Een nieuw leerstofgebied voor wiskunde A in de Tweede Fase is Discrete Dynamische Modellen. De Vakontwikkelgroep had in haar rapport voor dit domein een voorlopige omschrijving gegeven, die door het Profi-team nader is uitgewerkt. **Michiel Doorman** en **Heleen Verhage** doen verslag.

Discrete Dynamische Modellen voor wiskunde A

Inleiding

In het voorjaar is het Inrichtingsbesluit 'Wij Beatrix...' voor de vernieuwde Tweede Fase aangenomen door de Tweede Kamer. De invoering van de profielen vanaf 1998 is daarmee een feit. Voor wiskunde betekent dit vooral dat het vak wiskunde B voor het VWO er in de toekomst anders uit komt te zien.

Maar ook voor wiskunde A verandert er iets. Uiteraard zullen het zelfstandig leren en het examendossier voor de nodige veranderingen zorgen, maar dat is niet het enige, want er vinden ook enkele inhoudelijke wijzigingen plaats.

Ten behoeve van de auteursgroepen heeft het Profi-team de voorstellen van de vakontwikkelgroep (VOG) toegelicht en afgebakend in het *Trajectenboek wiskunde A* VWO. Voor het nieuwe domein *Discrete Dynamische Modellen* is bovendien een experimenteel leerstofpakket ontwikkeld, dat in een aantal klassen is uitgeprobeerd. In dit artikel gaan we nader in op dit nieuwe domein.

Het voorstel van de VOG

Het domein DISCRETE DYNAMISCHE MODELLEN (DDM) voor het profiel Economie & Maatschappij is een geheel nieuw leerstofgebied binnen wiskunde A. Een vergelijkbaar onderwerp komt in het oude wiskunde A programma niet voor. In het rapport van de Vakontwikkelgroep wordt bij de beschrijving van dit domein sterk de nadruk gelegd op economische toepassingen, met name de dynamische marktmodellen, waarbij het gaat om de wisselwerking tussen aanbod, vraag en prijs, in het geval er bepaalde tijdsvertragingen optreden.

De wiskundige kern van dit domein moet volgens de VOG bestaan uit de interpretatie van en het werken met differentievergelijkingen van het type $Y_{t+1} = aY_t + b$. Bij het oplossen van deze vergelijkingen spelen meetkundige rijen een belangrijke rol. De VOG noemt verder dwarsverbanden met matrices en het doorrekenen van modellen op de computer (bijvoorbeeld met een spreadsheet) als gewenste onderwerpen.

De VOG geeft in haar rapport de volgende voorlopige opsomming:

a. statische marktmodellen
b. dynamische marktmodellen
c. eerste orde differentievergelijkingen
   - oplossen door substitutie
   - oplossen door iteratie
   - oplossen op analytische wijze (met meetkundige rijen)
d. grafische representaties van dynamische vraag-aanbod-modellen
e. convergentie naar een evenwichtssituatie
f. stelsels differentievergelijkingen en matrices.

Het Profi-team heeft, uitgaande van de omschrijving van de VOG, de inhoud van dit domein nader uitgewerkt in het lespakket *Discrete Dynamische Modellen* dat op de twee proefscholen van het Profi-project is uitgeprobeerd in VWO 5.

Vervolgens is een conceptvoorstel geformuleerd voor de eindtermen bij dit domein, voorzien van een afbakening en een (vakdidactische) toelichting. Over dit voorstel is enkele malen gediscussieerd in de Resonansgroep Trajectenboeken. Het uiteindelijke voorstel is te vinden in het *Trajectenboek wiskunde A VWO*. Dit Trajectenboek, vooral bedoeld ter ondersteuning van auteursteams, is in juni aangeboden aan het ministerie van OC&W.

De uitwerking van Profi

De inhoud van het voorbeeldmateriaal is wat breder van opzet dan de omschrijving van de VOG suggereert. Dit komt doordat het Profi-team van mening is dat het voorstel van de VOG, althans in de formulering in het rapport, wel erg eenzijdig economisch georiënteerd was. We hebben de voorkeur gegeven aan een iets ruimere invulling en het leek ons dat de omvang van het domein (veertig uur) dit ook toelaat. Bijkomend voordeel is dat er meer gelegenheid is voor het leggen van dwarsverbanden met andere domeinen van wiskunde A. Bovendien kan het aspect van de wiskundige modelvorming, een belangrijke algemene wiskundige vaardigheid bij wiskunde A, hierdoor beter uit de verf komen.

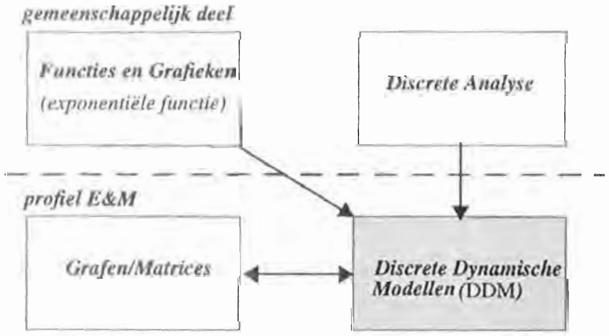
In het experimentele lesmateriaal zijn daarom niet alleen toepassingen uit de economie opgenomen, maar ook bijvoorbeeld uit de biologie. Verder is er nogal wat aandacht voor groeimodellen (met name exponentiële en geremde groei), alhoewel ook hiervoor geldt dat dit onderwerp niet expliciet genoemd wordt door de VOG, althans niet bij dit domein. Het zou echter een gemiste kans zijn om aan zo'n karakteristiek wiskunde A onderwerp géén aandacht te besteden.

Voorkennis

De benodigde voorkennis voor DDM is samen te vatten onder vier kopjes:

- lineaire en exponentiële groei
- het 'discrete denken'
- algebraïsche vaardigheden
- matrices.

Deze voorkennis wordt gedeeltelijk aangebracht in de onderbouw. Daarnaast zijn de domeinen FUNCTIES EN GRAFIEKEN en (vooral) DISCRETE ANALYSE uit het wat tot voor kort het gemeenschappelijk deel heette van belang. Tenslotte is er ook een dwarsverband tussen DDM en het domein GRAFEN EN MATRICES van wiskunde A.
Het volgende schema brengt de samenhang tussen de domeinen uit het gemeenschappelijk deel en uit de profieldelen in beeld:



Om het bovenstaande nader te verduidelijken, gaan we in de rest van dit artikel in op de opbouw van het lespakket aan de hand van enkele voorbeelden. Hierbij moet de lezer zich wel realiseren dat de leerlingen op wie het pakket is uitgeprobeerd (5e klassers van het Liemers College te Zevenaar en van het Cals College te Nieuwegein), nog geen discrete analyse hadden gehad. Dit betekent dat zij nog niet vertrouwd waren met het 'recurrente denken' en dat bovendien rijen nog niet behandeld waren. Het nieuwe onderwerp Discrete Analyse werd min of meer gelijktijdig op de APS-volgscholen van het Profi-project uitgeprobeerd. Een verslag hiervan kunt u vinden in het artikel 'Discrete Analyse in de klas' elders in dit nummer.

Modellen doorrekenen

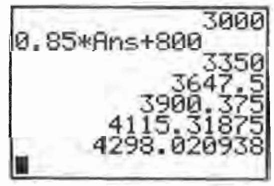
Het pakket begint met een uitvoerige oriëntatie op discrete dynamische modellen, aan de hand van een aantal voorbeelden. De bedoeling daarvan is dat leerlingen enig gevoel ontwikkelen hoe dergelijke modellen er uit zien en hoe je die zelf kunt opstellen. Het leren denken in termen van 'voorgangers' is daarbij een belangrijk aspect. Naast het opstellen van modellen is er het doorrekenen van modellen, met behulp van een grafische rekenmachine of een spreadsheet programma.
Ten slotte is er enige aandacht voor diverse notatiewijzen van deze modellen. Enige flexibiliteit daarbij is wenselijk, ook al omdat grafische rekenmachines hun eigen notatie hebben. Die werken bijvoorbeeld standaard altijd met $U(n+1)$ en $U(n)$ of juist met $U(n)$ en $U(n-1)$.
Onder de in het pakket gebruikte contexten zijn enkele 'evergreens' uit Wiskunde A. De eerste opgave:

> Een bosbouwer moet beslissen hoeveel bomen er jaarlijks gekapt worden op een bepaald perceel en hoeveel nieuwe aanplant er nodig is. Op dat perceel staan 3000 bomen. Hij overweegt om jaarlijks 15% van de bomen te kappen en daarna 800 nieuwe bomen aan te planten. De vraag is: hoe ontwikkelt de omvang van dit bos zich op den duur?
> a. Bereken voor de eerstvolgende vijf jaar het aantal bomen op dit perceel en schrijf je antwoorden in een tabel (een tabel met B(0), B(1), ... B(5)).
> b. Wat denk je, kan de bosbouwer zijn beleid blijven voortzetten?
> c. Op een gegeven moment lijkt er een evenwicht te ontstaan. Hoeveel bomen staan er dan op het perceel?

Voor het uitvoeren van berekeningen bij een formule als:

$$\textit{nieuwe aantal} = 0.85 * \textit{oude aantal} + 800$$

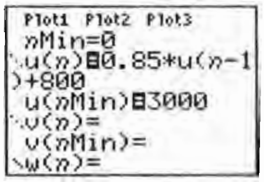
gebruikten de leerlingen de grafische rekenmachine en in het bijzonder de ANS-knop, waarmee de uitkomst van de vorige berekening weer opgeroepen kan worden om er vervolgens mee door te rekenen:

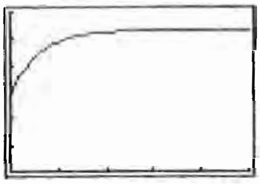


De omvang van het bos blijkt uiteindelijk naar een bepaalde evenwichtswaarde toe te gaan, waarbij planten en kappen elkaar in evenwicht houden.

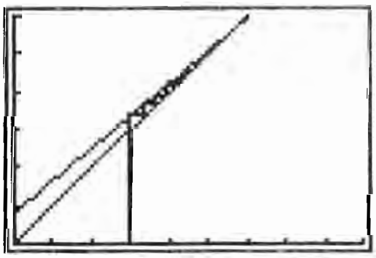
Grafische analyse van een model

De evenwichtswaarde van bovenstaand model kan op diverse manieren gevonden worden, door herhaald doorrekenen (itereren), grafisch of algebraïsch. Bij de grafische methode zijn er dan weer verschillende typen grafieken mogelijk. De 'gewone' grafiek van de recurrente betrekking op de grafische rekenmachine waarbij $U(n)$ tegen n is uitgezet:





Wie de serie losse punten liever niet met elkaar verbonden ziet, kan dit ergens instellen op de GR.
Een tweede type grafiek wordt in het pakket de 'web-grafiek' genoemd, in navolging van de aanduiding WEB op de grafische rekenmachine. In een web-grafiek worden *oude waarde* en *nieuwe waarde* tegen elkaar uitgezet. Door het herhaald overbrengen van *nieuw* naar *oud* (met behulp van de grafiek van $y = x$) wordt de evenwichtswaarde gevonden als het snijpunt van de grafieken van $y = x$ en $y = 0.85x + 800$:



Bij een gegeven betrekking wordt van de leerlingen verwacht dat ze uit de web-grafiek kunnen afleiden of de rij bij een bepaalde beginwaarde al dan niet naar het evenwicht toe gaat en of een evenwichtspunt al dan niet stabiel is.

Het opstellen van een model

Sinds de basisvorming zijn leerlingen in de onderbouw al vertrouwd met exponentiële groei. Dit onderwerp komt hier nog eens terug, maar dan vanuit een ander gezichtspunt. Bovendien wordt het model voor exponentiële groei als start gebruikt om tot een model voor geremde (logistische) groei te komen.
De essentiële stap bij de overgang van een exponentieel model naar een logistisch model is het toevoegen van een remfactor. Exponentiële groei die eindeloos doorgaat, is in de praktijk niet realistisch. In het lespakket is het geheel ingebed in een verhaal over een voorlichtingscampagne in verband met veilig vrijen, waarbij de belangrijkste gegevens zijn dat in de beginsituatie 1% van de gezinnen reeds bekend is met veilig vrijen, en het aantal mensen dat bereikt wordt met de campagne jaarlijks toeneemt met 80% van het aantal mensen dat reeds bereikt is. De stap naar geremde groei wordt gemaakt door te stellen dat dit op den duur niet erg realistisch is, en dat het percentage geïnformeerde gezinnen bovendien nooit meer dan 100 kan worden.
Dit geeft aanleiding tot de volgende aanpassing van het model:

oud model	*nieuw model*
$\Delta N_{t-1} = 0.8 \cdot N_{t-1}$ $N_t = N_{t-1} + \Delta N_{t-1}$	$\Delta N_{t-1} = 0.8 \cdot N_{t-1} \cdot$ *remfactor* $N_t = N_{t-1} + \Delta N_{t-1}$

waarbij dan nog uitgewerkt moet worden hoe de *remfactor* eruit ziet. Daarvoor wordt $(1 - N_{t-1}/100)$ genomen en een vraag aan de leerlingen is om uit te leggen waarom dit inderdaad remmend werkt.
Waar de mogelijkheid zich voordoet, zijn in het pakket enige algebraïsche opdrachten en oefeningen ingebouwd. Het werken met haakjes bijvoorbeeld is een vaardigheid die wel enig onderhoud kan gebruiken. Een opgave als 'werk de haakjes weg in de vorm $N + g * N\,(1 - N/K)$' is misschien niet zo spannend, maar in dit verband wel nuttig.

Woordformules en andere notaties

In het pakket wordt vrij veel gebruik gemaakt van woordformules. Om te beginnen is er:

nieuw = oud + toename

Deze formule dient als vertrekpunt voor het modeleerproces. De volgende stap is dan het modeleren van *toename*. Bij geremde groei wordt dat:

*toename = groeivoet * oud * remfactor*

en vervolgens:

remfactor = (1 – oud / verzadigingsniveau)

De docenten van het Liemers College rapporteerden dat deze woordformules goed werkten in de klas. Dat kon niet gezegd worden van andere notaties die ook in het pakket voorkomen, zoals:

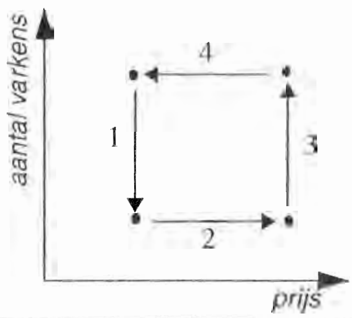
$N_t = N_{t-1} + \Delta N_{t-1}$
$U(n) = 2*U(n-1)$
$Q^v_t = -2\,P_t + 300$
$Y_2 = 2*Y_1$
$f(x) = 2^x$
$y = 0.85x + 800$
$K_n = 13000 * 1.04^n$

De leerlingen werden naast de woordformules en 'gewone' functies geconfronteerd met notaties met Δ erin, met allerlei soorten indices en met notaties die voortvloeien uit het gebruik van de grafische rekenmachine.
Achteraf bleek dit allemaal wat veel van het goede te zijn voor de leerlingen. Voor de ontwerpers is de conclusie dat het lesmateriaal op dit punt nog wat opgeschoond moet worden. Alhoewel, van toekomstige economie-studenten mag wel verwacht worden dat zij het een en ander aan kunnen op dit gebied...

Differentievergelijkingen en economie

Heel bekend in de economie is het verhaal van de varkenscyclus. Dit verhaal heeft alles met differentievergelijkingen te maken en is daarmee een goed onderwerp voor DDM. Aan de hand van de volgende opgave wordt de leerlingen gevraagd zelf het verhaal van de varkenscyclus te reconstrueren:

> Over de varkensmarkt zijn de volgende wetmatigheden bekend:
> - als de prijs van varkensvlees laag is, trekken varkensfokkers zich terug uit de markt
> - een hoge prijs van varkensvlees trekt nieuwe aanbieders aan
> - een gering aanbod van varkens leidt, bij gelijkblijvende vraag, tot een stijging van de prijs van varkensvlees
> - een overschot van varkens op de markt leidt tot een prijsdaling
> - het vetmesten van een varken kost ongeveer anderhalf jaar.
>
> Op een zeker moment is de prijs van varkensvlees heel laag.
>
> a. Schrijf een samenhangend betoog over wat je denkt dat er zal gebeuren op de varkensmarkt. Gebruik de wetmatigheden.
>
> b. b. Het verhaal van de varkenscyclus kan ook grafisch in beeld gebracht worden. Bekijk de figuur hieronder en leg uit hoe die in elkaar zit.



Na deze kwalitatieve kennismaking met het fenomeen van de varkenscyclus volgt de behandeling van vraag/aanbod modellen. Vanuit het statische vraag/aanbod model, waarin de tijd nog geen rol speelt, bijvoorbeeld:

$$Q_a = P - 60$$
$$Q_v = -2\,P + 300$$

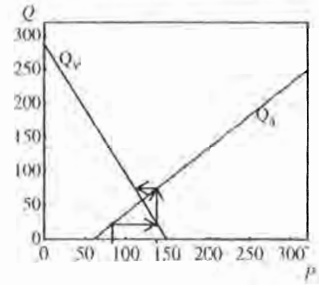
wordt het overeenkomstige dynamische model afgeleid, in het geval er aan de aanbodkant een tijdsvertraging van 1 optreedt

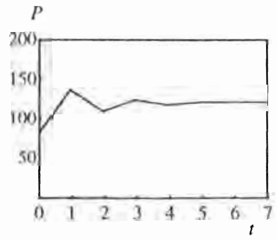
$$Q_a(t) = P(t-1) - 60$$
$$Q_v(t) = -2\,P(t) + 300$$

Gelijkstellen van vraag en aanbod levert een differentievergelijking voor $P(t)$ op:

$$P(t) = -0.5\,P(t-1) + 180$$

Bij zo'n dynamisch vraag/aanbod-model zijn verschillende typen grafieken mogelijk, die uiteraard met elkaar samenhangen. Hieronder staat links de vraag/aanbod-prijs grafiek en rechts de prijs-tijd grafiek, die op de grafische rekenmachine gemaakt is. Beide grafieken geven inzicht in het proces en de evenwichtswaarde:





Het cyclische proces dat zich bij dit soort vraag/aanbod situaties afspeelt, wordt in de economie ook wel het 'spinnenweb-theorema' genoemd. Voor de leerlingen was het wel wat teleurstellend dat de linker grafiek hierboven *niet* op de grafische rekenmachine gemaakt kan worden, omdat die net wat anders in elkaar zit dan de web-grafieken van hiervoor!

Bij deze onderwerpen bleken overigens klassegesprekken bijna onontbeerlijk om nog eens de betekenis van begrippen en de gebruikte formules en grafieken te onderbouwen. Zo besteedde Arie Hol (docent van het Cals College) een halve les aan het onderscheid tussen de twee bovenstaande grafieken aan de hand van vragen als: hoe is de tijd verwerkt in een vraag/aanbod-prijs grafiek?

Het bleek dat dergelijk klassegesprekken nodig en zinvol waren en een efficiënt middel om nog eens iedereen op hetzelfde spoor te zetten.

Algebraïsche analyse van een model

De VOG had in haar rapport al aangegeven dat de algebraïsche analyse beperkt moest blijven tot eerste orde differentievergelijkingen, en wel van het lineaire type.

Samengevat komt de bijbehorende theorie hier op neer:

> De differentievergelijking:
>
> $$X_n = aX_{n-1} + b$$
> met beginwaarde X_0
>
> heeft als evenwichtswaarde:
>
> $$X = \frac{b}{1-a}$$
>
> en als directe oplossingsformule:
>
> $$X_n = \frac{b}{1-a} + a^n\left(X_0 - \frac{b}{1-a}\right)$$

Zeker voor wiskunde A leerlingen heeft het heel wat voeten in de aarde voordat de directe oplossingsformule bij deze differentievergelijking is afgeleid. De afleiding komt neer op het toepassen van de somformule voor meetkundige rijen. Overigens is de afleiding van de directe oplossingsformule geen eindterm, dus men kan er ook voor kiezen om die formule maar gewoon te geven (vergelijk de *abc*-formule in de onderbouw), bijvoorbeeld op een formulekaart.
De leerlingen moeten deze formule uiteraard wel kunnen toepassen bij een opgave als:

> Iemand spaart door jaarlijks op 1 januari 500 gulden op een spaarrekening te storten, te beginnen vanaf 1 januari 1995 ($n = 0$). Op 1 januari het jaar daarop keert de bank 4% rente uit.
> De differentievergelijking die hier bij hoort is:
> $K_n = 1{,}04\ K_{n-1} + 500$
> met $K_0 = 500$
>
> a. Laat zien dat $K_n = 13000 \cdot 1.04^n - 12500$ de oplossing is van deze betrekking.
> b. Maak de beginwaarde twee keer zo groot, dus $K_0 = 1000$. Hoe verandert dan de oplossingsformule voor K_n?

Bij deze opgave gaat het om niet veel meer dan het invullen van de juiste waarden voor a en b in de directe formule, waar overigens wel enkele algebraïsche vaardigheden bij worden verwacht.
Interessant is natuurlijk het inzicht dat de directe formule van de vorm *constante + exponentiële groei* blijkt te zijn, waarbij de constante $b/(1\text{-}a)$ tevens de evenwichtswaarde is. Of X_n zich voor toenemende n naar het evenwicht toe beweegt of er juist vanaf, wordt bepaald door de waarde van a. Als a (in absolute zin) kleiner dan 1 is, convergeert X_n naar de evenwichtswaarde en is er sprake van een stabiel evenwicht. Populair gezegd: als je eenmaal in het evenwicht bent, ga je er niet meer weg. Als a (weer absoluut gezien) groter dan 1 is, is er sprake van divergentie. Bij negatieve a springen de opeenvolgende waarden van X_n steeds om het evenwicht heen en is er sprake van een alternerende oplossingsrij. Wat er precies gebeurt bij de grensgevallen $a = 1$ en $a = -1$, laten we over aan de lezer ($a = 0$ sluiten we uit, want in dat geval blijft er weinig over van de differentievergelijking). De verschillende gevallen (exclusief de grensgevallen) samengevat in een schema:

	$a > 0$	$a < 0$
$\lvert a \rvert < 1$	monotoon convergent	alternerend convergent
$\lvert a \rvert > 1$	monotoon divergent	monotoon divergent

De differentievergelijking $P(t) = -0{,}5\ P(t\text{-}1) + 180$ die was afgeleid bij het dynamische vraag/aanbod model uit de vorige paragraaf, behoort volgens dit schema tot het type 'alternerend convergent'. Maar dat was ook al duidelijk geworden uit de bijbehorende grafieken.
Hoe moet trouwens de evenwichtswaarde die hoort bij de bovenstaande rente-opgave (-12500) geïnterpreteerd worden? En zal dit een stabiel of een instabiel evenwicht zijn?

Verband met grafen en matrices

Bijzonder aardig is het verband tussen overgangsmatrices en stelsels differentievergelijkingen. Het aantrekkelijke hieraan is dat er verschillende onderwerpen op een geïntegreerde manier aan bod kunnen komen. Deze paragrafen sloegen zonder meer aan bij de leerlingen van het Cals College, terwijl het toch de laatste lesweek voor de zomervakantie betrof. Waarschijnlijk was de herkenbaarheid van de stof daar debet aan (ze hadden vlak daarvoor het hoofdstuk Matrices uit *Moderne Wiskunde* gedaan).
Voorbeeld van een opgave (enigszins ingekort):

> **Felle concurrentie op wasmiddelenmarkt**
>
> De fabrikant van het wasmiddel Bioclean strijdt met de nieuwkomer Whitewash om de marktaandelen. Maandelijks stapt zo'n 20% van de kopers van Bioclean over op Whitewash. Daar staat tegenover dat 10% van de kopers van Whitewash de daaropvolgende maand toch weer Bioclean koopt. Aanvankelijk kocht iedereen Bioclean.
> Bij dit bericht ga je een wiskundig model opstellen.
> Extra aannames zijn:
> – er zijn alleen deze twee merken
> – de totale groep kopers is constant.
>
> a. Leg uit dat je de verandering in het aantal kopers Bioclean kunt schrijven als:
> $\Delta B = -0{,}2\ B_{t-1} + 0{,}1\ W_{t-1}$ (t in maanden).
> b. Bereken B_1 en W_1 bij de beginwaarden $B_0 = 100$ en $W_0 = 0$.
> c. Leid het volgende stelsel differentievergelijkingen af:
> $B_t = 0{,}8\ B_{t-1} + 0{,}1\ W_{t-1}$
> $W_t = 0{,}2\ B_{t-1} + 0{,}9\ W_{t-1}$

Nadat de leerlingen een graaf bij de situatie gemaakt hebben, volgt het matrixmodel:

$$\begin{bmatrix} B_t \\ W_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{t-1} \\ W_{t-1} \end{bmatrix}$$

Wellicht verrassend is de volgende stap, namelijk de afleiding van een eerste orde lineaire differentievergelijking voor B_t waar W niet meer in voorkomt:

$$B_t = 0{,}7 \cdot B_{t-1} + 10$$

Op deze vergelijking kan vervolgens de theorie over de directe formule toegepast worden, met als resultaat:

$$B_t = 33{,}3 + 66{,}7 \cdot 0{,}7^t$$

Voor W_t kan hetzelfde gedaan worden, alhoewel het sneller is om W_t rechtstreeks te bepalen uit het gegeven dat de som van de twee marktaandelen 100 is, hetgeen betekent dat $W_t = 100 - B_t$.

Dit voorbeeld laat in een notendop zien hoe differentievergelijkingen en overgangsmatrices met elkaar samenhangen. Het oplossen van een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden is overigens een noodzakelijke vaardigheid voor dit onderdeel.
Op het Cals College waren de leerlingen nu opeens dol op de vorm met de differentievergelijkingen en ze zagen het nut van de matrices niet meer zo. Maar dat kwam ook omdat ze in de les alleen de grafische rekenmachine tot hun beschikking hadden en het doorrekenen van matrices daarop vonden ze maar onhandig.
Bovendien hebben wij ze de laatste les voor de vakantie maar niet vermoeid met grotere matrices of stelsels met meer dan twee vergelijkingen....

Michiel Doorman en Heleen Verhage, Freudenthal Instituut

Literatuur

Stuurgroep Profiel Tweede Fase (1995). *Advies Examenprogramma's havo en vwo – Wiskunde*. Enschede: SLO.

Verhage, H., M. Doorman en W. Reuter (1997). *Lespakket Discrete Dynamische Modellen*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Holleman, A., W. Reuter en H. Verhage (1997). *Trajectenboek wiskunde A VWO*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Voorstel voor eindtermen

De kandidaat kan:

1. bij een tekst een eenvoudige recurrente betrekking opstellen
2. een recurrente betrekking doorrekenen, ook met behulp van een grafische rekenmachine en een spreadsheetprogramma
3. differentievergelijkingen voor exponentiële en logistische groei opstellen
4. tijdgrafieken en webgrafieken tekenen, daaruit eventuele evenwichtspunten afleiden en stabiel en instabiel evenwicht onderscheiden
5. het verschil herkennen en beschrijven tussen een statisch en een dynamisch vraag/aanbod-model uit de economie en een statisch model dynamisch maken
6. uit een dynamisch vraag/aanbod-model een differentievergelijking voor de prijs afleiden
7. de somformule voor meetkundige rijen gebruiken in concrete situaties
8. een 1e orde lineaire differentievergelijking (type $X_t = a\,X_{t-1} + b$) herkennen en een directe formule voor X_t gebruiken
9. een 1e orde lineaire differentievergelijking analyseren met betrekking tot de aspecten: evenwichtswaarde, monotoon/alternerend, convergentie/divergentie
10. bij een situatie een stelsel differentievergelijkingen en een overgangsmatrix opstellen, doorrekenen op de computer, de resultaten daarvan interpreteren en het verband leggen tussen de twee schrijfwijzen
11. een stelsel differentievergelijkingen doorrekenen met behulp van de grafische rekenmachine of computerprogramma en de uitkomsten interpreteren.