maar eens ter oriëntatie een richtingsveld:



Het richtingsveld lijkt veel op de plaatjes die eerder verschenen bij de differentiaalvergelijking $y' = c \cdot y$, zij het dat de oplossingen niet naar de horizontale as, maar naar de lijn $y = 1$ 'toekruipen'. Kennelijk zal het zoutgehalte

zich onafhankelijk van het aanvankelijke gehalte stabiliseren op 1 kg/m^3. Dan ligt het voor de hand om het richtingsveld naar beneden te schuiven: definieer $W = Z - 1$. In de context stelt W dan niet het zoutgehalte in het IJsselmeer voor, maar de afwijking van het zoutgehalte ten opzichte van dat van het instromende rivierwater.
Deze substitutie geeft: $W' = -W$. Van deze vergelijking zijn inmiddels alle oplossingen bekend en hieruit zijn ook alle oplossingen van de vergelijking voor Z af te leiden:

$$Z(t) = 1 + A \cdot e^{-t}$$

De generalisatie naar het geval met andere waarden voor S, V en a is niet moeilijk meer.

Logistische groei

Het voorbeeld dat beschreven staat in de inleiding leidt tot 'de logist', de differentiaalvergelijking voor geremde of logistische groei, die in het algemeen de volgende gedaante heeft:

$$y' = c \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{m}\right).$$

Andere contexten, zoals die van de toename van het aantal gistcellen in bakkersgist en de ontwikkeling van de populatie van de Verenigde Staten, leiden tot hetzelfde model. Met de methode van Euler kunnen oplossingen worden benaderd, terwijl het richtingsveld weer een globaal beeld geeft.
Het oplossen van de logistische differentiaalvergelijking is een probleem, zolang de leerling niet beschikt over primitiveringstechnieken en breuksplitsing. Daarom wordt in het pakket een truc gebruikt: voor $y \neq 0$ definiëren we u door $u = \frac{M}{y}$.

Substitutie geeft dat voor u geldt: $u' = -c \cdot (u - 1)$, en van deze laatste zijn de oplossingen inmiddels bekend.
Voor N&G-leerlingen voert deze substitutie te ver. Ze kunnen terugvallen op de formulekaart, waarop de oplossing te vinden is. Voor N&T is de substitutie een aardige methode ter verrijking.

Conclusie

De ervaringen met CONTINUE DYNAMISCHE MODELLEN zijn in grote lijnen positief. Het domein biedt tal van toepassingen (zie bijvoorbeeld de boeken van Burghes en De Gee), die zich lenen voor modelleeractiviteiten. Voor de leerlingen kunnen deze modellen echt 'gaan leven'. De dialoog in het begin van dit artikel maakt duidelijk dat leerlingen het modelleren niet eenvoudig vinden.
De discrete aanpak van de methode van Euler lijkt een conceptueel toegankelijk vertrekpunt voor het onderzoeken van oplossingen van een differentiaalvergelijking. De grafische rekenmachine is daarbij een handig instrument, zoals de PC dat is voor het tekenen van richtingsvelden.
In de klas kwamen de differentiaalvergelijkingen van de tweede orde minder goed uit de verf. Tijdgebrek leek daarvoor de belangrijkste oorzaak. Gelet op de totale omvang is de oorspronkelijke invulling te ambitieus. Daarom heeft Profi voorgesteld de differentiaalvergelijkingen van de tweede orde te laten vervallen. Met spijt natuurlijk, want juist die komen voor in belangrijke natuurkundige toepassingen zoals de slinger en de valbeweging. We troosten ons met de gedachte dat differentiaalvergelijkingen van de tweede orde misschien nog een rol kunnen spelen in praktische opdracht of profielwerkstuk.

Nog even de belangrijkste kenmerken van het domein CONTINUE DYNAMISCHE MODELLEN op een rij:
- een grote rol voor het opstellen van het model
- een numerieke aanpak van differentiaalvergelijkingen met de methode van Euler, al dan niet met gebruik van de grafische rekenmachine
- exact oplossen van slechts een beperkt aantal types differentiaalvergelijkingen:
  $y' = c \cdot y$,
  $y' = c \cdot (y - k)$ en
  $y' = c \cdot y \cdot (1 - y/M)$
- geen algemene oplosmethode zoals scheiding van variabelen
- geen differentiaalvergelijkingen van de tweede orde.

Al met al lijkt een 'fris' en inspirerend domein te ontstaan, waarin leerlingen op een boeiende manier met modelleren bezig kunnen zijn. De differentiaalvergelijkingen die op deze manier aan de orde komen, hebben betekenis voor de leerlingen en hoeven hopelijk nooit 'in de ijskast'.

Michiel Doorman en Paul Drijvers, Freudenthal Instituut, Utrecht

Literatuur

Burghes, D. N. en M.S. Borrie (1981). *Modelling with differential equations*. Chichester: Ellis Horwood.
Doorman, M. en P. Drijvers (1997). *Continue dynamische modellen*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
Gee, M. de (1994). *Wiskunde in werking*. Utrecht: Epsilon uitgaven.
Lange, J. de (1994). *Rapport studiecommissie wiskunde B*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
Profi-team (1997). *Trajectenboek wiskunde vwo profielen N&G en N&T*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
Vakontwikkelgroep Wiskunde (1995). *Advies examenprogramma havo/vwo wiskunde*. Enschede: SLO.
Weijkamp, R. (1997). *Differentiaalvergelijkingen in de nieuwe tweede fase vwo*. Nijmegen: Hogeschool van Arnhem en Nijmegen.