

Een klassiek onderdeel van Economie II (VWO) en handelswetenschappen (HAVO) is het Renterekenen. **Victor Hermans** geeft een korte inleiding in de belangrijkste technieken en probeert de nieuwe ontwikkelingen in kaart te brengen.

Rekenen met rente

Sinds jaar en dag is het onderwerp *Renterekenen* een vast onderdeel van de programma's Economie II (VWO) en Handelswetenschappen (HAVO). Het komt als apart vak voor op het curriculum van veel HEAO's, is een examenonderdeel van het Staatspraktijkdiploma (SPD) en speelt een belangrijke rol in de verzekeringswiskunde.¹

De meningen over renterekenen lopen sterk uiteen. Velen waarderen het om zijn wiskundige elegantie en praktische bruikbaarheid. Anderen vinden het een stoffig vak of hebben er simpelweg een broertje aan dood, omdat het nu eenmaal wiskunde is (of lijkt).

Essentieel in dit vak is het begrip samengestelde intrest ofwel rente op rente. Wat is rente eigenlijk? Het is geld betaald voor het gebruik van geld. Als de rente uitsluitend over de hoofdsom berekend wordt, is er sprake van enkelvoudige intrest. Berekent men de rente over de hoofdsom plus de rente dan spreekt men van samengestelde intrest. Hierover gaat de rest van dit verhaal.

Aanpak met tabellen

We kunnen zes basisgevallen onderscheiden en voor alle situaties behalve de laatste bestaan er aparte tabellen.²

Geval 1

Iemand stort nu (stel op 1 januari) 1000 gulden op een spaarrekening en wil weten wat het saldo na vijf jaar zal zijn. Het rentepercentage is 5% en de rentebijschrijving geschiedt aan het eind van elk jaar. Het antwoord vinden we in tabel I, kolom 5%, regel 5. Daar staat wat de opbrengst van een gulden zou zijn, te weten 1,24618194.

S₁ I. TAFELS VOOR (1,0425)ⁿ; (1,045)ⁿ; (1,0475)ⁿ; (1,05)ⁿ.

n	4¼ %	4½ %	4¾ %	5 %
1	1,0425	1,045	1,0475	1,05
2	1,0868 0625	1,0920 25	1,0972 5652	1,1025
3	1,1329 9552	1,1411 6613	1,1493 7592	1,1576 25
4	1,1811 4783	1,1925 1860	1,2039 7128	1,2155 0625
5	1,2313 4661	1,2461 8194	1,2611 5991	1,2762 8156
6	1,2836 7884	1,3022 6012	1,3210 6501	1,3400 9564
7	1,3382 3519	1,3608 6183	1,3838 1560	1,4071 0042
8	1,3951 1018	1,4221 0061	1,4495 4684	1,4774 5544
9	1,4544 0237	1,4860 9514	1,5184 0031	1,5513 2822
10	1,5162 1447	1,5529 6942	1,5905 2433	1,6288 9463

Tafel I

Het antwoord is dus: $1000 \times S_{5|5} = 1276,28$.

S betekent slotwaarde, spreek uit: *grote S*.

(Bij enkelvoudige intrest zou de eindwaarde zijn:

$$f 1000,- + (5 \times 0,05 * f 1000,-) = f 1250,-)$$

Geval 2

Een persoon heeft recht op 2000 gulden over vijf jaar, maar wil het geld liever nu hebben. Hij spreekt met de tegenpartij 5% rente af en ontvangt dan

$$2000 \times A_{5|5} = 2000 \times 0,78352617 = 1567,05.$$

Zie tabel II, grote A (aanvangswaarde), kolom 5%, regel 5.

A₁ II. TAFELS VOOR $\frac{1}{(1,0425)^n}$; $\frac{1}{(1,045)^n}$; $\frac{1}{(1,0475)^n}$; $\frac{1}{(1,05)^n}$.

n	4¼ %	4½ %	4¾ %	5 %
1	0,9592 3261	0,9569 3780	0,9546 5394	0,9523 8095
2	0,9201 2721	0,9157 2995	0,9113 0414	0,9070 2948
3	0,8826 1603	0,8762 0660	0,8700 3737	0,8638 3760
4	0,8466 3402	0,8385 6134	0,8305 8460	0,8227 0247
5	0,8121 1902	0,8024 5105	0,7929 2086	0,7835 2617
6	0,7790 1105	0,7678 9574	0,7569 6502	0,7462 1540
7	0,7472 5281	0,7348 2846	0,7226 3964	0,7106 8133
8	0,7167 8926	0,7031 8513	0,6898 7077	0,6768 3936
9	0,6875 6764	0,6729 0443	0,6585 8785	0,6446 0892
10	0,6595 1730	0,6439 2768	0,6287 2349	0,6139 1325

Tafel II

Geval 3

Stel dat je vijf jaar lang aan het begin van het jaar 3000 gulden op een spaardeposito zet, met onmiddellijke ingang en weer tegen 5%, wat zal het saldo dan na vijf jaar zijn? Het eerste bedrag trekt dus vijf jaar rente, de laatste storting slechts één jaar. Het antwoord vinden we in tabel III: $3000 \times s_{5|5} = 3000 \times 5,80191281 = 17.405,74$.

Spreek s uit als *kleine s*.

S₂ III. TAFELS VOOR $\Sigma(1,045)^n$; $\Sigma(1,05)^n$; $\Sigma(1,055)^n$; $\Sigma(1,06)^n$ beginnende met $n = 1$.

n	4½ %	5 %	5½ %	6 %
1	1,045	1,05	1,055	1,06
2	2,1370 25	2,1525	2,1680 25	2,1836
3	3,2781 9113	3,3101 25	3,3422 6638	3,3746 16
4	4,4707 0973	4,5256 3125	4,5810 9103	4,6370 9296
5	5,7168 9166	5,8019 1281	5,8880 5103	5,9753 1854
6	7,0191 5179	7,1420 0845	7,2668 9384	7,3938 3765
7	8,3800 1362	8,5491 0888	8,7215 7300	8,8974 6791
8	9,8021 1423	10,0265 6432	10,2562 5951	10,4913 1598
9	11,2882 0937	11,5778 9254	11,8753 5379	12,1807 9494
10	12,8411 7879	13,2067 8716	13,5834 9825	13,9716 4264

Tafel III

Geval 4

Een student wint een studiebeurs die bestaat uit vijf jaarlijkse uitkeringen van 4000 gulden, de eerste keer na één jaar. Hij wil echter het bedrag direct uitgekeerd hebben. De tegenpartij gaat akkoord en rekent 5% rente. Wat krijgt de student? Tabel IV levert het antwoord:
 $4000 \times a_{\overline{5}|5} = 4000 \times 4,32947667 = 17.317,91.$

a_{IV} IV. TAFELS VOOR $\Sigma(r,045)^{-n}$; $\Sigma(r,05)^{-n}$; $\Sigma(r,055)^{-n}$; $\Sigma(r,06)^{-n}$ beginnende met $n=1$.

n	4 1/2 %	5 %	5 1/2 %	6 %
1	0,9569 3780	0,9523 8095	0,9478 6730	0,9433 9623
2	1,8726 6775	1,8594 1043	1,8463 1971	1,8333 9267
3	2,7489 6435	2,7232 4803	2,6979 3338	2,6730 1195
4	3,5875 2570	3,5459 5050	3,5051 5012	3,4651 0561
5	4,3899 7674	4,3294 7667	4,2702 8448	4,2123 6379
6	5,1578 7248	5,0756 9207	4,9955 3031	4,9173 2433
7	5,8927 0094	5,7863 7340	5,6829 6712	5,5823 8144
8	6,5958 8607	6,4632 1276	6,3345 6599	6,2097 9381
9	7,2687 9050	7,1078 2168	6,9521 9525	6,8016 9227
10	7,9127 1818	7,7217 3493	7,5376 2583	7,3600 8705

Tafel IV

Geval 5

Een Amerikaan wint in een loterij een prijs van een miljoen dollar en wil dat liever in vijf termijnen hebben. Loterij-inkomsten telt de Amerikaanse fiscus – anders dan bij ons – bij het gewone inkomen en je zou daardoor in een ongunstig belastingtarief komen.

Wat krijgt de gelukkige als de loterij-organisatie 5% rente rekent?

We gebruiken hiervoor tabel V, de annuïteitentafel. Een annuïteit is een jaarlijks gelijkblijvend bedrag bestaande uit rente en aflossing. De Amerikaan geeft dus in feite een lening aan de loterij en die betaalt dat terug met rente. Zoek op in de vijfde tabel:

$$1.000.000 \times 0,23097480 = 230.974,80.$$

$\frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$ V. TAFELS VOOR $\frac{1}{\Sigma(r,0425)^{-n}}$; $\frac{1}{\Sigma(r,045)^{-n}}$; $\frac{1}{\Sigma(r,0475)^{-n}}$; $\frac{1}{\Sigma(r,05)^{-n}}$ beginnende met $n=1$.

n	4 1/4 %	4 1/2 %	4 3/4 %	5 %
1	1,0425	1,045	1,0475	1,05
2	0,5320 9608	0,5339 9756	0,5359 0049	0,5378 0488
3	0,3620 5965	0,3637 7336	0,3654 8967	0,3672 0856
4	0,2771 1502	0,2787 4365	0,2803 7592	0,2820 1183
5	0,2262 0704	0,2277 9164	0,2293 8090	0,2309 7480
6	0,1923 1731	0,1938 7839	0,1954 4512	0,1970 1747
7	0,1681 5221	0,1697 0147	0,1712 5735	0,1728 1982
8	0,1500 0493	0,1516 0965	0,1531 6196	0,1547 2181
9	0,1360 2944	0,1375 7447	0,1391 2803	0,1406 9008
10	0,1248 3012	0,1263 7882	0,1279 3699	0,1295 0457

Tafel V

Geval 6

Een speciaal geval is de eeuwigdurende uitkering van bijvoorbeeld 5000 gulden, de eerste keer over een jaar. Hiervoor hebben we geen tabel, maar we kunnen de vraag ook enigszins anders formuleren. Welk kapitaal, op de bank gezet tegen 5%, levert ons 5000 gulden op, de eerste keer over één jaar?

We lossen dat eenvoudig zo op:
 $K \times 5\% = 5000, \quad K = 100.000.$

Interessant is het verband tussen de tafels: uit tabel I kun je tabel II afleiden: het een is immers het omgekeerde van

het andere. Als je tabel I sommeert, heb je tabel III, hetzelfde geldt voor tafels II en IV. De laatste tabel, de annuïteit, is weer het omgekeerde van tabel IV.

Overigens kan het aantal tafels makkelijk uitgebreid worden. Stel bijvoorbeeld dat de bedragen van geval 3 niet pas na één jaar beginnen, maar direct, dus aan het begin van het jaar.

In dit laatste geval spreek je van een prenumerando serie en je zou er een aparte tabel voor kunnen maken. In het oorspronkelijke geval was sprake van een postnumerando reeks.

Aanpak met formules

Het is gebruikelijk bij VWO, HAVO en SPD-opleidingen om de vraagstukken op te lossen met de rentetafel. Er zijn echter in de loop der jaren bezwaren ontstaan tegen de tafelmatische aanpak. Ten eerste is er het probleem dat de rentetafels slechts een beperkt aantal percentages geven, ze verspringen meestal met een half procent. Dit is een reëel probleem, kijk bijvoorbeeld eens naar de dagelijks gepubliceerde kapitaalmarktrente: die is tot op drie decimalen nauwkeurig vermeld. Ook de voor de gewone man bestemde hypotheekrente is tot op een decimaal achter de komma nauwkeurig aangegeven en dat vind je doorgaans niet in tafels. Bovendien zijn er maximaal honderd perioden in de tafels. (Een lening die over tien jaar wordt afgelost met maandannuïteiten is dus niet oplosbaar via de tabel).

Hoe werk je nu het best met lastige percentages? Voor wat betreft de tafels I en II, het oprenten en afrenten van een enkel bedrag, is het beter om de gewone calculator te gebruiken. Als het gaat om series stortingen en om annuïteiten dan wordt dat te bewerkelijk en dus is men gedwongen de wiskundige benadering te kiezen. We lopen alle gevallen even langs.

Geval 1

De contante waarde is $1000 \times 1,05^5 = 1276,28.$

Geval 2

De eindwaarde is $2000 \times \frac{1}{1,05^5} = 1567,05.$

Geval 3

De eindwaarde is $3000 \times 1,05^5 \dots + 3000 \times 1,05.$

Aangezien dit een gewone meetkundige reeks is, kunnen we de bekende somformule toepassen:

$$Som = a \times \frac{1 - R^N}{1 - R}.$$

a is de aanvangsterm, hier gemakshalve de laatste term, R is een constante, N is het aantal betalingen.

$$Som = 3000 \times 105 \times \frac{1 - 1,05^5}{1 - (1,05)} = 17.405,74.$$

Geval 4

De contante waarde = $4000 \times 1,05^{-1} + \dots + 4000 \times 1,05^{-5}.$

$$Som = \frac{4000}{1,05} + \dots + \frac{4000}{1,05^5} = \frac{4000}{1,05} \times \frac{1 - 1,05^{-5}}{1 - 1,05^{-1}} = 17.317,9.$$

De formule is vrij algemeen bruikbaar, ook als de betalingen veranderen met een bepaald percentage. Stel bijvoorbeeld dat de laatstgenoemde reeks elk jaar toeneemt met 2%, dat wil zeggen het eerste bedrag is f 4.080,-, het tweede is f 4.161,60, enzovoort. De R in de formule verandert dan in $\frac{1,02}{1,05}$.

Geval 5

De bovengenoemde somformule kunnen we herschrijven en dan krijgen we de annuïteitenformule (i is de rente per gulden, het rentepercentage):

$$Annuïteit = \frac{i \times \text{Kapitaal}}{1 - \frac{1}{(1+i)^N}} = 230.974,80.$$

Geval 6

Bij de eeuwigdurende uitkering verandert de somformule als volgt:

$$Som = \frac{a}{1-R} = \frac{5000}{1 - 1,05^{-1}} = 100.000.$$

Een bezwaar van deze formules is hun bewerkelijkheid. Per saldo verlies je nogal wat tijd in vergelijking met de tafelaanpak. Het aantal fouten is bovendien niet minder dan vroeger. Verder is het nogal bizar om voor een serie van drie gelijke bedragen een ingewikkelde formule te gebruiken, zeker als het om een normaal rentepercentage gaat. Ook gaat de formule uit van jaarlijks gelijke bedragen en dat hoeft in de praktijk niet het geval te zijn.

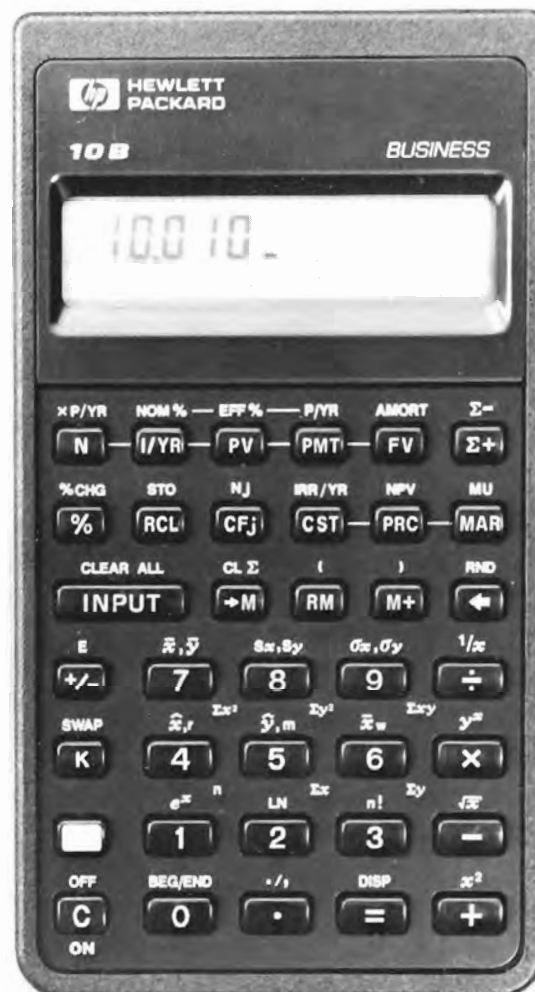
Een ander veel voorkomend probleem is bijvoorbeeld het volgende: stel dat de student zijn studiebeurs niet voor de hierboven genoemde f 17.317,91 kan afkopen, maar voor slechts f 17.200,-. Welk rentepercentage is er dan gebruikt?

Met behulp van de 5,5% kolom van tabel IV kom je tot de conclusie dat de aankoopsom dan f 17081,14 had moeten zijn. Er is dus een percentage tussen de 5 en 5,5 gebruikt. Het juiste antwoord kan je alleen vinden met moeizaam lineair interpoleren en dan is het nog maar een benadering.

De geautomatiseerde benadering

Handige leerlingen en docenten hebben natuurlijk allang ontdekt dat je simpele formules makkelijk kan programmeren met behulp van een programmeerbare calculator of grafische rekenmachine. Voor wie niet al te ingewikkelde dingen wil en graag programmeert, is dat ook zeker aan te bevelen. De anderen zullen merken dat de variatie in de problemen al gauw te groot wordt. Er is namelijk naast de bovengenoemde variabelen (beginkapitaal, rentepercentage, betaling en aantal periodes) vaak nog een bepaalde eind- of restwaarde. Je hoeft immers een lening niet volledig af te lossen, of je schrijft een auto af tot op

een zekere restwaarde (afschrijven en aflossen is in dit verband hetzelfde). De restwaarde is soms zelfs negatief, als er sloopkosten zijn. Voor het oplossen van al dit soort problemen zijn er calculators te koop voor ruim onder de honderd gulden die aan al deze wensen tegemoetkomen³.



Een business-calculator

Voor onze sommetjes is er de horizontale reeks knoppen waarvan de betekenis als volgt is:

- N** het aantal perioden
- I/YR** het percentage per jaar (beter: per periode)
- PV** letterlijk Present Value, contante waarde ofwel kapitaal
- PMT** PayMenT, betaling of ook wel annuïteit
- FV** Future Value of eindwaarde

Elders is er nog een knop genaamd BEG/END, die bedoeld is om aan te geven of een serie betalingen aan het begin van het jaar dan wel aan het eind vervalst. De AMORT-knop maakt een amortizatie of aflossingsschema.

Welnu, het is wellicht moeilijk voorstelbaar, maar de hele financiële rekenkunde met zijn grote verscheidenheid aan berekeningen is met deze paar toetsen af te wikkelen. We laten alle opgaven weer even de revue passeren. (Een minteken duidt op een betaling).

Geval 1

invoer	5	5	-1000	0	
	N	I/YR	PV	PMT	FV
uitvoer					12726,28

Geval 2

invoer	5	5		0	2000
	N	I/YR	PV	PMT	FV
uitvoer					-1567,05

Geval 3

invoer	5	5	0	-3000	
	N	I/YR	PV	PMT	FV
uitvoer					17405,74

Geval 4

invoer	5	5		4000	0
	N	I/YR	PV	PMT	FV
uitvoer					-17317,91

Stel de afkoopsom van de studiebeurs is 17200:

invoer	5		-17200	4000	0
	N	I/YR	PV	PMT	FV
uitvoer					5,24762974

Geval 5

invoer	5		100000		0
	N	I/YR	PV	PMT	FV
uitvoer					-230974,80

Geval 6

De eeuwigdurende uitkering levert problemen op omdat we daarvoor geen knop hebben. Hier moeten we pragmatisch handelen door eeuwigdurend te interpreteren als 'heel veel'. Stel $N = 1000$:

invoer	1000	5		5000	0
	N	I/YR	PV	PMT	FV
uitvoer					-100000

Voor de betalingen zonder enige regelmaat is overigens een aparte knop beschikbaar: de CFj (cashflow) toets.

Zij die een wat breder werkterrein wensen dan alleen de financiële rekenkunde, vinden bij de intussen gangbare algebrapakketten soortgelijke mogelijkheden.

Zo bereken je in Derive een annuïteit met behulp van het commando $PMT(0,05, 5, 1000000)$ en $approximate$.

Het aardige van Derive is dat je de annuïteitenformule zelf ook kan intikken.

```
#1: e = 1000*1.05^5                                User
#2: e = 90616/71                                    Approx(#1)
#3: c = 2000/1.05^5                                 User
#4: c = 269533/172                                  Approx(#3)
#5: SUM_{n=1}^5 3000*1.05^n                          User
#6: 330709/19                                       Approx(#5)
#7: SUM_{n=1}^5 4000/1.05^n                          User
#8: 363676/21                                       Approx(#7)
#9: a = (0.05*1000000) / (1 - 1/1.05^5) = { a = 204205050000/884101 }
User=Simp(User)
#10: PMT(0.05, 5, -1000000)                            User
#11: 2.30974*10^5                                       Approx(#10)
```

Schermafdruck van Derive (versie 3)

Het meest uitgebreide arsenaal aan financiële mogelijkheden levert een spreadsheet.⁴ Een spreadsheet is een computerprogramma dat genummerde regels en kolommen op het scherm afbeeldt. De kolommen beginnen met de letter A. Wat de gebruiker dan ziet, is een raster, waarvan de cel in de linkerbovenhoek A1 heet. Elke cel is een calculatortje op zichzelf en kan een tekst, formule, commando of getal bevatten.

Het commando @PMT(1000, 0,05, 5) geeft de annuïteit.

	A	B	C	D
1	kapitaal	1000000		
2	aantal perioden	5		
3	rentepercentage	5		
4	annuïteit	230974,80	@PMT(B1,B2,B3)	

Spreadsheets behoren naast tekstverwerkers en database-programma's tot de meest verkochte software. Bekende merken zijn Lotus, Quattro en Excel. Ze zijn zeer populair bij boekhouders, accountants en zakenlieden, maar worden nauwelijks gebruikt voor wiskundige berekeningen, hoewel ze daar zeer geschikt voor zijn.

Conclusie

Alle bovengenoemde methoden hebben met elkaar gemeen dat ze snel gezien zullen worden als een truc uit de trukendoos. Hier is ook niets op tegen, zolang de docent er maar voor zorgt dat de truc goed is ingebed in een verhaal, in dit geval dus de financiële werkelijkheid. De berekening volgt dan meestal aan het eind van dat verhaal. De docent zal uiteraard niet meer alle berekeningen voor-kauwen. Integendeel, die zal de weg moeten wijzen in een verwarrend groot (en steeds groeiend) arsenaal aan

apparatuur en programmatuur. Voorlopig lijkt me de beste keus voor het onderwijs overigens een palmtop. Je combineert daarmee calculator, spreadsheet en Derive, en dat alles in zakagendaformaat.⁵

Victor Hermans is docent aan de Hogeschool van Utrecht.

*privé adres: Bartoklaan 14, 2253 CX Voorschoten
tel. 071-613589, email v.hermans@econ.hvu.nl*

Noten

- [1] In de nieuwe eindexamenprogramma's voor HAVO en VWO komen de vakken Economie II en Handelswetenschappen niet meer voor. In het keuzevak Management en Organisatie voor de vrije ruimte komen alleen nog de *grote S* en *grote A* aan de orde.
- [2] De afbeeldingen van de tabellen in dit artikel zijn afkomstig uit Wijdenes en Van de Vliet, *Logaritmen en interestafels*.
- [3] HewlettPackard 10B, 17B, 19B.
Er is hier overigens sprake van een niet merkgebonden systematiek, ook andere fabrikanten dan Hewlett-Packard hanteren deze terminologie (bijvoorbeeld de TI 83).
- [4] Bijvoorbeeld Quattro Pro, versie 4. Er zijn vele andere goede programma's die precies hetzelfde kunnen.
- [5] HewlettPackard 100 LX.

Vakantiecursus 1997

De Stichting Mathematisch Centrum organiseert een tweedaagse cursus voor leraren in de exacte vakken VWO, HAVO, HBO en andere belangstellenden. De cursus heeft als onderwerp *Rekenen op het Toeval (Statistiek)* en wordt gehouden in Amsterdam op vrijdag 22 augustus en zaterdag 23 augustus en in Eindhoven op donderdag 28 augustus en vrijdag 29 augustus 1997.

Enkele historische schetsen vormen het uitgangspunt, waarna een aantal fundamentele theoretische beschouwingen volgen. Verder worden enkele toepassingsgebieden behandeld en wordt er gelegenheid geboden voor zelfwerkzaamheid.

De lezingen worden gehouden door mevrouw dr. I.H. Stamhuis, drs. W. Kleijne, prof. dr. A.G.M. Steerneman, prof. dr. ir. J.H.A. Smit, prof. dr. C.A.J. Klaassen, dr. J.A. van Maanen en prof. dr. J.M. Aarts.

Deze cursus geldt als nascholingsactiviteit en op verzoek is een certificaat verkrijgbaar. De volledige brochure van de cursus met aanmeldingsformulier is te verkrijgen bij het CWI, Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam.

Vierkant wiskunde zomerkampen 1997

VIERKANT organiseert in 1997 al voor het vierde jaar zomerkampen voor jongeren die het leuk vinden om hun hersenen te kraken. Ex-deelnemers (ook meisjes!) vonden de kampen 'leuk, speels, uitdagend'. In het kamp zullen diverse wiskundige activiteiten aangeboden worden, aangevuld met lezingen, spelletjes en sportactiviteiten. Het kamp wordt geleid door wiskundigen en universitaire wiskundestudenten.

Er komen drie kampen, met verschillende programma's (nu ook voor basisscholieren):

kamp A: 4 t/m 8 augustus voor basisscholieren uit groep 7 en 8

kamp C: 4 t/m 8 augustus met hetzelfde programma als kamp C in 1996, voor 12-14 jarigen

kamp D: 11 t/m 15 augustus met een nieuw programma, voor 13-16 jarigen.

Verdere informatie en aanmeldingsformulieren te verkrijgen op het Internet: <http://www.cs.vu.nl/~vierkant/> of bij het VIERKANT secretariaat: Faculteit der Wiskunde en Informatica, Vrije Universiteit Amsterdam, De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam, tel: 020-444 7776 e-mail: vierkant@cs.vu.nl