

In juli 1996 hield **David Tall** een voordracht op de ICME te Sevilla over het gebruik van informatietechnologie in het wiskundeonderwijs. In dit verslag kijkt hij terug op de ontwikkeling die enthousiaste onderzoekers hebben doorgemaakt en op de mogelijke vooruitgang die inmiddels geboekt is in de werkelijkheid van de klas.

Informatietechnologie en Wiskundeonderwijs

Enthousiasme, mogelijkheden en werkelijkheid

Grote veranderingen

Tijden veranderen. Edele diersoorten die al miljoenen jaren op de aarde verblijven, zoals de walvis en de olifant, dreigen door toedoen van de mensheid uit te sterven. Op dit ogenblik dreigt de familie van wiskundigen te bezwijken onder de druk van de informatietechnologie.

Sir Michael Atiyah zei in 1986:

Zoals de achttiende en negentiende eeuw getuige waren van een geleidelijke vervanging van menselijke arbeid door machines, zo maken we nu in de twintigste eeuw de mechanisering van intellectuele activiteiten mee. Het hersenwerk zal nog eerder overbodig worden dan het handwerk.



fig. 1 Zal de Homo Mathematicus uitsterven?

Routineklussen die we traditiegetrouw in de wiskunde onderwijzen, zijn op een spectaculaire manier overgenomen door de technologie. De caissière in de supermarkt telt niet meer op en berekent niet meer wat ze aan wisselgeld moet teruggeven. Het rekenwerk wordt nu gedaan door software die de streepjescode kan lezen. Betekent dit dat de traditionele wiskundige vaardigheden minder belangrijk zijn geworden?

Informatietechnologie brengt genadeloos het verschil aan het licht tussen het kunnen uitvoeren van standaardvaardigheden en het 'wiskundig denken'. De huidige technologie is nog steeds geen partij voor de creatieve wiskundige geest. Vanwege het logische en ordelijke ontwerp is de technologie niet in staat om te fantaseren, zoals Einstein dat deed toen hij zich afvroeg wat er zou gebeuren als hij in een trein zou zitten die bijna met de snelheid van het licht zou reizen.

Deze verbeeldingskracht is het resultaat van de complexe manier waarop onze hersenen werken. Dat heeft weer te maken met de manier waarop we leren. Een computer kun je opnieuw programmeren door de software te vervangen. Daarbij gaat alle informatie uit het geheugen verloren. Het menselijk vernuft is daarentegen opgebouwd op basis van een levenslange ervaring waarin nieuwe op vroegere ervaringen worden gestapeld.

Ondertussen verandert de technologie in zo'n stormachtig tempo dat het voorspellen van iedere volgende ontwikkeling een hachelijke onderneming is.

Als gevolg van die snelle verandering jagen enthousiasmeringen voortdurend de grenzen van de technologie achterna. Vaak houden ze zich al met de volgende innovatie bezig vóórdat de samenleving gewend is geraakt aan de vorige. Dat betekent dat effecten op langere termijn ver na de veranderingen aan het licht komen.

Kunnen we wel een inschatting maken van de betekenis van de informatietechnologie? Ik heb gekozen voor een route waarin ik me bewust ben van de technologische veranderingen, maar waarin ik me vooral concentreer op de wisselwerking van de technologie met het karakter van het menselijk leren.

Verschillende vormen van wiskundige kennis

Als eerste stap kijken we naar het karakter van wiskundige kennis en gaan we na hoe de technologie deze kennisstructuur beïnvloedt.

Pas na miljoenen jaren menselijke evolutie ontwikkelden we de taal. De eerste vorm van wiskunde duid ik aan met

het begrip *enactief*. Ik bedoel hiermee dat men zich bezighield met de fysieke manipulatie van objecten. Dit is ook de eerste vorm die we tegenkomen in de ontwikkeling van kinderen en het vormt de eerste fase van het wiskundeonderwijs.

Beeldrepresentaties komen voor in grottekeningen en zijn 30 000 of 40 000 jaar oud. De *geschreven* taal ontwikkelde zich in Phoenicië zo'n 5300 jaar geleden. Toen was er al een rekennotatie in zwang in het handelsverkeer. Het echte symbolisme voor het tellen en meten van de rekenkunde ontwikkelde zich in verschillende vormen in antieke beschavingen, zoals in Mesopotamië en Egypte. Tenslotte ontwikkelden de Grieken ongeveer 2500 jaar geleden de abstracte theorie van de meetkunde op een *verbale* manier in de *Elementen* van Euclides.

Manipuleerbare algebraïsche symbolen werden betrekkelijk recent ingevoerd in de zestiende eeuw. Dat leidde tot een opbloei van de analyse in de zeventiende eeuw. Juist de mogelijkheid om met symbolen te kunnen rekenen heeft geleid tot de reusachtige versnelling van het menselijke succes van de laatste driehonderd jaar. Dit werd dan ook het centrale aandachtspunt in het wiskundeonderwijs.

In de laatste eeuw zijn pogingen ondernomen om het geheel van wiskundige kennis te organiseren in een formele theorie die gebaseerd is op verbale definities en logische afleidingen.

Vóór de komst van de computer kenden we dus verschillende vormen van wiskunde:

1. *enactieve* wiskunde met fysieke handelingen op bestaande objecten
2. *visuele* verbaal vastgelegde wiskunde, waarin fysieke eigenschappen van objecten worden beschreven en waarin een systematische deductieve theorie wordt opgebouwd, zoals in de Euclidische meetkunde
3. *symbolische* wiskunde (rekenen, algebra, analyse, enzovoorts) die voortkomt uit acties op concrete objecten (zoals het tellen) en die zich ontwikkelt door middel van berekeningen en het symbolisch manipuleren
4. een combinatie van 2. en 3. waarin het symbolisme wordt gecombineerd met de grafische representatie
5. *formele* wiskunde met begrippen die gedefinieerd zijn door verbale/symbolische axioma's en waarin eigenschappen worden afgeleid door formele bewijzen.

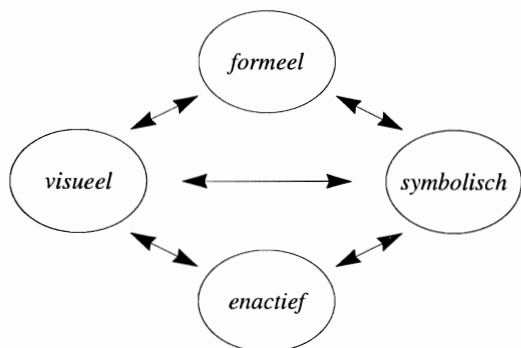


fig. 2

Deze vormen van wiskunde staan op een ingewikkelde manier met elkaar in verband. De verschillen in karakter kunnen inzicht geven in het wiskundige leerproces.

Nieuwe mogelijkheden voor de computer in het wiskundeonderwijs

De ontwikkeling van computertechnologie heeft op verschillende manieren een bijdrage geleverd aan de kennisstructuur van de wiskunde. In het begin concentreerde de komst van de computer zich op numerieke berekeningen. Vervolgens werd daar een *grafisch* scherm aan toegevoegd. Dat werd al snel gevolgd door *enactieve* gebruiksmogelijkheden met de mogelijkheid tot keuze en verandering van objecten op het scherm.

Tot op heden gebruiken we de computer nog nauwelijks voor formele bewijzen in het wiskundeonderwijs. Er bestaat echter wel degelijk software die stellingen kan bewijzen en controleren. Zo is de computer bij het bewijs van de Vierkleurenstelling gebruikt om lange procedures door te rekenen die het vermogen van het individu te boven gaan.

Alhoewel de moderne computers met manipuleerbare visuele beeldschermen beschikken over enactieve mogelijkheden voor enactief gebruik, blijven ze toch nog steeds afhankelijk van het verstand van een wiskundige die gedachtenexperimenten uitvoert om te beslissen wat belangrijk is en wat er bewezen moet worden.

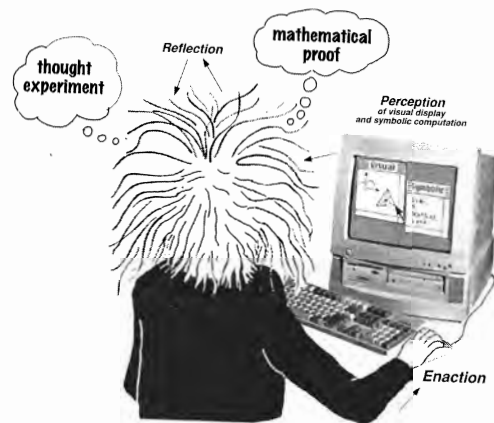


fig. 3 De creatieve menselijke geest en het algoritmisch denken van de computer

Vóórdat computers algemeen beschikbaar kwamen, bestond er grote aarzeling over de waarde van de computer in het onderwijs.

Het is niet waarschijnlijk dat het merendeel van de leerlingen in deze leeftijd de computer net zo'n efficiënt, nuttig en handig hulpmiddel bij het rekenen zal vinden als de rekenliniaal of het tabellenboekje. (Mathematical Association, *Mathematics 11 to 16*, 1974)

Deze illusies waren even snel verdwenen als de rekenlinialen en de tabellenboekjes.

Numerieke algoritmen

De eerste microcomputers (bijvoorbeeld de Apple in 1976) werden verkocht met de programmeertaal BASIC. De eerste enthousiastelingen waren dus wiskundigen die met hun leerlingen numerieke methoden gingen programmeren. Deze enthousiastelingen geloofden dat je door te programmeren beter het wiskundige proces kon begrijpen. In werkelijkheid waren er in die tijd te weinig computers om wijdverspreid programmeren voor studenten mogelijk te maken. Onderzoek wees uit dat leerlingen die in BASIC programmeerden een beter inzicht hadden in het gebruik van letters voor variabelen in de algebra (zie bijvoorbeeld Tall & Thomas, 1991). Maar BASIC kreeg een slechte pers omdat het een weinig gestructureerde programmeertaal was en verdween van het toneel.

Grafische visualisering

Begin jaren tachtig luidden beeldschermen met een hoge resolutie de volgende fase in. Grafieken als representaties van functies verschenen op het scherm en leerlingen leerden programmeren in LOGO.

Deze visuele mogelijkheden leidden ook tot de experimentele studie van chaos en fractals door wiskundigen en tot een nieuwe grafische benadering van het onderwijs in meetkunde, statistiek, analyse en differentiaalvergelijkingen. De leerling werd nu geholpen door het in beeld brengen van wiskundige ideeën. Dit was een tijd van grote creativiteit, waarin software werd geschreven voor het visualiseren van wiskundige begrippen.

Spoedig werd duidelijk dat een visuele benadering van grafieken leidde tot een breder inzicht en dat dit niet ten koste ging van de corresponderende symbolische vaardigheden (zie bijvoorbeeld Heid, 1988, Palmiter, 1991). Maar de keerzijde was duidelijk: leerlingen, die niet voldoende in hun mars hadden om de betekenis van grafieken te kunnen doorgronden, ontwikkelden soms ernstige misconcepties.

Een klassiek voorbeeld is in dit verband de situatie waarin jonge leerlingen naar een grafiek kijken die het afkoolen van een vloeistof voorstelt. Ze interpreteren het bewegen van de pixels op het scherm als een plotselinge verandering in temperatuur (Linn & Nachmias, 1987).

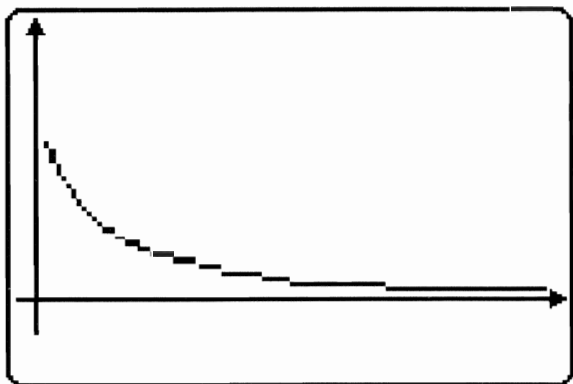


fig. 4 Plotselinge veranderingen van temperatuur

Enactieve controle

In 1984 werd de muis ingevoerd. Daarmee kreeg de computer enactieve gebruiksmogelijkheden. In plaats van het intypen van een regel symbolen, kan de gebruiker het scherm controleren met intuïtieve bewegingen van de hand. Daarmee ontstaat een heel andere benadering van het leren waarin het actieve onderzoeken wordt gestimuleerd. Dit gaat ten koste van het vooraf aanleren van procedurele berekeningen.

Een voorbeeld. Statistiek wordt vaak onderwezen op basis van een receptmatige aanpak. Eenvoudigweg omdat maar weinig docenten, laat staan leerlingen, begrijpen hoe de onderliggende formele theorie in elkaar zit. Software die een enactieve onderzoeksomgeving biedt, kan gebruikt worden om een gevoel te geven van het karakter van statistische data. Zo kan de computer gebruikt worden om een regressielijn te verplaatsen, om zo op het oog en tegelijk numeriek een beste aanpassing van de lijn bij de punten te krijgen.

Wiskundig complexe begrippen krijgen zo een visueel-ruimtelijke betekenis, zonder dat men zich hoeft te verdiepen in de berekeningen die de computer maakt.

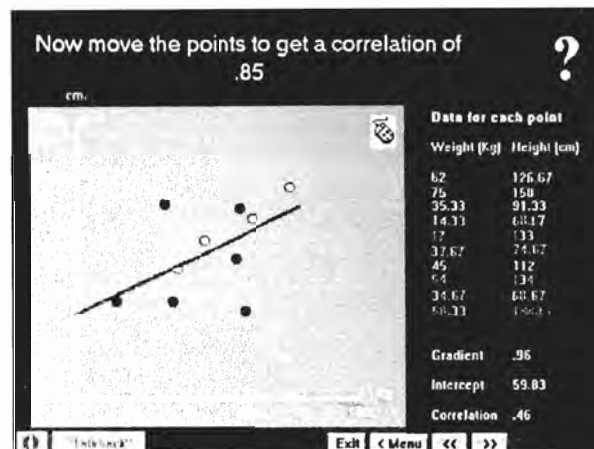


fig. 5 Visuele en enactieve benadering van de statistiek

Interactieve meetkundeprogramma's bieden enactieve onderzoeksomgevingen waarin meetkundige figuren een nieuwe dynamische betekenis verwerven.

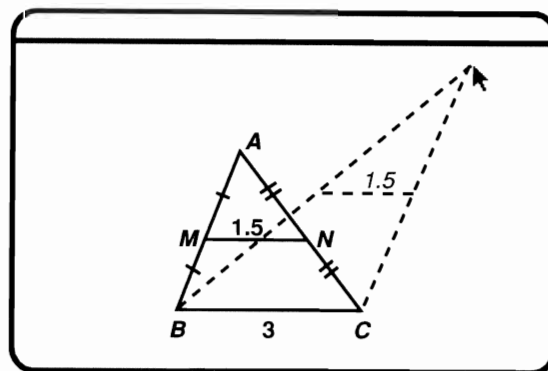


fig. 6 Een driehoek met middenparallel veranderen

In de driehoek ABC zijn M en N de middens van AB en AC . Door punt A te verslepen, wordt duidelijk dat de lengte van MN altijd de helft is van BC . De figuur krijgt een nieuwe dynamische betekenis. Zo ontstaat een rijke omgeving voor het doen van onderzoek en het opstellen van vermoedens.

Systemen voor computeralgebra

In 1984 stond in de *American Mathematical Monthly* een paginagrote advertentie voor het computeralgebra systeem MACSYMA. Deze software kon:

... vereenvoudigen, ontbinden in factoren, formules uitwerken, vergelijkingen analytisch of numeriek oplossen, differentiëren, bepaalde en onbepaalde integralen uitrekenen, functies ontwikkelen in Taylo- en Laurentreeksen.

In minder dan tien jaar werden computers achtereenvolgens uitgerust met *numerieke*, *grafische* en *symbolische* mogelijkheden. Elk van die mogelijkheden biedt een nieuwe ingang tot wiskundige begripsvorming, leidend tot de drie presentaties van functies.

De herziening van het Amerikaanse analyseonderwijs is gebaseerd op een breed scala van software dat gebruik maakt van de verschillende representaties. Er zijn aanwijzingen dat leerlingen leren denken in computeralgebra systemen waarbij ze oplossingen van problemen zó gaan formuleren dat die kunnen worden uitgevoerd door een computeralgoritme (Davis et al, 1992). Maar er zijn ook aanwijzingen dat veel leerlingen die werken met computeralgebra systemen niet begrijpen wat er in de computer gebeurt en dat ze de wiskundige ideeën niet meer op de manier met elkaar in verband brengen zoals we dat gewend zijn. Leerlingen gebruiken grafiekenprogramma's, bijvoorbeeld, om oplossingen van vergelijkingen te bekijken zonder dat ze die in verband brengen met de bijbehorende vergelijkingen. Caldwell (1995) verwachtte dat leerlingen de wortels en de asymptoten van de rationale functie

$$f(x) = \frac{x(x-4)}{(x+2)(x-2)}$$

met algebraïsche middelen zouden kunnen vinden. Het resultaat was echter dat ze benaderingen zoals 0.01 en 3.98 uit de grafiek gingen afgelezen. Hunter (1993) vond dat een derde van de leerlingen die een computeralgebra systeem gebruikte, de volgende vraag kon beantwoorden: 'Wat kun je over u zeggen als $u = v + 3$ en $v = 1$?' Ze hadden geen ervaring in het invullen van waarden in formules.

De werkelijkheid van het klaslokaal zou dus wel eens anders kunnen zijn dan de visionaire mogelijkheden die de enthousiastelingen zien.

Draagbare rekenmachines

De technologie breidde zich uit van desktopmachines tot draagbare rekenmachines en tot computers voor persoon-

lijk gebruik. Rekenmachines met slechts vier functietoetsen werden uitgebreid met toetsen voor wetenschappelijke functies, met mogelijkheden om te programmeren en met mogelijkheden voor grafische presentaties.



fig. 7 Handpalmcomputer met mogelijkheden voor algebraïsch en meetkundig onderzoek

Op dit ogenblik beschikken we over handpalmcomputers die alle numerieke en symbolische algoritmen kunnen uitvoeren die standaard zijn op de examens voor wiskunde en bovendien een implementatie bevatten van *Cabri Géometre* om meetkundig onderzoek mee te kunnen doen. Deze machines hebben alle mogelijkheden die we tot nu toe hebben besproken. Bovendien hebben ze het voordeel dat ze op elk ogenblik en op elke plaats door leerlingen kunnen worden gebruikt. Een nadeel is dat ze geen volledig enactieve omgeving bieden.

Multimedia

In de laatste twee, drie jaar zien we een ontwikkeling van multimedia met interactieve software. Dit biedt de gebruiker binnen één software-omgeving een groot scala aan mogelijkheden tot uitleg in tekst, geluid en video. Zo kunnen de kleinere interactieve eenheden van de tachtiger jaren weer terugkeren, maar dan ingebed in een meer coherente totaalomgeving.

Het World Wide Web

Onlangs is het world-wide-web realiteit geworden in het onderwijs. Daarmee is het mogelijk informatie tussen individuen uit te wisselen over de hele wereld. World-wide wiskundecursussen voor multimedia komen nu beschikbaar. Leerlingen zullen in toenemende mate de vrijheid krijgen om software te gebruiken op een tijdstip en plaats die hen het beste schikt.

De belofte lijkt echter mooier te zijn dan de werkelijkheid. Het internet raakt verstopt door het grote aantal gebruikers en de beschikbare bandbreedte is vaak te smal om grote hoeveelheden data voor beeld en geluid te kunnen transporteren.

Toch gaan de veranderingen snel en een grotere capaciteit van de apparatuur ligt in het verschiet zodat een wereldwijde informatiesnelweg onontkoombaar lijkt.

Op weg naar een theorie

Hoe kunnen we deze veranderingen plaatsen in het onderwijs? Het is duidelijk dat informatietechnologie een eigen plek heeft verworven en dat we als wiskundedocenten een manier moeten vinden om ermee om te gaan. Veel docenten zijn argwanend over een technologie die dingen doet die zij een leven lang hebben onderwezen. Toch zullen we op een of andere manier moeten proberen de nieuwe faciliteiten op hun waarde in te schatten.

Zelf koos ik in mijn werk een route die werd gedictieerd door de openvolging van de technologische ontwikkelingen. Eerder deed ik onderzoek naar het leren begrijpen van het limietbegrip door studenten. Ik kwam in aanraking met de computer toen die grafische mogelijkheden kreeg en ik ontwikkelde een grafische aanpak van de analyse. Tegelijkertijd werkte ik samen met een stel collega's die betrokken waren bij het programmeren van numerieke algoritmen. In de loop van de tijd probeerden we de nieuwe ideeën van symbolische manipulatie te verwerken. Om de lijnen van visualisatie en symbolisatie bij elkaar te krijgen, dacht ik na over de manier waarop de mens omgaat met het *waarnemen* van de wereld om zich heen, het *ingrijpen* op die wereld om te overleven en het *reflecteren* op het persoonlijke handelen om het effect zo groot mogelijk te krijgen.

Deze combinatie van *waarnemen*, *actie* en *reflectie* hielp me bij de formulering van een eigen visie op de cognitieve ontwikkeling. Ik zag het contrast tussen een 'object-georiënteerde' wiskunde (zoals in de meetkunde) en een 'actie-georiënteerde' wiskunde (zoals bij het tellen en meten). Ik kwam ook tot de ontdekking dat door het reflecteren op deze ervaringen experts een 'eigenschapsgeoriënteerde' wiskunde wisten te ontwikkelen met axioma's en formele afleidingen.

Voor het aanvankelijke leerproces kan een combinatie van een enactieve, visuele en symbolische aanpak een praktische oplossing betekenen. Het gebruik van de computer zou daar wel eens haar nut kunnen bewijzen.

Enactieve en visuele wiskunde

De computer beschikt over mogelijkheden om visuele wiskundige objecten op een enactieve manier te behandelen. Daarmee wordt op een primitief enactief niveau betekenis gegeven aan begrippen. De computer levert zo een 'cognitieve kern' van waaruit zich progressief een theorie kan ontwikkelen (Tall, 1989). Dit kan niet alleen in de meetkunde, maar ook in alle andere gebieden van de wiskunde plaatsvinden. Bijvoorbeeld bij het oplossen van een eerste orde differentiaalvergelijking.

Als beginpunt zie ik de afgeleide op een primitieve visuele manier als de helling van een grafiek. In het begin praat ik nog niet over raaklijnen, of lokaal lineaire benaderingen, of andere formele noties. Door eenvoudigweg grafieken op het scherm uit te vergroten, kan men zien dat de meeste grafieken 'lokaal recht' zijn. Dat wil zeggen:

onder een sterke vergroting *nemen we ze waar* als rechte lijnen. Dit kan worden gekoppeld aan numerieke en symbolische benaderingen waarmee de afgeleide een berekenbare betekenis kan krijgen. Dit kernidee van lokale rechtheid kan ook gebruikt worden om de oplossing van het omgekeerde probleem in beeld te brengen: het construeren van de grafiek als de helling gegeven is.

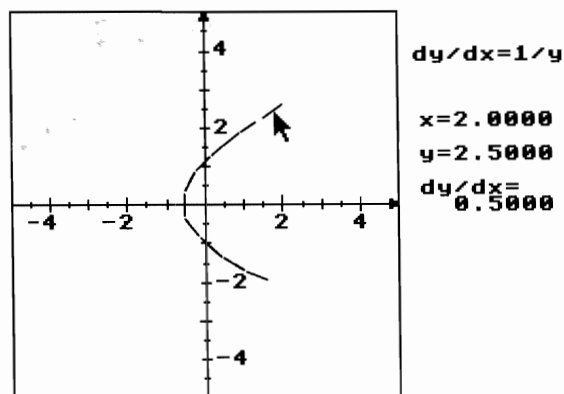


fig. 8 Het enactief oplossen van een differentiaalvergelijking

In deze context kan software de waarde van de helling gebruiken om een klein lijnsegment te tekenen met de gewenste helling. Een gebruiker die dit allemaal zelf kan regelen, bijvoorbeeld met een muis of met pijltjestoetsen, kan zo de lijnsegmentjes samen plakken om een oplossing van de vergelijking op te bouwen. Deze oplossing is lokaal recht. In feite is het beeld opgebouwd uit een benadering met lijnsegmenten waarvan de hellingen worden gegeven door de differentiaalvergelijking.

Zo kan de computer een omgeving bieden waarin de leerling de wiskundige ideeën op een fysieke manier kan ervaren. Het gaat om het kijken en de lichamelijke beweging zonder de noodzaak van het symbolisme en de berekeningen die nodig zijn om een oplossing te produceren. Zijn eenmaal de inzichten op een dergelijke manier opgebouwd, dan blijft het nodig om een oplossing op een meer precieze kwantitatieve manier te construeren. De symbolische oplossing van zo'n probleem vereist echter heel andere mentale activiteiten.

Symbolische wiskunde

Geïnspireerd door een openvolging van denkers over de cognitieve ontwikkeling van wiskundige processen en begrippen, waaronder Dubinsky (1991) en Sfard (1991), had ik het geluk samen te werken met Eddie Gray. We ontwikkelden een nuttig gezichtspunt waarmee we niet alleen konden analyseren hoe individuen het symbolisme hanteren, maar ook hoe onze wisselwerking is met het symbolisme dat door de computer wordt gemanipuleerd.

We constateerden dat de symbolen van de rekenkunde, de algebra, de analyse en vele andere wiskundige contex-

kunnen geven. Toch kunnen deze leerlingen het moeilijk blijven vinden om het symbolisme te verbinden met de visuele ideeën. Ondertussen zullen de meer succesvolle leerlingen zich wél iets kunnen voorstellen bij het wiskundig netwerk. Ze zullen een enorm voordeel hebben van het gebruik van de computer doordat dat een uitbreiding vormt van wiskundige mogelijkheden.

De wisselende rollen van het Visuele en het Symbolische

Om drie pizza's te verdelen tussen vier personen kan men als volgt te werk gaan. Verdeel eerst twee pizza's in tweeën en geef ieder een half stuk. Verdeel vervolgens de laatste pizza in vieren en geef ieder een kwart. Visueel zien we zo dat iedere persoon driekwart van een pizza krijgt. De handeling van het delen van drie door vier kan symbolisch worden weergegeven met een breuk.

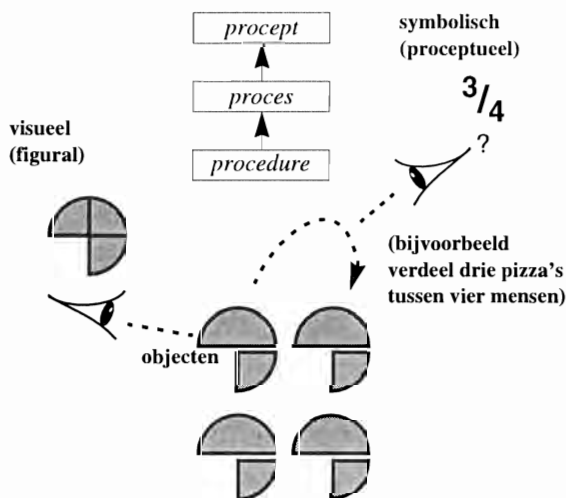


fig. 10 Ligt de nadruk op objecten als figuren of op acties gesymboliseerd als procepten?

Het visuele begrip geeft een realistische en praktische kijk op de taak. Het symbolische begrip krijgt pas betekenis na een lange reeks van mentale bundelingen door het tellen van getallen en het idee van gelijkwaardige breuken. Het visuele is in het algemeen beter toegankelijk voor leerlingen. Het symbolische is een basis voor groei op lange termijn binnen de wiskunde.

Deze twee passen echter niet altijd gemakkelijk bij elkaar. Denk maar eens aan visuele modellen die passen bij de som of het product van twee breuken (ook negatieve breuken!). Een concentratie alleen op het symbolische kan leiden tot een procedurele aanpak die steeds complexer wordt als het aantal geïsoleerde regels toeneemt. Een concentratie alleen op het visuele kan inzicht geven over wat er aan de hand is in een beperkte context en met beperkte mogelijkheden tot generalisatie.

De docent kan hierbij de computer een belangrijke rol laten spelen. De computer kan de algoritmes voor visuele en symbolische manipulatie uitvoeren. Daardoor kan de leerling zich op belangrijke zaken concentreren. Vooraf

of tijdens het leren van verwante symbolische procedures kan de leerling zich een totaaloverzicht van de ideeën opbouwen. Met behulp van technologie kan zo een nieuw evenwicht ontstaan in wiskundige ideeën.

Blijvende behoefte aan docenten wiskunde

De levendige ontwikkeling van informatietechnologie daagt voortdurend uit tot voorspellingen, zowel in het algemeen als in de wiskunde:

Iedereen die de rol van de technologie in de wiskunde wenst te beschrijven, stelt zich voor een taak die vergelijkbaar met het beschrijven van een nieuwe actieve vulkaan – de wiskundige berg verandert voor onze ogen ... (Kaput, 1992).

Het gaat niet alleen om het leren hanteren van wiskundige routines, maar om het kunnen overleven in een nieuwe technologische wereld. Er zijn aanwijzingen dat het onvoldoende is om leerlingen alleen maar procedures aan te bieden als die niet tegelijkertijd op een geschikte manier zijn ingepast in een cognitieve structuur waarmee verbanden gelegd kunnen worden tussen de verschillende processen, begrippen en representaties.

In deze nieuwe wereld heeft de creatieve wiskundige nog steeds de rol om enthousiast de nieuwe voortschrijdende mogelijkheden te propageren. De realiteit van het leerproces blijft echter vragen om de reflectieve begeleiding door de bekwame docent.

Literatuur

- Appel, K. & Haken, W. (1976). 'The solution of the four colour map problem', *Scientific American* (October), pp. 108-121.
- Atiyah, M. F. (1986). 'Mathematics and the Computer Revolution'. In: A. G. Howson & J.-P. Kahane (eds.), *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Caldwell, J. H. (1995). 'Assessment and graphing calculators'. In: L. Lum (ed.) *Proceedings of the Sixth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, pp.99-105. Reading MA: Addison-Wesley.
- Cringely, R. X. (1996). *Accidental Empires, (How the boys of Silicon Valley make their millions, battle foreign competition, and still can't get date)*. New York: Penguin.
- Davis, B., H. Porta & J. Uhl (1992). 'Calculus & Mathematics: addressing fundamental questions about technology'. In: *Proceedings of the Fifth International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, Addison-Wesley, pp. 305-314.
- Dubinsky, E. (1991). *Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking*. In D.O. Tall (ed.). *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht: Kluwer, pp. 95-123.

- Evans, C. (1983). *The Making of the Micro*. Oxford: Oxford University Press.
- Gates, W. (1996). Quotation of a statement made in the TV programme, *Triumph of the Nerds*, broadcast internationally in Spring 1996.
- Goldenberg, P. (1988). 'Mathematics Metaphors and Human Factors. Mathematical, Technical and Pedagogical Challenges in the Educational Use of Graphical Representations of Functions', *Journal of Mathematical Behavior* 72, pp. 135-173.
- Gray, E. M. & D.O. Tall (1994). 'Duality, Ambiguity and Flexibility. A Proceptual View of Simple Arithmetic', *Journal for Research in Mathematics Education* 26, pp. 115-141.
- Heid, K. (1988). 'Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool', *Journal for Research in Mathematics Education* 19, pp. 3-25.
- Hughes Hallett, D. (1991). 'Visualization and Calculus Reform.' In: W. Zimmermann & S. Cunningham (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, MAA Notes No. 19, pp. 121-126.
- Hunter, M., J.D. Monaghan & T. Roper. (1993). 'The effect of computer algebra use on students' algebraic thinking'. In: R. Sutherland (ed.), *Working Papers for ESRC Algebra Seminar London*: Institute of Education.
- Kaput, J. J. (1992). 'Technology and Mathematics Education.' In: D. Grouws (ed.), *Handbook on research in mathematics teaching and learning*, New York: Macmillan, pp. 515-556.
- Linn, M. C. & R. Nachmias, (1987). 'Evaluations of Science Laboratory Data: The Role of Computer-Presented Information', *Journal of Research in Science Teaching* 24 (5), pp. 491-506.
- Mathematical Association, (1974). *Mathematics 11-16*.
- Palmiter, J. R. (1991). 'Effects of Computer Algebra Systems on Concept and Skill Acquisition in Calculus', *Journal for Research in Mathematics Education* 22, pp. 151-156.
- Sfard, A. (1991). 'On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin', *Educational Studies in Mathematics*, 22 (1), pp. 1-36.
- Tall, D. O. & M. O. J. Thomas, (1991). 'Encouraging Versatile Thinking in Algebra using the Computer', *Educational Studies in Mathematics* 22 (2), pp. 125-147.
- Tall, D. O. (1989). 'Concept Images, Generic Organizers, Computers & Curriculum Change', *For the Learning of Mathematics* 9 (3), pp. 37-42.
- Tall, D. O. (1993). 'Computer environments for the learning of mathematics'. In: R. Biehler, R. Scholtz, R.W. Sträßer, B. Winkelmann (eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline – The State of the Art*. Dordrecht: Kluwer, pp. 189-199.

Internetcursussen voor docenten exacte vakken schooljaar 1997-1998

Het ministerie van OC&W heeft onlangs de nota *Investeren in voorsprong* over het ICT beleid voor het onderwijs gepresenteerd. Het ministerie wil het gebruik van Internet in het onderwijs gaan stimuleren. De eerste stap is dat u als docent kennis maakt met Internet en de nieuwe didactische mogelijkheden daarvan. Het 'Centrum voor Didactiek van de Wiskunde en Natuurwetenschappen' (CD- β) van de Universiteit Utrecht biedt daarom een aantal Internetcursussen voor docenten in de exacte vakken aan.

A1 & A2: Basis cursus Internet

In deze cursus staan de beginselen van Internet centraal, met daarin specifiek aandacht voor het gebruik van Internet in de bèta-vakken van het voortgezet onderwijs. Onderwerpen als: wat is Internet, hoe kom ik op Internet, nieuwsgroepen, het world wide web en het e-mail programma eudora zullen de revue passeren.

In het practicumgedeelte zal aan de hand van concrete voorbeelden gewerkt worden. De cursist zal voor het eerst ervaren wat het is om op Internet te surfen.

Datum A1: donderdag 18 september 1997.

Datum A2: donderdag 25 september 1997.

Doelgroep: docenten exacte vakken (VBO/MAVO, HAVO/VWO, MBO).

Omvang: één bijeenkomst van 18.30 tot 21.30 uur.

Prijs: f 150,-

A3 & A4: Vervolg cursus Internet

Deze cursus sluit aan op de 'Basis cursus' en wordt uitgevoerd in twee varianten: een voor docenten natuur- en scheikunde en een voor docenten wiskunde en biologie.

De didactische mogelijkheden van het gebruik van Internet in het eigen vak staan in deze cursus centraal. Aan de hand van opdrachten, die u zelf uitvoert en in de klas uitprobeert, worden de gebruiksmogelijkheden van Internet in de klas onderzocht. De cursus is een handreiking voor docenten om Internet in te zetten als werkvorm in het nieuwe programma van de bovenbouw HAVO/VWO, waarbij zelfstandig leren van de leerling centraal staat.

Datum A3: (natuurkunde en scheikunde) donderdag 6 november en 27 november 1997.

Datum A4: (wiskunde en biologie) donderdag 30 oktober en 20 november 1997.

Doelgroep: docenten exacte vakken bovenbouw voortgezet onderwijs.

Omvang: twee bijeenkomsten van 18.30 tot 21.30 uur.

Prijs: f 250,-

Inlichtingen en aanmeldingsformulieren:

Jenny Andriese, tel 030-253 11 79

email: J.Andriese@fys.ruu.nl

Homepage CDbeta: <http://www.fys.ruu.nl/~csmeut>