Een nieuw leerstofonderdeel voor de vierde klas in de Tweede Fase is Discrete Analyse. Met de komst van dit domein zijn de rijen weer terug in het curriculum en krijgt de differentiaalrekening een uitvoerige discrete aanloop. **Monica Wijers** schrijft erover.

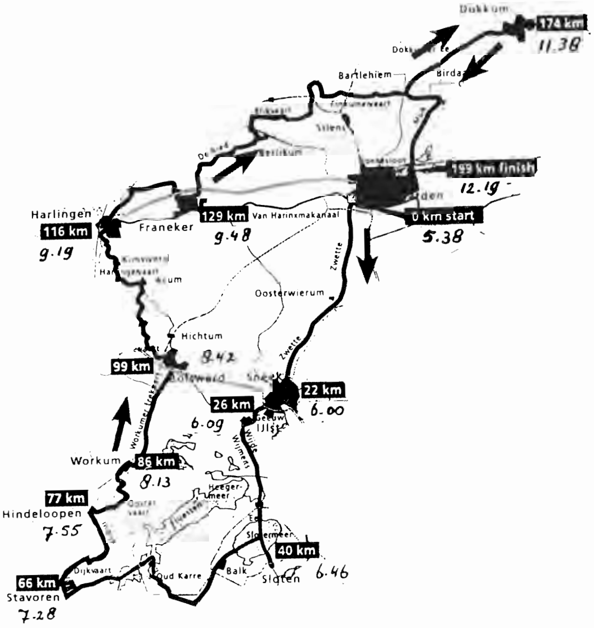
Discrete Analyse in de klas

Inleiding

In het Profi-project is de afgelopen twee jaar door het Freudenthal Instituut materiaal ontwikkeld, met name voor de nieuwe wiskunde B in de profielen N&G en N&T van het VWO. Ook voor enkele nieuwe onderdelen uit het gemeenschappelijk deel en de M-profielen is materiaal geschreven. Dit materiaal is op twee proefscholen uitgeprobeerd en inmiddels heeft daar de eerste lichting Profileerlingen een experimenteel B-examen gedaan.
Een jaar na de start van het Profi-project zijn bij het APS de zogenaamde 'Profi-volgscholen' van start gegaan. Deze scholen zijn in 4 VWO begonnen met enkele kleinschalige experimenten. Ze gebruiken daar, naast hun gewone boek, een aantal PRINT-opdrachten die ontwikkeld zijn in het kader van het project 'Informatietechnologie in het studiehuis wiskunde' en de twee pakketjes *Machtige Functies* en *Discrete Analyse*. Over dat laatste gaat dit artikel.

Wat is discrete analyse?

In het gemeenschappelijk deel is gekozen voor een discrete aanpak van het begin van het differentiëren. Wat dit inhoudt, wordt beschreven aan de hand van een overzicht van de inhoud van het pakket.
Leerlingen hebben in de basisvorming het gedrag van allerlei typen verbanden bestudeerd, meestal vanuit de grafiek, gekarakteriseerd met begrippen als: stijgend/dalend, steeds sterker stijgend/dalend, periodiek. Ook hebben ze tabellen gebruikt om de veranderingen numeriek te karakteriseren. Ze kennen eigenschappen als: 'Bij een lineair verband komt er steeds evenveel bij' en 'Bij een exponentieel verband vermenigvuldig je steeds met hetzelfde getal'. Misschien is er zelfs aandacht besteed aan het feit dat een tweedegraads verband gekarakteriseerd wordt doordat de rij van tweede verschillen constant is. In 4 VWO wordt hierop aangesloten, het bestuderen van veranderingsgedrag vormt ook hier het uitgangspunt.
Het pakketje *Discrete Analyse* start echt discreet: met rijen. Rekenkundige en meetkundige rijen staan daarin centraal. In dit deel van het pakketje worden ook de taal en notaties ontwikkeld die bij rijen nodig zijn. Rijen worden weergegeven in tabellen, ook op de grafische rekenmachine. Ze worden bestudeerd door bijvoorbeeld de verschillen tussen elk tweetal opeenvolgende termen te bepalen en ze worden beschreven – indien mogelijk – met verschillende typen formules. Belangrijk daarbij is het werken met recursieve formules ofwel recurrente betrekkingen.
Een voorbeeld van zo'n recursief voorschrift voor een meetkundige rij is: $t_0 = 4$ en $t_{n+1} = 1.5 \times t_n$. De toename, in dit geval een groeifactor, is in zo'n voorschrift expliciet te herkennen.
Som- en verschilrijen krijgen apart aandacht. Verschilrijen worden gebruikt als middel om veranderingsgedrag van een rij te karakteriseren en om bijvoorbeeld een formule bij een rij te vinden. Er komen naast abstracte situaties ook concrete situaties voor. Een voorbeeld hiervan speelt zich af in de context van de Elfstedentocht van 4 januari 1997.



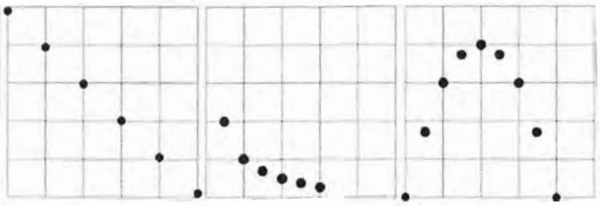
De Elfstedentocht met doorkomsttijden van de kopgroep

Bij deze gegevens moeten de leerlingen een tabel maken met achtereenvolgens kolommen voor de plaats, de stempeltijd, de afgelegde afstand vanaf Leeuwarden en de verschilrij van die afstanden. Vervolgens kijken ze dan naar de rij van *gemiddelde verschillen*. Die geeft in dit geval meer betekenisvolle informatie dan de verschilrij, omdat de stapgrootte van de tijd niet constant is.

c. Maak nu een kolom van gemiddelde verschillen.
TIP: maak een extra verschilkolom voor de tijd.
d. Wat stellen deze gemiddelde verschillen voor?
e. Tussen welke steden lag de gemiddelde snelheid het hoogste? Hoe hoog was die snelheid?
f. Wat was de laagste gemiddelde snelheid en waar werd die gereden?
g. Wat was de gemiddelde snelheid over de hele route gerekend?

Het tweede deel van het pakket bevat de discrete opstap naar differentiëren. Allereerst wordt het toenamendiagram geïntroduceerd als middel om veranderingen grafisch weer te geven. Zo'n diagram wordt gemaakt op basis van een rij getallen. Bijvoorbeeld een discreet 'bekeken' grafiek. Dat wil zeggen dat niet alle punten 'meedoen'. Er wordt een selectie gemaakt door ergens op de grafiek te beginnen en vervolgens een vaste stapgrootte van x te kiezen. De zo geselecteerde punten zijn de basis voor het toenamendiagram. Zoals in de volgende opgave:

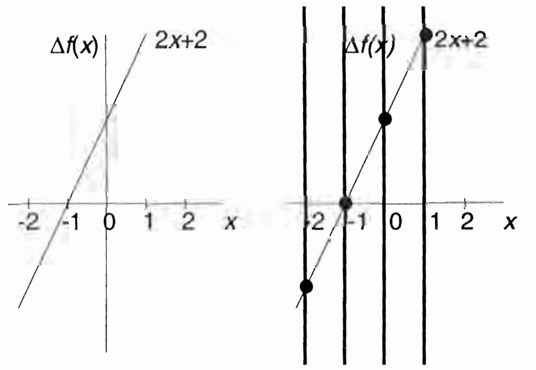
Teken toenamendiagrammen bij de volgende grafieken. Let steeds op de gegeven stapgrootte. Maak eventueel eerst een tabel, met daarin een kolom voor de verschilrij.



stapgrootte = 1 *stapgrootte = 0.5* *stapgrootte = 0.5*

Bij elke grafiek kunnen op deze manier toenamendiagrammen worden gemaakt om de mate van verandering in beeld te brengen. Hoe zo'n toenamendiagram er precies uitziet, hangt af van de gekozen stapgrootte en het beginpunt. Omgekeerd levert een toenamendiagram informatie over de onderliggende grafiek. Tenminste..... gedeeltelijk. Wat er tussen de geselecteerde punten precies gebeurt, is onbekend, evenals de exacte (functie)-waarden. Door het verkleinen van de stapgrootte wordt de informatie nauwkeuriger, maar een nadeel is dat het aflezen van de toenamendiagrammen moeilijker wordt. Naast toenamendiagrammen – om veranderingen grafisch weer te geven – worden er tabellen gebruikt om de waarden van de rij $\Delta f(x)$ numeriek weer te geven. Daarmee is een verband gelegd met de rijen uit het eerste deel van het pakketje. Net als in dat deel worden ook nu bij de verschilrijen formules gemaakt. Bij het werken met discreet gemaakte functies moet je daarmee wel voorzichtig zijn: er komt informatie bij. De volgende tekst uit het lesmateriaal gaat daar over:

Wat betekent $\Delta f(x) = 2x + 2$?
De grafiek geeft *alle* waarden van $\Delta f(x) = 2x + 2$ gebaseerd op $\Delta x = 1$.



$x = 1$ geeft 4. Dat wil zeggen: de toename op het interval [1,2] bedraagt 4.
$x = 1.25$ geeft 4.5. Dat wil zeggen: de toename op het interval [1.25, 2.25] bedraagt 4.5.
De grafiek of de formule geeft teveel. Dat komt omdat we hier bij het vinden van de formule weer gedaan hebben alsof we de functies helemaal, continu, bekijken. Dat is niet zo. De formule die je gevonden hebt, is alleen goed voor de punten die horen bij een stapgrootte $\Delta x = 1$. Je moet er de bruikbare waarden dus nog uitvissen.
Je legt als het ware een raster over de grafiek, waarmee je de juiste punten aanwijst. In de tabel 'bepaal' je die waarden door de juiste beginwaarde van x en de juiste stapgrootte te kiezen.

Zoals eerder gezegd, levert het verkleinen van de stapgrootte meer informatie over de mate van verandering. Het nadeel van de microscopisch kleine afmetingen van de toenames valt op te vangen door bijvoorbeeld de schaal van het toenamendiagram te vergroten. Een ander nadeel van het veranderen van de stapgrootte is dat elke stapgrootte een andere rij waarden voor $\Delta f(x)$ oplevert en dus ook een andere formule voor die rij. Zo lijkt het op het eerste gezicht alsof het veranderingsgedrag van een discreet bekeken functie geen enkel patroon vertoont en daarmee dus geen betrouwbare informatie over de oorspronkelijke functie kan bieden. Uit de continue analyse echter weten we dat de afgeleide functie het veranderingsgedrag van de oorspronkelijke functie eenduidig beschrijft. Hier komt de rij van gemiddelde verschillen terug. Net als in het voorbeeld van de elfstedentocht, kan ook hier de invloed van de stapgrootte uitgeschakeld worden door de waarden van de verschillen $\Delta f(x)$ te delen

door de stapgrootte Δx. Daarmee worden de resultaten stabiel. Via een discrete weg is nu het differentiequotiënt $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ ingevoerd. Aan dit differentiequotiënt wordt betekenis gegeven door de hellinggrafiek te introduceren. Tenslotte worden toenamendiagram en hellinggrafiek met elkaar in verband gebracht en wordt onderzocht welke informatie een toenamendiagram en welke een hellinggrafiek over de oorspronkelijke functie levert. Op basis van een toenamendiagram en een punt van de grafiek wordt geprobeerd de grafiek van de oorspronkelijke functie zo goed mogelijk te reconstrueren. Vervolgens gebeurt dat ook nog eens vanuit een punt en met de hellinggrafiek.
Het werken met discrete stappen, ook bij functies, blijft de basis. De stap naar de limiet van het differentiequotiënt wordt pas later gezet. Zo wordt een fundament gelegd voor de discrete modellen die in de wiskunde A-achtige onderdelen een belangrijke rol gaan spelen.

Onderzoekend leren

Met het studiehuis in aantocht ligt het voor de hand om in nieuw te ontwikkelen materiaal een vorm te kiezen die voorbereidt op de vaardigheden die in het studiehuis belangrijk worden. Zelfstandig leren is daarin steeds een sleutelbegrip. We hebben niet gekozen voor een opzet met studiewijzers. Belangrijk is dat leerlingen de gelegenheid hebben om zelf het initiatief te nemen. We hebben er daarom voor gekozen een aantal onderzoeksopdrachten in het pakket op te nemen. Het gegeven dat de praktische opdrachten een belangrijke plaats gaan krijgen in het schoolexamen, is een extra argument voor deze keuze.
Aan het eind van elk hoofdstuk staat een grote onderzoeksopdracht, waarbij leerlingen zelf een plan moeten maken, dat uitvoeren en erover rapporteren. Ook zijn er kleine onderzoeksopdrachten. Die opdrachten zijn vaak open geformuleerd en bieden daarmee de mogelijkheid tot zelfstandig leren. Een voorbeeld uit het hoofdstuk over rijen:

> De verschilrijen van de rij van de machten van 2 en die van de rij van kwadraten blijken interessante eigenschappen te hebben.
> De vraag is hoe dat zit met verschilrijen van rijen als $t_n = 3^n$ of 4^n of 10^n (je kunt er zelf een aantal kiezen). En hoe het zit met verschilrijen van andere machten zoals $t_n = n^3$ en n^4 (enzovoort).
> Opdracht: Onderzoek voor een aantal van de genoemde rijen welke eigenschappen de verschilrij heeft, maak indien mogelijk formules voor deze verschilrij.
> Bekijk bij 'machtrijen' ook de verschilrij van de verschilrij, enzovoort.
> Zie je een verband tussen de rij en zijn verschilrij?
> Maak een kort overzicht waarin je de gevonden resultaten weergeeft.

Dergelijke opdrachten kunnen vaak ook gebruikt worden om te differentiëren in niveau tussen leerlingen. De mate van gedetailleerdheid van de uitwerkingen en de diepgang van het onderzoek ligt immers niet bij voorbaat vast. Sommige leerlingen zullen zich meer uitgedaagd voelen dan andere en meer de diepte ingaan. Met het opnemen van deze open problemen kom je soms als leerling in de situatie dat een probleem op het randje van je mogelijkheden ligt. Het ontdekken van regelmaat en in het bijzonder het maken van formules bij de verschilrijen van machtrijen wordt gauw complex. Het kan zijn dat een leerling daarbij tot aan de grens van zijn of haar kunnen moet gaan, of er zelfs helemaal niet meer uitkomt. Een makkelijke oplossing is natuurlijk om al dit soort problemen dan maar uit het pakketje te halen of zodanig in te perken dat elke leerling ze aankan. Als alle hobbels worden gladgestreken blijft er echter voor een leerling weinig zelfstandig meer te leren. Natuurlijk moet wel duidelijk zijn, bijvoorbeeld in een docentenhandleiding, om welke opdrachten het gaat en kunnen er hints opgenomen worden.
Een ander uitgangspunt bij het pakket is dat het gebruik van de grafische rekenmachine (GR) erin is opgenomen. Het gebruik van technologische hulpmiddelen, zoals de GR of een computerprogramma, blijkt de onderzoekshouding van leerlingen te stimuleren. Ze zijn eerder geneigd wat te proberen, de drempel om te beginnen is vaak lager. Leerlingen stellen zichzelf eerder nieuwe vragen en het is makkelijker om te variëren met getallen en dergelijke. Natuurlijk moet er ook in het gebruik geïnvesteerd worden. Afwijkende notaties en de eigenaardigheden van de bediening van het apparaat vragen de nodige aandacht.

Leerlingen van 4 VWO

Het Gregorius College in Utrecht is een van de Profi-volgscholen. In twee 4 VWO klassen van die school is wekelijks een aantal lessen *Discrete Analyse* bijgewoond en geobserveerd. De docenten waren Peter Kop en Marcel Voorhoeve. De leerlingen hadden al wat ervaring met onderzoeksopdrachten die ontwikkeld waren in het kader van het PRINT-project. Verder hadden ze in het begin van het jaar gewerkt met het Profi-pakket *Machtige Functies*. De ervaringen daarmee waren niet alleen maar positief. Met name de formulering van de opdrachten werd soms 'te vaag' gevonden. Leerlingen en docenten vonden het moeilijk om te bepalen waar het naar toe ging en wat de bedoeling van een opdracht zou zijn.
Door het werken met *Machtige Functies* waren de leerlingen behoorlijk vertrouwd met het gebruik van de GR. Elke leerling had de GR standaard klaarliggen op tafel. Grafieken werden zonder moeite in beeld gebracht. Invoeren van functievoorschriften, aflezen van tabellen, inzoomen en uitzoomen, het uitvoeren van berekeningen ... dit alles gaf geen enkel probleem. Sommige leerlingen waren zelfs zo handig met het apparaat dat ze er allerlei programma's voor schreven, bijvoorbeeld om Franse

woordjes te oefenen.
De leerlingen die het afgelopen schooljaar '96/'97 in 4 VWO zaten, behoren tot de eerste lichting leerlingen uit de basisvorming. Misschien zijn de volgende opvallende zaken een gevolg van de basisvorming?
De leerlingen hadden geen last van computerangst. Als het bij een opdracht handig was om de computer te gebruiken, konden ze redelijk zelfstandig in het computerlokaal daarmee uit de voeten. Bij *Discrete Analyse* was dit niet zo vaak nodig, bij de PRINT-opdracht, die net voor het pakketje gedaan was, echter wel.
Bij het werken met meetkundige rijen bleek onmiddellijk dat leerlingen behoorlijk op de hoogte waren van exponentiële groei. Dit hinderde zelfs de introductie van recursieve formules een beetje:
'Waarom moet je zo moeilijk doen? Je kan toch zo de groeifactor vinden en de beginwaarde en er een directe formule bij maken?'
Dat konden de meeste leerlingen inderdaad vrij moeiteloos. Ook werken met tabellen en de verschillen ging moeiteloos.
Aan de andere kant bleek dat leerlingen moeite met formele notaties hadden. Ze hebben daar in de basisvorming ook niet veel ervaring mee opgedaan. Zo komt bijvoorbeeld in de meeste boeken van de basisvorming de functienotatie $f(x) = ...$ niet voor. In het pakketje stond die wel, maar zonder verdere introductie. Het bleek dat het nodig was leerlingen uit te leggen dat daar niet f maal x stond.
Ook het omwerken van eenvoudige formules, waarbij haakjes moesten worden uitgewerkt, ging de meeste leerlingen moeilijk af. Vermoedelijk mede als gevolg van de geringe ervaring met formele notaties, hebben de leerlingen meer moeite met het lezen en gebruiken van formele taal. In een volgende versie van het pakket zal hieraan wat meer aandacht moeten worden besteed.

Observaties uit de klas

Aan het eind van hoofdstuk 1 'Rijen' vat de docent in een klassegesprek de inhoud nog even kort samen. Eerst wordt opgehaald wat ook al weer bedoeld wordt met een recursieve en een directe formule. Een leerling zegt het zo:
'Een recursieve formule is dat je bijvoorbeeld van een bepaalde formule de tweede x of zo hebt en dat je daarmee de derde x kunt uitrekenen. Een directe formule is dat je bijvoorbeeld 6 invult en dat er dan een antwoord uit komt rollen'.
De leerling blijkt het verschil tussen de twee typen formules goed te begrijpen. Dat in algemene bewoordingen weergeven is nog niet zo makkelijk.
Wat verder opvalt is 'het praten in x'. Zoals eerder gezegd, zijn deze leerlingen behoorlijk vaardig in het herkennen van lineaire en exponentiële groei, iets wat ze blijkbaar vaak beschreven hebben in formules met y en x. Een andere verklaring kan liggen in het gebruik van de grafische rekenmachines die alleen functievoorschriften in de vorm 'y = functie van x' accepteert. Een nadeel van dit x-gerichte denken zal dadelijk blijken.
Op het bord komen vervolgens de volgende drie rijen:

I.	6	10	14	18	20
II.	4	12	36	108	324
III.	2	5	11	23	47

De opdracht is bij elke rij een directe en een recursieve formule te maken en aan te geven of het een meetkundige rij, een rekenkundige rij of een ander soort rij is. Vooral op de derde rij wordt druk gepuzzeld. Groepjes leerlingen maken al snel de verschilrij:

3 6 12 24

'Er komt steeds 3 bij.'
'Hoe moet je dat opschrijven?'
Maar weinig leerlingen komen er in de korte tijd die ze hiervoor hebben helemaal uit. In het klassegesprek ontwikkelt zich de volgende dialoog:
'$t_0 = 2$', dat gaat vlot en is voor iedereen duidelijk. Op de vraag naar het verband tussen de termen, antwoordt een leerling: *'eerst + 3 dan + 6, dat is 2 × 3, enzovoort.'*
Hij beschrijft dus de verschillen, maar wat precies met 'enzovoort' wordt bedoeld komt niet uit de verf. Op het bord komt nu met hulp van de klas:

+3 +6 +12 +24

en de volgende zal + 48 zijn. Die verschilrij is wel duidelijk.
Vervolgens ontstaat er geroep. Hier en daar wordt vanuit de klas *'keer 2 + 1'* geroepen. Al snel wordt dat aangevuld tot $t_{n+1} = t_n \times 2 + 1$. De rij van verschillen is compleet vergeten. Als de docent terug wil naar de informatie die de verschilrij geeft en die ook gebruikt kan worden bij het vinden van de formule voor de oorspronkelijke rij, wordt dat door de klas afgedaan als te moeilijk. De formule is immers al gevonden!
Later blijkt het nut van de verschilrij wel bij het maken van de directe formule $t_n = 3 \times 2^n - 1$.

Nog even terug naar de eerste twee rijen en wat voor problemen de leerlingen daarbij blijken te hebben. Vrij veel leerlingen schrijven bij de recursieve formules alleen $t_n + 4$ op. Zowel de beginwaarde $t_0 = 6$ als de uitdrukking $t_{n+1} =$ worden vaak niet genoteerd. Voor de directe formule vinden veel leerlingen ($y =$) $4x + 6$. Het blijkt niet vanzelfsprekend te zijn dat dit vertaald kan worden in ($t_n =$) $4n + 6$. Het is duidelijk dat het werken met variabelen nog veel haken en ogen heeft. Ook de volgende dialoog over rij II illustreert dit.
Een leerling heeft geen formule gevonden voor rij II. De docent vraagt of ze wel een verband in die rij ziet.
'Jawel', zegt ze, 'keer 3'.

'Wat dan keer 3?'
'Het vorige getalletje'
'Als je t_0 hebt, hoe krijg je dan t_1?'
'keer 3.'
'Wat keer 3?'
't_0 keer 3'
Op bord komt het volgend rijtje:

$t_1 = t_0 \times 3$
$t_2 = t_1 \times 3$
$t_3 = t_2 \times 3$
t_{25}
$t_{26} = ??$

Bij t_{26} stokt ze:
'Dan moet je eerst t_{25} uitrekenen.'
'En als je die hebt?'
'Dan doe je $t_{25} \times 3$'
'Kun je nu een algemene regel geven met n-en?'
'Nee.'

Ook nadat de regel op het bord staat, blijft de leerling wat glazig kijken. Uit de dialoog blijkt dat deze leerling veel moeite heeft met het gebruik van een formele notatie met variabelen. En zij is niet de enige.
Indices leveren natuurlijk weer specifieke problemen: zo denken veel leerlingen dat $t_{n+1} - t_n$ gelijk is aan 1 of aan t_1. De n-en vallen tegen elkaar weg.

Ook de notatie van de grafische rekenmachine levert problemen op. Deels is dit een gevolg van het feit dat de notatie die eerst in het pakketje wordt gebruikt, afwijkt van die van de grafische rekenmachine. Blijkbaar is er meer tijd nodig om die nieuwe notatie te introduceren. Verder heeft de notatie van de grafische rekenmachine ook zo zijn eigen eigenaardigheden. Na het op de TI83 instellen van de Seq-mode en de keuze Y= krijg je bovenaan op het scherm als eerste nMin=1 gevolgd door u(n)= en u(nMin) =. Ondanks het feit dat de notatie met de n tussen haakjes ook in het pakketje al aan bod is geweest, zijn er toch leerlingen die menen dat de haakjes iets met vermenigvuldigen te maken hebben. De uitdrukking u(n – 1) wordt dan geïnterpreteerd als zou er een maalteken weggelaten zijn, zodat er eigenlijk u × (n – 1) staat. Een groter probleem echter levert de interpretatie van nMin, een index die met een variabele wordt aangegeven!
Het blijkt dat de meeste leerlingen na het nodige oefenen goed in staat zijn om rijen in de GR in te voeren. Of dat betekent dat ze de notatie goed interpreteren, blijft onduidelijk. Het kan ook zijn dat ze meer receptmatig te werk gaan en alleen weten wat ze waar moeten invoeren. Dat lijkt geen probleem in dit geval. Het is een verschijnsel dat bij het gebruik van technologie vaker zal optreden.

Opdracht: De medicijnspiegel

Elk hoofdstuk van het pakket besluit met een grotere onderzoeksopdracht waaraan leerlingen in tweetallen kunnen werken en die kunnen uitmonden in een product, zoals: een brief, een folder, een verslag.
De resultaten van de onderzoeksopdracht over de medicijnspiegel aan het eind van hoofdstuk 1 zijn bijzonder indrukwekkend.
De opdracht luidde:

Onderzoeksopdracht: De medicijnspiegel
Een voorlichter over het gebruik van medicijnen vertelt een verhaal met deze hoofdpunten:

- Van sommige medicijnen verdwijnt per dag 25% door de uitscheiding.
- Een bepaald medicijn is pas effectief als een aangegeven peil is bereikt. Daarom duurt het een poosje voor de dagelijks ingenomen medicijnen echt werkzaam zijn.
- Sla geen dag over.
- Het kan zeer onverstandig zijn een overgeslagen dag de volgende dag te compenseren met een dubbele dosis.

N.B. De gegevens in dit verhaal zijn vereenvoudigd.

Onderzoek

- Maak enkele berekeningen voor het normale verloop van het 'peil'. Maak zelf benodigde aannamen en geef conclusies. Ga bijvoorbeeld eerst uit van een dagelijkse dosis van 3 keer 500 mg.
- Geef in ieder geval formules en leg het verband met rijen.
- Zijn de gevolgen van overslaan werkelijk erg groot? Maakt het verschil wanneer dat overslaan plaatsvindt?
- Bekijk de consequenties van de genoemde compensatie.
- Natuurlijk moeten berekeningen uitsluitsel geven over het verloop van de medicijnspiegel in het lichaam. Maar kun je ook zo wel beredeneren dat een vaste dagelijkse dosis wel eens niet binnen een bepaald eindpeil zal kunnen uitkomen?

Product
Schrijf een folder voor de patiënten waarin de antwoorden op bovenstaande vragen zijn verwerkt. Neem daarin in ieder geval een grafiek op met het verloop van de medicijnspiegel.

Deze opdracht is in twee klassen (met elk een eigen docent) gedaan. Van te voren zijn afspraken gemaakt over samenwerken, tijdstip van inleveren en de eisen waaraan het ingeleverde werk moest voldoen. In de ene klas is meer nadruk gelegd op de verzorging van de folder, in de andere klas is expliciet gezegd dat daarop bij de beoordeling niet zou worden gelet. Dit zie je natuurlijk terug in het uiterlijk van de werkstukken. In een van beide klassen zitten de leerlingen bij wiskunde altijd in groepen van drie tot zes leerlingen. In die groepen is ook deze opdracht uitgevoerd. In de andere klas is meestal in tweetallen gewerkt.
In het inleidend klassegesprek is in beide klassen ook kort ingegaan op de wiskundige inhoud van de opgave,

nadat de leerlingen eerst de gelegenheid hadden daar zelf naar te kijken. De accenten die daarbij gelegd zijn, zijn in beide klassen verschillend, maar het is duidelijk dat het in elk geval gaat om het bedenken van een wiskundig model dat de situatie zo goed mogelijk beschrijft. Er wordt steeds heen en weer gegaan tussen de beschreven situatie en de interpretatie daarvan en de wiskunde. Een wiskundige activiteit van een behoorlijk hoog niveau. De beide docenten stellen zich terughoudend op. Ze leiden weliswaar de discussie, maar trachten zo min mogelijk te sturen. Het maken van keuzes en aannames wordt aan de leerlingen overgelaten. Zo zou het idealiter in het studiehuis ook gaan. Natuurlijk zijn de elementen die in de discussie aan bod zijn geweest terug te vinden in de gemaakte folders.

In het volgende wordt een aantal opvallende elementen uit het werk op een rijtje gezet en geïllustreerd met leerlingenwerk.

Gebruik van rijen en formules

Nagenoeg alle leerlingen beschrijven de situatie met een rij. Sommige leerlingen vinden moeiteloos meteen een geschikte recursieve formule, kiezen een startwaarde en laten de GR het rekenwerk doen. Andere leerlingen rekenen eerst stap voor stap een aantal waarden uit, meestal in een tabel, waarbij ze de GR als gewone rekenmachine gebruiken.

Sommigen vinden daarbij alsnog een formule. Starten met concrete berekeningen blijkt voor deze leerlingen een noodzakelijk opstapje naar de formule. Dit sluit aan bij de eerder geconstateerde problemen die sommige leerlingen hebben met het gebruik van formele notaties.

Een tweetal maakt een folder voor patiënten en neemt daarin geen formules op. De folder ziet er zeer professioneel uit en bevat een 'antwoord op de meest gestelde vragen over dit geneesmiddel'.

In de folder komen getallen, grafieken en tekst voor, maar geen formules. Daar is bewust voor gekozen, want 'patiënten snappen dat toch niet'. Ten behoeve van de docent zijn de gebruikte formules wel in een apart verslag opgenomen.

Een ander groepje dat een prachtige folder heeft gemaakt kiest er wel voor om – naast een tabel en een grafiek – formules op te nemen in de aan patiënten gerichte folder, en doet dat als volgt:

> U kunt dus de hoeveelheid medicijn die u in uw lichaam hebt berekenen met de volgende formule:
>
> $t_{n+1} = t_n * (0{,}75)\text{^}(1/3) + 500$
>
> $t_0 = 500$
>
> t_{n+1} = de volgende term (de tijden zijn steeds termen en een term verder is acht uur later)
>
> t_n = de voorafgaande term

Het is overduidelijk dat deze leerlingen geen probleem met het gebruik van een formele notatie hebben. Sterker nog: zij zijn in staat in begrijpelijke taal de notatie uit te leggen.

Er is maar één groepje dat de situatie verkeerd uitwerkt en een lineaire formule gebruikt. Zij gaan uit van een constante dagelijkse dosis van '1500 – 25% = 1125mg' en maken als formule: *dosis* = 1125 * *x*.

Een ander groepje heeft dezelfde fout gemaakt, maar tijdig ontdekt dat dat niet klopt. Ze hebben dat in hun verslag als volgt beschreven:

> - eerste aanname:
> Elke dag komt er 0,75*1500 = 1125 mg bij
>
> - conclusie:
> Na een tijdje nagedacht te hebben, zagen we in dat dit niet klopte. Het klopt niet omdat je ook de overblijfselen van de vorige dag erbij moet hebben.
>
> Na het nadenken over onze eerste aannamen, kwamen we dus aan de tweede aanname:
> Elke dag moet er 1500 bij het vorige en van het totaal 25% af. Dit klopt, we hadden er al over nagedacht.

Slechts één leerling vindt – na veel gepuzzel met behulp van de GR – een directe formule. Deze staat ook in de folder: Y = 4500 – (4500 * 0,75^X).

De evenwichtswaarde of het peil

Lang niet alle leerlingen hebben het 'peil' (de evenwichtswaarde) gevonden. In de ene klas zijn dit er duidelijk meer dan in de andere. Misschien wel omdat er in die klas even over gepraat is:

Ll: *'Je krijgt steeds meer medicijn, dus wat eraf gaat wordt ook steeds groter, want er komt telkens meer bij.'*
Lk: *'Het wordt steeds meer, maar ook steeds minder'.*
Ll: *'Er komt een moment dat die 25% groter is dan die 1500 dus dat hij niet verder stijgt.'*

Deze korte discussie speelde zich tussen een leerling en de docent af en veel leerlingen hebben vermoedelijk niet helemaal begrepen waar het over ging. Toch heeft een groot deel van deze klas een peil bepaald. Vaak wordt dit peil nog toegelicht:

> Neem elke dag na het avondeten de 3 pillen van 500 mg elk in, doe dit elke dag, sla geen dag over. Als u dit doet, zal de pil effectief worden over precies 41 dagen want dan blijft het gehalte mg (4500) in het lichaam hetzelfde want per dag gemiddeld bij zo een 4 keer plassen verdwijnt er totaal 25%. Bij 4500 blijft dit hetzelfde want als u 25% van 4500 neemt is dat 1500 mg en dat slikt u per dag.

Een keer wordt de evenwichtswaarde zelfs berekend:

$$t_{n+1} = (t_n + 500) \times \sqrt[3]{0{,}75}$$
$$x = (x + 500) \times \sqrt[3]{0{,}75}$$
$$x = 454{,}280 + \sqrt[3]{0{,}75}\,x$$
$$(x - \sqrt[3]{0{,}75}\,x) = 454{,}280$$
$$x = 4968{,}884217 = \text{evenwichtswaarde}$$

Groot was de voldoening toen deze leerlingen op dezelfde waarde als de grafische rekenmachine uitkwamen.

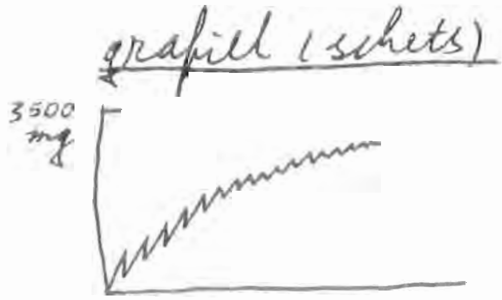
Toch mooi dat je dat ook zelf kunt bepalen!

Leerlingen die geen peil hebben gevonden, lijken vaak niet verder te hebben gekeken dan het deel van de tabel dat op het scherm van hun GR past, dat zijn de eerste zeven waarden. Het peil wordt dan nog lang niet bereikt. Dat gebeurt pas – afhankelijk van welke formule is genomen – rond dag 40. Soms wordt er een willekeurig getal genoemd: in de opdracht werd immers naar het peil gevraagd. Het lijkt erop of deze leerlingen hebben verondersteld dat dat een zelf te kiezen waarde is. Je kan zeggen dat zij hun model van de situatie niet voldoende hebben onderzocht. Ze zijn te snel tevreden geweest met de gevonden formule en een paar berekende waarden.

De grafiek

Het mooie van de grafische rekenmachine is dat je bij elke formule ook een grafiek kunt krijgen. Welk deel van de grafiek je in beeld krijgt, hangt samen met de vensterinstelling. Dus of je het evenwichtspeil alsnog vindt door de grafiek te onderzoeken, hangt er maar vanaf hoe ver je kijkt. Als je een formule voor een rij invoert (in de Seq-mode) tekent de GR een puntengrafiek. Soms wordt deze in het verslag overgenomen, soms niet. Er zijn ook leerlingen die de grafiek overnemen als een lijngrafiek, waarbij ze de punten hebben verbonden.

Er zijn maar heel weinig leerlingen die zich hebben afgevraagd hoe de grafiek tussen de punten eigenlijk loopt. Je kunt bijvoorbeeld aannemen dat je de medicijnen in één keer inneemt en dat de dosis in je lichaam dan omhoogschiet. De grafiek krijgt dan een soort zaagtanden:



Overslaan en compenseren

De meeste leerlingen hebben ook uitgezocht wat er gebeurt als je een keer overslaat en wat als je een dubbele dosis inneemt. Niet iedereen is hier even ver mee gegaan. Ook hierbij zijn er duidelijk verschillende strategieën. Er zijn leerlingen die een heleboel situaties – het overslaan op verschillende dagen – in tabellen doorrekenen. Zij verwerken hun conclusie in de volgende waarschuwing:

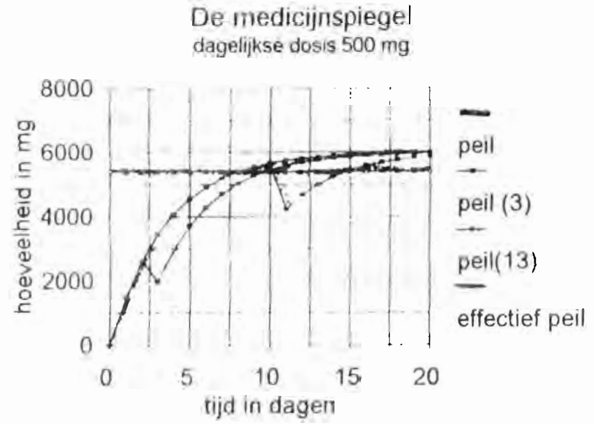
> Sla geen dag over. Vooral de gevolgen van het overslaan als u de medicijnen al een paar dagen gebruikt zijn erg groot. De hoeveelheid medicijn in uw lichaam neemt af waardoor de gewenste effecten minder worden.

In dit geval wordt de waarschuwing onderbouwd door de berekeningen. Dat is lang niet altijd het geval. Veel leerlingen realiseren zich wel – ook zonder berekeningen – dat overslaan vooral later in de periode van innemen grotere gevolgen heeft.

Ze verwoorden dat meestal algemeen:

> Hoe meer je binnen krijgt hoe vervelender het wordt als je het een keer vergeet.

Het compenseren wordt op een vergelijkbare manier behandeld. Eén groepje springt eruit door de manier waarop ze de gevolgen van overslaan en compenseren in beeld hebben gebracht in de folder:



De gevolgen van een dag overslaan als u op dag 3 geen Verbatim inneemt of op dag 13.

De folders

Een aantal leerlingen heeft zeer professioneel ogende folders gemaakt. Toch is het in de meeste gevallen niet zo dat alle aandacht is gaan zitten in de afwerking en verzorging, ten koste van de wiskundige inhoud. Maar sommige leerlingen hebben wel geprobeerd zich goed in de context in te leven en een zo echt mogelijke folder voor patiënten te maken.

Dit blijkt soms uit de prachtige opmaak, uit de gekozen vorm ('een antwoord op de meest gestelde vragen...') of uit het feit dat het medicijn een naam heeft gekregen en een functie 'Slavirom' of 'Sling, als hulp bij het afslankproces' of 'Verbatim, tegen zenuwen en problemen bij jongeren van 10 tot 18 jaar', maar toch vooral uit de teksten. Een voorbeeld:

> Neem dus nooit een extra grote dosis van een medicijn in! Hou je aan de voorschriften. We hopen u hiermee voldoende van dienst geweest te zijn en informeer in geval van onduidelijkheid altijd bij uw huisarts! Dank voor uw aandacht en van harte beterschap!

Conclusie

Bij het werken aan deze opdracht zijn diverse aspecten van wiskundige modelvorming aan bod gekomen. Verder is er gewerkt aan algemene wiskundige vaardigheden zoals het doen van onderzoek en het vertalen van resultaten voor een specifieke doelgroep en ook aan algemene vaardigheden zoals samenwerken, organiseren van het werk, plannen en presentatie van resultaten.

Concluderend kunnen we zeggen dat deze opdracht een geslaagd voorbeeld is van een onderzoeksopdracht bij het onderwerp rijen, die goed aansluit bij de uitgangspunten van het studiehuis.

Het vervolg

In alle profielen zit een vervolg op discrete analyse in het domein 'Differentiaalrekening met toepassingen'. Daarin wordt de stap gezet naar de afgeleide functie via de limiet van het differentiequotiënt. De afgeleiden van enkele typen standaardfuncties moeten 'gekend' worden, evenals de regels voor differentiëren. Daarmee worden vervolgens afgeleiden berekend. Verder is er aandacht voor het verband met de helling en de raaklijn en met de extremen. Voor de M-profielen geldt dat de toepassingen met name uit de economie komen.
Verder is er in het profiel Economie &Maatschappij een vervolg op discrete analyse in het onderdeel 'Discrete Dynamische Modellen' (zie ook het artikel 'Discrete Dynamische Modellen in Wiskunde A' elders in dit nummer).
De N-profielen kennen een meer theoretische voortzetting van de differentiaalrekening in het omvangrijke domein 'Differentiaal- en integraalrekening'. Het differentiëren wordt hierin geformaliseerd. Bij de introductie van differentiëren en integreren wordt voortgebouwd op de kennis van rijen, van som- en verschilrijen en van de bijbehorende notaties zoals die zijn geïntroduceerd in het domein 'Discrete Analyse'.

Ten slotte

Natuurlijk zal er aan de tekst van het huidige pakketje nog gesleuteld moeten worden. Het ging immers om een eerste ontwerp van een volstrekt nieuwe aanpak. Of de keuze om in het gemeenschappelijke deel niet aan differentiëren te beginnen een goede keuze is geweest, moet nog blijken in het vervolg. De verwachting is dat leerlingen met het onderdeel 'Discrete Analyse' een brede basis hebben verworven om modelmatig te werken met veranderingen. Daarbij is de samenhang tussen numerieke, grafische en formele aanpakken in stand gebleven. De resultaten van de opdracht over de medicijnspiegel bewijzen dat met de gekozen didactiek ook een aantal belangrijke doelstellingen van het studiehuis haalbaar is.

Monica Wijers, Freudenthal Instituut

Literatuur

Kemme, S.L. en M. Wijers (1996). *Trajectenboek wiskunde 4 VWO*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Holleman, A., W. Reuter en H. Verhage (1997). *Trajectenboek wiskunde A VWO*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Doorman, L.M., P. Drijvers en M. Kindt (1994). *De grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs*. Utrecht: CD β press.

Kemme, S.L. en M. Wijers (1996). Als jonge honden op een bak met lever. *Nieuwe Wiskrant 15*(3), pp. 22-27.

Profi-team (1996). *Machtige Functies*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Roodhardt, A., S. Kemme en M. Wijers (1997). *Discrete Analyse*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Wedstrijd Schatten

De wedstrijd *Schatten* op internet die was aangekondigd in 'Wurls 1' (*Nieuwe Wiskrant, 16*(3)) is gewonnen door Erik Verhoef. Erik zit in de tweede klas van het Zuyderzee College te Emmeloord. Hij speelde thuis. Op school zijn er geen mogelijkheden om internet te bezoeken. Erik surft veel en is het zodoende de wedstrijd toevallig tegengekomen. Zijn favoriete site op dit moment is Game Centre: http://www.nip.net.hk/entertainment/
Een periode speelde hij *Schatten* bijna iedere dag. Het ging steeds sneller en met alle verschillende sommen door elkaar haalde hij de hoogste score: 196. De antwoorden gaf hij binnen vier seconden! Ook had hij in de gaten wat steeds betere manieren waren om het antwoord snel in te tikken: 'Sommige vragen wist je dan direct, bijvoorbeeld 10% van iets, dan moest je gewoon de komma eentje opschuiven.' In totaal hebben dertig verschillende personen het spel één of meerdere keren gespeeld. Voor zover we hebben nagegaan, zijn dit twintig leerlingen en tien overigen, waaronder studenten en docenten.
Opvallend is dat uit de namen die de deelnemers hebben opgegeven niet blijkt dat internet vooral een mannenwereld is. Zeker de helft van de leerlingen waren meisjes.
Voor wie het spel nog een keer wil bekijken, het staat op het wisweb van het Freudenthal Instituut:
http://www.fi.ruu.nl/wisweb/nl/schatten/