

De zomer is het seizoen van de internationale congressen. **Marco Swaen** bezoekt de CIEAEM-conferentie in Portugal. Hij bespreekt twee lezingen die hem bijzonder aanspreken en bovendien verband houden met de situatie in ons eigen land.

Spiegelen en kringetjes lopen onder de Portugese zon

Afgelopen zomer bezocht ik in Setubal (nabij Lissabon) het 49ste congres van de CIEAEM. Voor wie het niet weet: CIEAEM staat voor 'Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques' oftewel 'Internationale Commissie voor onderzoek naar en verbetering van het wiskundeonderwijs'. Het was een heel leerzame en plezierige week: interessante lezingen, boeiende workshops, goed-draaiende werkgroepen, volop informatie en de gelegenheid enthousiaste én aardige mensen te leren kennen. Bovendien: een gerieflijk hotel met zwembad, excursies, een vorstelijk afsluitingsdiner en dat alles aanzienlijk goedkoper dan een weekendje nascholing in eigen land.

Tot voor kort waren de congressen van de CIEAEM Frans-talig, wat nog merkbaar is aan het grote contingent Zuid-Europese deelnemers. Inmiddels wordt Engels als tweede voertaal gebruikt. In Nederland is oriëntatie op het buitenland vaak synoniem met kijken naar Engeland en Amerika. Maar op de congressen van de CIEAEM ontdek je dat er wat wiskundeonderwijs betreft nog heel wat te leren valt van landen als Italië, Hongarije, Brazilië of gewoon maar de burens België en Duitsland.

Aan de conferenties van de CIEAEM nemen mensen met allerlei achtergronden deel. Er zijn leraren uit het basis-onderwijs, het middelbaar en het hoger onderwijs. Verder is er een behoorlijk aantal lerarenopleiders en onderzoekers. Meer dan de helft van de deelnemers is vrouw en deze getalsverhouding is ook weerspiegeld in de commissies en bij de genodigde sprekers.

Het thema van de conferentie dit jaar was 'de interactie in de wiskundeles'. Het is niet mijn bedoeling een uitputtende beschrijving te geven van wat er op de conferentie allemaal gebeurd is. Ik beperk me tot twee lezingen die mij bijzonder aanspreken en die wat mij betreft ook een duidelijk verband hebben met de situatie in ons eigen land. Die twee lezingen zijn:

- PL 1 *Investigating mathematical investigations* (wiskundig onderzoek onderzoeken) van een groep Portugese onderzoekers
- PL 3 *Interaction, self-regulated learning and the process of level raising*

(interactie, zelfstandig leren en het proces van niveauverhoging) van Rijkje Dekker, Marianne Elshout-Mohr en Monique Pijls van de Universiteit van Amsterdam.

Portugal

Dat het congres in Portugal georganiseerd werd, is vooral te danken aan het élan waarmee in dit land gewerkt wordt aan verbetering van het wiskundeonderwijs. Sinds de val van de dictatuur in 1974 is er een zeer actieve vereniging van wiskundeleraren; de regionale bijeenkomsten worden alleen al door honderden leraren bezocht. Aan de verschillende universiteiten en hogescholen zitten mensen die nauw betrokken zijn bij het onderwijs, die weten wat er in andere landen gaande is, die nieuwe ideeën introduceren en ontwikkelen en wetenschappelijk onderzoek doen. In de afgelopen jaren zijn er tegen de honderd proefschriften verschenen op het gebied van de didactiek van de wiskunde.

Zoals de Portugezen praten over de vernieuwingen, is het of ze het hebben over een enorme dijk die samen gebouwd wordt, een werk verheven boven politieke machinaties, waar iedereen eendrachtig de schouders onder zet. Een veelgehoorde slagzin is 'matemática para todos' oftewel 'wiskunde voor allen', een kreet die ons niet onbekend in de oren klinkt. Veel van de Portugese ideeën komen ons trouwens bekend voor, hoewel er ook duidelijke verschillen zijn. Eén van die verschillen betreft de invulling van het vak. Voor de Portugezen is wiskunde toch veel duidelijker verbonden aan 'echte' wiskunde, dat wil zeggen wiskunde zoals die wetenschappelijk beoefend wordt. Dat werd mij ondermeer duidelijk in de eerste plenaire lezing van de conferentie.

Wiskundig onderzoek in de klas

Een groep Portugese leraren en onderzoekers presenteerde ideeën voor 'onderzoek' in de wiskundeles. Leerlingen krijgen een open vraag voorgelegd waaraan zij een bepaalde tijd werken, waarna zij verslag uitbrengen, hun resultaten bespreken en daaruit weer nieuwe vragen dis-

tilleren voor volgend onderzoek. Een 'onderzoeksvraag' die een Portugese klas van 16-17 jarigen kreeg voorgelegd, was de volgende:

Welk patroon ontdek je in:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
...

fig. 1

In het patroon zijn eindeloos veel dingen te ontdekken. Onze leerlingen zullen er sinds W12-16 ongetwijfeld in ontdekken dat naar rechts +1 en naar beneden +4 is. Portugese leerlingen ontdekten bijvoorbeeld dat als je een getal uit de derde kolom vermenigvuldigt met een getal uit de vierde kolom, je altijd een getal uit de derde kolom krijgt. Anderen viel het op dat er in de eerste en derde kolom geen kwadraten voorkomen. Zo zijn er allerlei wegen vanuit dit patroon die richting algebra leiden.

Eén 'ontdekking' van de klas werd in de presentatie niet veel nadruk naar voren gehaald. Op video zagen we een gesprek in een Portugese klas. In het patroon was een rondwandeling getekend en opgemerkt was dat die rondwandeling netto 0 oplevert.

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27

fig. 2

De rondwandeling was opgedeeld in twee kleinere wandelingen. Tevoren was er blijkbaar al ontdekt en berekend dat een rechthoekige wandeling een nettoresultaat 0 oplevert.

In een klasgesprek dat geleid wordt door de lerares is de vraag aan de orde waarom ook grilligere rondwandelingen netto 0 opleveren. Eén leerling zegt dan dat het lo-

gisch is, want 'het is symmetrisch; wat je bij de ene erbij krijgt, raak je bij de andere kwijt'. De keuze van het woord 'symmetrisch' is wat ongelukkig, maar de leerling zet duidelijk de essentiële stap om in te zien waarom in de grotere wandeling het nettoresultaat ook 0 is.

Van de twee kringen is het nettoresultaat 0. We zetten ze bij AB aan elkaar (zie figuur 3). Het gedeelte tussen A en B is dan bij beide kringen betrokken. Wat AB bijdraagt aan het resultaat van de linker, weegt precies op tegen wat BA de rechter kring kost. Bij wijze van spreken heffen AB en BA elkaar op, en zo blijft er een grote wandeling over die dan ook nettoresultaat 0 moet hebben.

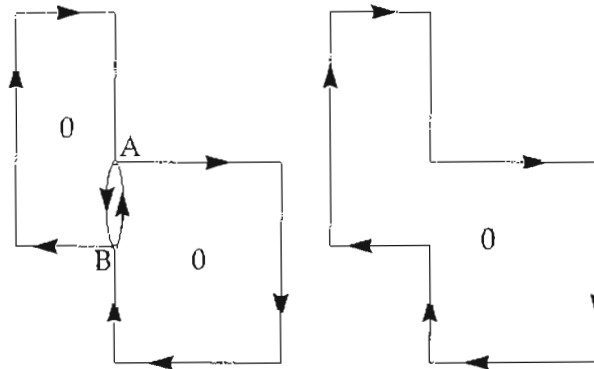


fig. 3

'Prachtig dat leerlingen zelf met dergelijke inzichten komen', dacht ik. En met mij de Portugezen die de presentatie gaven. Later vroeg ik mij wel af wat ik nou zo mooi vond aan de redenering. Om in te zien dat zo'n wandeling netto 0 oplevert, heb je dat inductie-achtige argument eigenlijk helemaal niet nodig.

Bijvoorbeeld: neem een willekeurig veld met getallen, beschouw de getallen als hoogte-aanduidingen in een berglandschap, waardoorheen je een rondwandeling maakt.

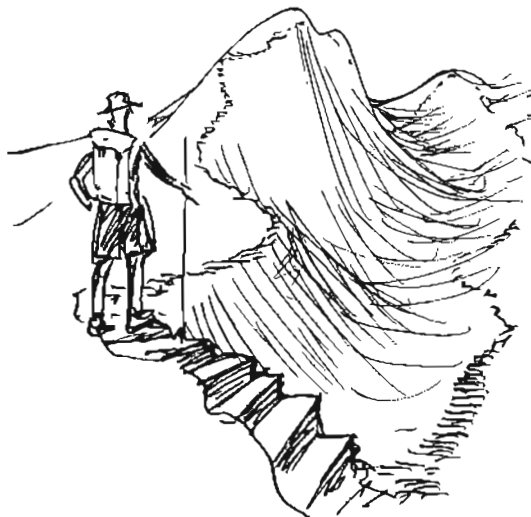


fig. 4

Van punt tot punt houd je bij hoeveel je stijgt en daalt. Het is dan volstrekt duidelijk dat je, als je terugkomt op het uitgangspunt, netto 0 meter gestegen bent.

Waarom zouden de Portugezen dan toch zo graag dit argument horen? Ik vermoed dat de lerares zich de kringeigenschap en het opdeel-argument herinnerde van een college complexe functietheorie of veldentheorie. In dat verband is het argument wel essentieel.

Haar vakkennis maakte haar alert op opmerkingen die in die richting gingen en zo stuurde zij de aanvankelijk ongerichte observaties en probeersels van de leerlingen in de richting van een onderzoek dat Grote Wiskundigen in het verleden niet zou hebben misstaan.

Matemática para todos

In Nederland heeft 'wiskunde voor allen' vooral te maken met 'welke wiskunde is van belang voor allen' en dat leidt tot een schoolwiskunde die rekenachtig en sterk toepassingsgericht is en daarmee veraf staat van de wiskunde zoals die op de universiteiten wordt beoefend.

In Portugal daarentegen – afgaande op PL 1 – is het meer de 'allen' die naar de 'wiskunde' komt. In de les op de video waren de leerlingen eventjes echte wiskundigen. Dat waarschijnlijk geen van hen dat later ook echt zou worden, hinderde niemand. En zo hoort het wat mij betreft ook. Laat ze bij de muzikles even allemaal een musicus zijn en bij Nederlands een journalist of een dichter en vooruit dan, bij economie een doortrapte ondernemer. Achteraf kunnen ze kiezen wat bij hen past en weten ze wat ze niet kiezen. Hier kiest bijna niemand een wiskundestudie.....

Interactie en niveauverhoging

De mooiste plenaire lezing was van drie Nederlanders: Rijkje Dekker, Marianne Elshout-Mohr en Monique Pijls. 'Goh, moet je daar helemaal voor naar Portugal?' zult u zich misschien afvragen. Ja, gek genoeg wel.

Een uur lang hield het drietal het tweehonderdkoppige publiek in hun ban. Alles keurig tweetalig en geen woord teveel. Achtergrond vormde de vernieuwing van de tweede fase in ons land, de veranderende rol van de leraar, het bevorderen van interactie tussen de leerlingen. Dan over het leren bij wiskunde: bij Rijkje Dekker heeft dat nog steeds iets te maken met niveauverhoging.

Wat doet dat woord ouderwets aan, we zijn het bijna vergeten na de introductie van de vierkleuren edities. Sindsdien grazen onze leerlingen immers trouw door eindeloos laagland; opgaaf na opgaaf, toets, herhaling, pluspagina, verrijking of SPA. Wie heeft het hier over inzicht, over begripsvorming, theorie of niveauverhoging?

Rijkje Dekker nog wel. Wanneer ontstaat niveauverhoging? Zij benoemt vier kernactiviteiten die tot niveauverhoging leiden. Bij al deze activiteiten is er sprake van reflectie. Het zijn:

	leerlingen:
tonen	laten elkaar hun werkwijze zien
uitleggen	leggen elkaar hun oplossingen uit

rechtvaardigen	verantwoorden/rechtvaardigen hun eigen werk en verklaring
reconstrueren	en verbeteren dan hun werk, verklaring of rechtvaardiging.

Hoe worden leerlingen tot deze kernactiviteiten gestimuleerd? Rijkje Dekker benadrukt het al heel lang: door samen te werken. Samenwerking is doorgaans gunstig voor de kernactiviteiten. Door vragen en opmerkingen als:

- Wat heb jij gedaan?
- Waarom heb je dat gedaan?
- Wat jij doet klopt niet.
- Hoe ga je het dan doen?

roept de een de kernactiviteiten bij de ander op.

Aan de hand van materiaal dat ontwikkeld werd door Monique Pijls mocht de zaal even proeven aan het leren van wiskunde. Iedere deelnemer kreeg een enveloppe uitgereikt met daarin een driehoekje, een in tweeën gevouwen (kartonnen) spiegeltje en de geschreven opdracht:

Neem de driehoek en zet het spiegelboekje eromheen. Verander de hoek tussen de twee spiegels. Kun je een verband ontdekken tussen die hoek en het aantal driehoekjes dat te zien is? Vergelijk je bevindingen met je bureu.

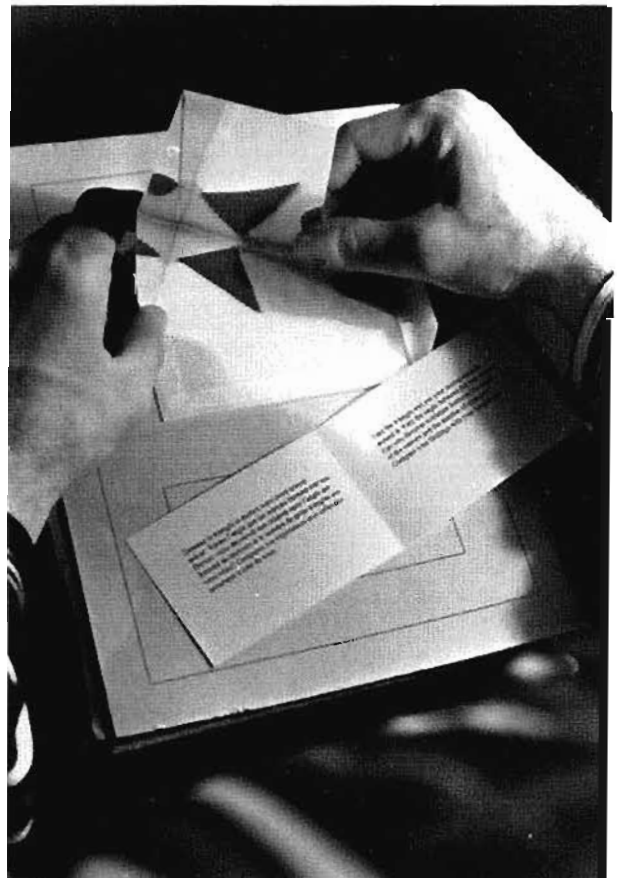


fig. 5 Foto: I. Swaen

Het procesmodel

In een gespeelde dialoog lieten Rijkje Dekker en Monique Pijls een geïdealiseerde interactie zien. Vervolgens werd deze interactie aan een analyse onderworpen door Marianne Elshout-Mohr. Zij ontwikkelde samen met Rijkje Dekker het zogenaamde 'procesmodel', gebaseerd op de vier genoemde kernactiviteiten.

Naast de kernactiviteiten is er in een dialoog van twee leerlingen die wiskunde aan het leren zijn, sprake van 'procesbegeleidende activiteiten'. Dat zijn ondermeer de opmerkingen die hierboven genoemd zijn en waarmee de ene leerling de andere stimuleert tot reflectie.

Ten slotte is er een derde categorie van activiteiten: de mentale activiteiten, die in de hoofden van de leerlingen plaatshebben en zich aan de directe waarneming onttrekken. Het mooie van het model is dat het twee verschillende perspectieven in zich verenigt, enerzijds de vakdidactische beschouwing in termen van niveaus en reflectie en anderzijds een algemeen onderwijskundige beschouwing in termen van cognitieve en regulatieve leerfuncties.

Op de vlakte of de diepte in

Zoals gezegd horen we termen als 'niveauverhoging' en 'samenwerking in (heterogene) groepen' niet zo vaak meer in Nederland. Ooit was de niveaustheorie hét ge-

spreksonderwerp in wiskundig-didactisch Nederland. Later had iedereen het alleen maar over samenwerken in heterogene groepen. In ons land rollen de modegolven gestaag aan en af; al gauw hebben we het alweer gezien. Nederlanders hebben een goede neus voor wat nieuw is, maar vaak wel een pijnlijk onvermogen door de oppervlakkige schijn heen te dringen en diepgang te bereiken. Doet iemand dat toch, dan hoor je dat ver weg, zoals deze zomer onder de Portugese zon.

Marco Swaen

Hogeschool van Amsterdam

Bernard Nieuwentijt college Amsterdam

Literatuur

Dekker, R. en M. Elshout-Mohr (1996). 'Zelfstandig leren doe je niet alleen'. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs Panama-Post* 15(2), pp. 20-27.

Pijls, M.H.J. (1996). *Spiegeltaal. Over de ontwikkeling van een lesboekje voor de bovenbouw VWO*. Amsterdam, Universiteit van Amsterdam WINS.

Programma CIEAEM 1997. Uitgave van de Escola Superior de Educação, Setúbal. (In de loop van 1998 zullen de handelingen van het congres verschijnen.)

De wiskunde E-brief: een digitaal en interactief forum voor de wiskundedocent

In oktober 1996 werd nr. 0 van de elektronische WiskundeE-brief verstuurd met een oplage van ruim tien exemplaren. Eind februari van dit jaar werd nummer 9 verstuurd naar ruim vijftig adressen. Vanaf nummer 10 komen de bijdragen van lezers echt los, eerst vooral over het 'nieuwe' onderbouwprogramma, later onder andere over gebruik en misbruik van de rekenmachine en beoordeling van werkstukken.

De WiskundeE-brief nr. 19 wordt eind april verstuurd naar ruim honderd abonnees. Bij de nummers 20 tot en met 27 stonden de eindexamens centraal. Dankzij de medewerking van een paar actieve collega's konden verslagen van een aantal regionale examenbesprekingen zeer snel verspreid worden. Vlak daarna kwam de enquête over de tweede fase die naar circa 150 adressen is gestuurd en een paar opmerkelijke uitkomsten opleverde. Op dit ogenblik zijn er een kleine tweehonderd abonnees.

De WiskundeE-brief is in de eerste plaats gericht op wiskunde docenten in het voorgezet onderwijs. Bedoeling is elkaar snel op de hoogte te houden van, en meningen uit te wisselen over voor hen relevante zaken, met enige na-

druk op ICT en de tweede fase. In het afgelopen jaar zijn, onder meer, de volgende onderwerpen aan de orde geweest:

- verslagen van de examenbesprekingen
- een enquête over de invoering van de tweede fase
- een discussie over de invoering van computeralgebra bij de wiskunde
- vooraankondigingen uit *Euclides* en de *Nieuwe Wiskrant*.

Naast het binnenhalen van veel actuele informatie kunt u ook uw eigen mening en ervaringen naar voren brengen in een digitale discussie met uw collega's.

Het abonnement is gratis. U kunt zich aanmelden via één van onderstaande E-mail adressen.

De redactie wordt gevormd door Jos Andriessen en Gerard Koolstra.

Bijdragen zijn welkom via andriess@concepts.nl of gerardk@xs4all.nl.

Oude nummers zijn te bekijken op:

http://www.telebyte.nl/NotreDame/wb/wb_main.htm.