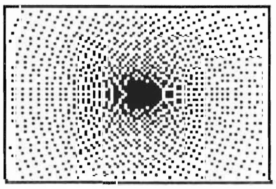
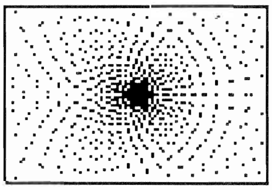
Een optie van een grafische rekenmachine

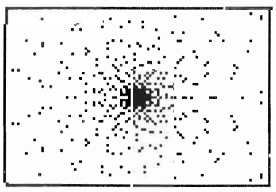
In het jongerentijdschrift *Pythagoras* van april dit jaar stond een artikel van Hans Lauwerier over Julia-verzamelingen [jrg 36 nr 4, met overigens ook een zeer leesbaar en inspirerend artikel over het vijfde postulaat van Euclides door Klaas Pieter Hart]. Lauwerier beschrijft wat Julia-verzamelingen zijn en hoe je dergelijke verzamelingen op de computer kunt afbeelden. Hieronder volgt eerst een samenvatting van zijn beschrijving en vervolgens hoe tijdens het programmeren van een grafische rekenmachine een nieuwe optie werd ontdekt.
Een Julia-verzameling is een fractal. Over fractals is deze eeuw veel geschreven en het onderzoek ernaar heeft bijzonder veel fraaie plaatjes opgeleverd. Het uitgangspunt voor een Julia-verzameling is een recurrente betrekking voor punten in het vlak. Het eerste voorbeeld dat Lauwerier geeft, is de volgende formule voor (x_n, y_n):

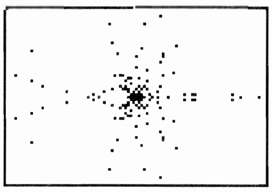
$$x_n = x_{n-1}^2 - y_{n-1}^2$$
$$y_n = 2\,x_{n-1}\,y_{n-1}$$

Als je het aantal punten in het assenstelsel nu even beperkt tot een eindig aantal, bijvoorbeeld de pixels van het scherm van je grafische rekenmachine, dan kun je voor ieder punt uit het vlak bekijken waar deze recurrente betrekking het punt heen voert. Zo gaat (1, 1) naar (0, 2). Op een scherm van [-2, 2] bij [-1.5, 1.5] krijg je onderstaande plaatjes als je de beeldpunten kleurt:


na 1 iteratie

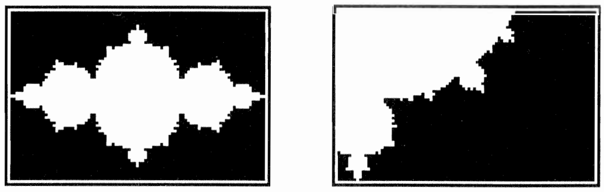

na 2 iteraties


na 3 iteraties

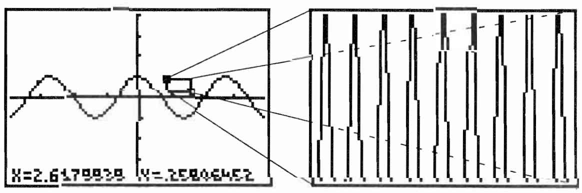

na 5 iteraties

Wat blijkt is dat de meeste punten op den duur naar oneindig gaan of naar de oorsprong convergeren. Voor een Julia-verzameling zijn de beginpunten in zo'n geval belangrijk. Er zijn twee gebieden in het vlak: een gebied met beginpunten die onder de iteratie naar oneindig gaan en een gebied met punten die onder de iteratie naar de oorsprong convergeren. Een Julia-verzameling is de grens tussen die twee gebieden.
Voor bovenstaande formule is de Julia-verzameling de eenheidscirkel. Punten binnen de cirkel gaan naar de oorsprong, punten erbuiten naar oneindig. Lauwerier geeft het bewijs hiervoor in *Pythagoras*.
Als je bij deze betrekking een constante optelt of aftrekt, wordt de Julia-verzameling snel onvoorspelbaar grillig. Hieronder zijn niet de beeldpunten getekend, maar alleen de beginpunten. Ze zijn zwart als ze naar oneindig lijken te gaan en anders wit. De volgende formule is gebruikt:

$$x_n = x_{n-1}^2 - y_{n-1}^2 - 0.75$$
$$y_n = 2\,x_{n-1}\,y_{n-1}$$



De grafische rekenmachine, in onderhavig geval een TI-83, moet dus voor alle pixels de betrekking een aantal keer doorrekenen. Daarvoor kun je een programmaatje schrijven[1]. Handig is dan om te weten waar de volgende pixel is.
De afstand tussen twee pixels kun je berekenen, maar het blijkt dat op de TI-83 in het VARS-menu de variabelen Δx en Δy staan en die geven precies de afstand tussen twee pixels bij de window-instellingen. Verander je het window, dan veranderen ook Δx en Δy. Het leuke van deze variabelen is dat je ze ook in functievoorschriften gebruiken kunt.
Bekijk bijvoorbeeld de grafiek van Y1 = $\cos(2\pi x/\Delta x)$ op het interval $[-2\pi, 2\pi]$. Je ziet de grafiek van een cosinus die de afstand tussen twee pixels als periode heeft: op het scherm een horizontale lijn. Terwijl de grafiek eigenlijk op dit interval zo'n 96 keer op en neer moet gaan (Δx = 0.1308996939 en $2\pi/\Delta x = 48$).
Y1 = $\cos(2\pi x/0.135)$ heeft net geen periode van een pixel: de grafiek op het scherm gaat langzaam op en neer. Een leuk effect is dan het gebruik van ZOOM-BOX op een leeg stukje in de grafiek, daar loopt hij namelijk wel, alleen je zag hem nog niet.



[1] Het programmaatje voor de TI-83 is op internet te vinden via http://www.fi.ruu.nl/wisweb/nl/

Michiel Doorman, Freudenthal Instituut