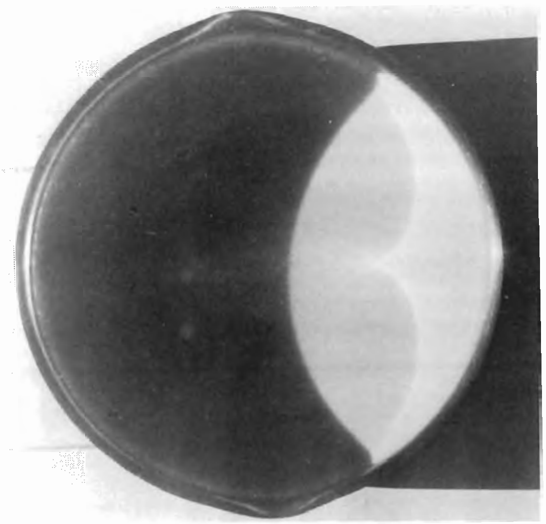
Deze aflevering van de recreatierubriek begint met een lichtvlek in een steelpannetje en eindigt met een bijzonder lichteffect op de Amstel. Tussendoor laat **Aad Goddijn** u puzzelen aan allerlei soorten cycloïden.

Brandlijn met snavel in melkpan

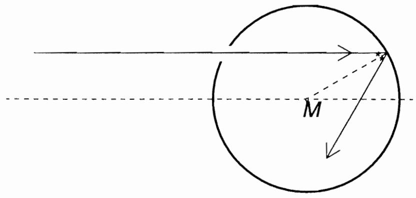
Recreatierubriek

Roestvrijstalen steelpan

Hieronder kijkt u in een roestvrijstalen steelpannetje, dat bijna tot boven toe gevuld is met melk. Een sterke lamp beschijnt het geheel van links. Vandaar de schaduwen naast en in de pan. Een mooi gevormde lichtvlek is het gevolg.



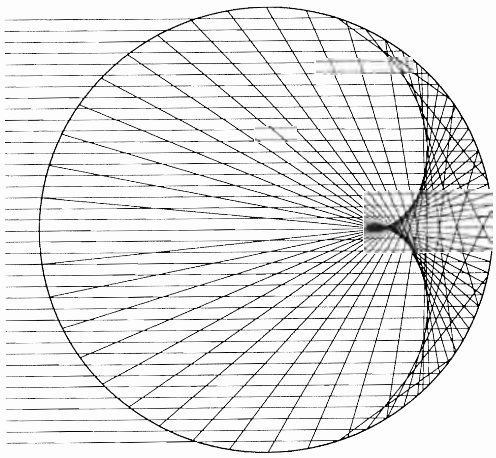
De binnenkant van de steelpan functioneert als cilindervormige holle spiegel en de lichtbundel (in dit geval van een ver weg staande diaprojector) beschouwen we als bundel evenwijdig invallend licht. Laten we eens één straal van die bundel en zijn reflectie bekijken. In de volgende figuur is ook nog de symmetrie-as van het geheel gestippeld.



Voor ons onderzoek is allereerst nodig te bewijzen dat de gereflecteerde straal de symmetrie-as op minstens halvestraal afstand van het midden M oversteekt en dat die halve straal afstand als limiet bereikt wordt. Verder willen we natuurlijk weten tot hoever naar rechts het gebied zich uitstrekt waar geen gereflecteerde stralen komen.

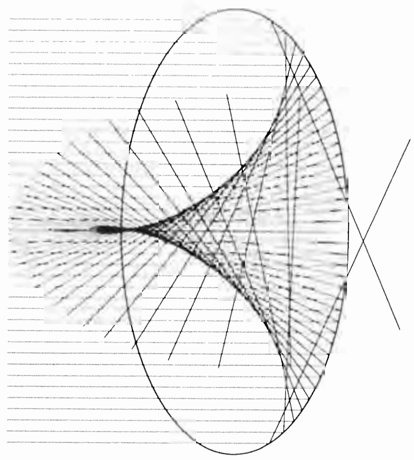
Opgave 152
Los deze problemen op met behulp van: hoek van inval is hoek van uitval.

De computer helpt ons nu een overzicht te krijgen van alle gereflecteerde stralen. Hier zijn de gereflecteerde stralen met een vaste lengte getekend; we kijken toch alleen in de pan.



De gereflecteerde stralen hebben blijkbaar een omhullende kromme. Dat is natuurlijk de rand van het lichte gebied. Het lichte gebied is waar de gereflecteerde stralen doorlopen; als ze langs de rand lopen, zijn ze relatief lang dicht bij de rand. In de foto is dat te zien als de heldere band. Het komt aardig overeen!
De scherpe punt aan het gebied (of van de omhullende) is een zogenaamde cusp of snavel. We weten al dat de snavelpunt op halve straal afstand uit het midden ligt.
Een computer, mits goed geïnstrueerd, tekent met evenveel gemak de stralengang in een ellipsvormige pan, waarvan de korte as de helft van de lange as is. Niet de hele tekening wordt nu in de dwarsrichting ingekrompen, want het inkrimpproces is niet hoektrouw. De structuur is

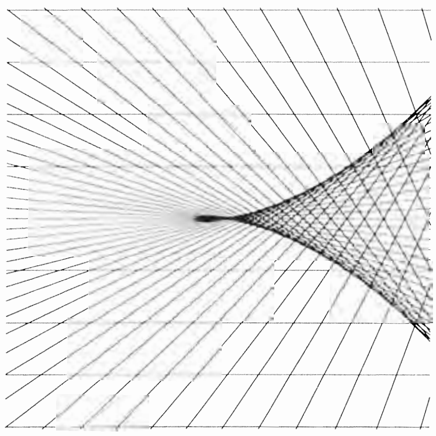
echt anders. Zie de volgende figuur.



De cusp zit veel verder naar links. Onverwacht?

Opgave 153 (lastig; is misschien later makkelijker)
Wat moet de factor voor de dwarskrimping zijn, om te zorgen dat de cusp precies op het midden van de ellips komt?

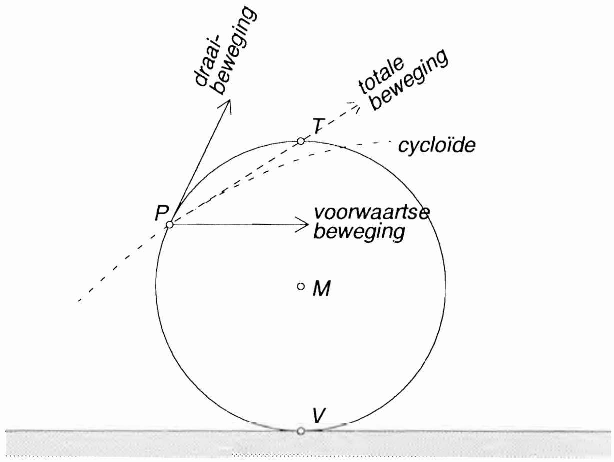
Hoe ziet zo'n cusp er in detail eigenlijk uit?
Hier is die van het cirkelgeval uitvergroot.



De snavel lijkt toch echt wel scherp te zijn. Dat klopt ook wel met het resultaat van opgave 152. De lijnen die dicht langs het midden gaan, snijden de symmetrie-as dicht bij het eind van de cusp en doen dat onder een kleine hoek.

Cycloïde

Was het niet de cycloïde die ook van die snavels had? Een cycloïde is bijvoorbeeld de baan van één punt van een fietswiel, een punt dat op de weg komt, wel te verstaan. Zo'n punt gaat als je goed kijkt dicht bij de straat recht naar beneden, stopt schijnbaar op straatniveau en gaat dan naar boven verder.
Omdat onze problematiek van het spiegelen in krommen te maken heeft met raaklijnen aan krommen, moeten we weten hoe de raaklijn in een punt aan de cycloïde loopt. Hier is het lopende wiel. Met momentaan voetpunt V, momentane top T. We kijken naar de beweging van P. P heeft een voorwaartse beweging (met de fiets mee) en een draaiende (vanuit de wielas gezien). De grootte van de snelheden is gelijk.

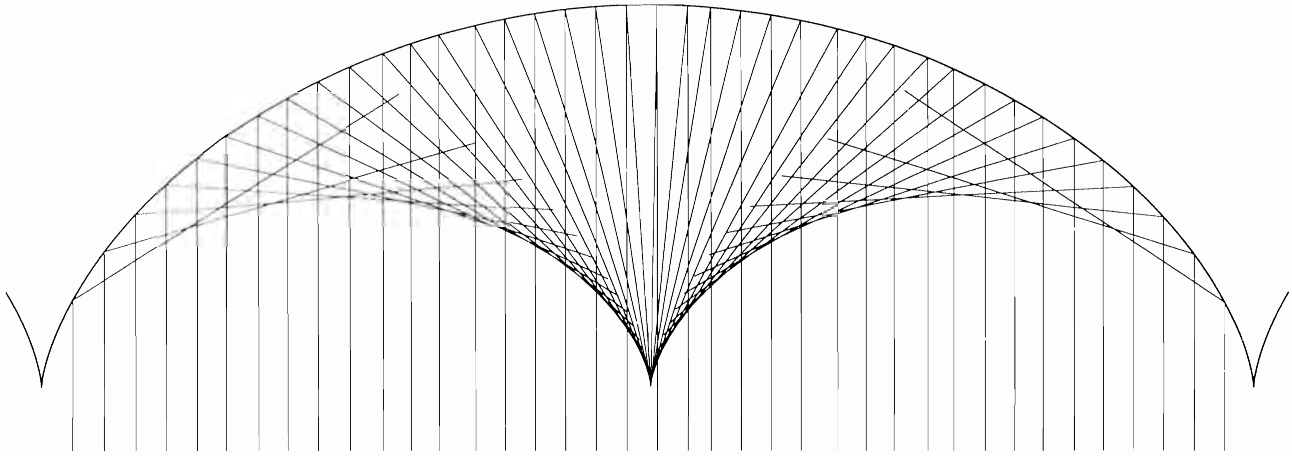


De resultante van de twee snelheden is de gestippelde pijl. Nu is in te zien dat P 'momentaan' stilstaat als P op de grond is en dat P op het hoogste punt met de dubbele snelheid van het wiel horizontaal voorwaarts beweegt.
De resultante levert ook de raakrichting van de cycloïde die we nodig hebben voor het bepalen van de raaklijnen.

Opgave 154 (met tips)
Toon aan dat de raaklijn inderdaad door T gaat.

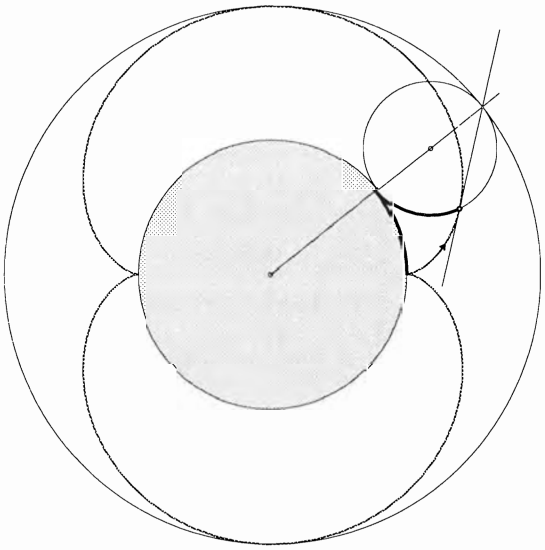
Dit kan via handig met hoeken werken, maar een mooi inzicht is ook dat punt V als punt van het wiel opgevat momentaan stilstaat en dat het wiel als object dus 'even' (infinitesimaal) om V draait. Dat betekent dat de bewegingsrichting van P loodrecht op PV moet staan is, omdat PV constant in lengte is. Wie nog niet zeker is, mag coördinaten kiezen en het inproduct van PV met zichzelf naar t differentiëren.
Bij de laatste redenering wordt niet gebruikgemaakt van het feit dat de grondlijn recht is, die lijn mag ook een cirkel of andere kromme zijn; zelfs differentieerbaarheid van de kromme is niet vereist.
Wie als waarnemer op de rijdende fiets goed naar de bewegende raaklijn kijkt, ziet dat de raaklijn als het ware draait om de top van het wiel, en wel met de halve snelheid van het wiel zelf. Daarmee is een andere beschrijving van de cycloïde gegeven: het is de omhullende van een draaiende middellijn van een rollend wiel met dubbele grootte. Een omhullende, net als bij de spiegeling in de roestvrijstalen pan.
Op de volgende bladzijde is een cycloïde getekend. We gebruiken nu de holle binnenkant van één boog ervan als spiegel, net als de halve cirkel van boven. De evenwijdige bundel komt van onderen.

Opgave 155
Waarom is de omhullende van de gereflecteerde stralen wéér een cycloïde, nu een met een half zo groot wiel?



Terug naar de roestvrijstalen pan

De brandkromme in de cirkel heeft een natuurlijke wederhelft in de linkerhelft van de cirkel als we de evenwijdige lijnen ook links laten spiegelen. De twee helften vormen dan een doorlopend geheel, met twee cuspen tegenover elkaar. Je zou dan kunnen denken: het is een soort cycloïde, maar niet een op een vlakke ondergrond, maar op een ronde. Om na twee wielronden op dezelfde plek uit te komen, kiezen we de ondergrond cirkelvormig en twee keer zo groot als het bewegende wiel. De zo beschreven kromme luistert naar de merkwaardige naam *nephroïde*, maar *epi-2-cycloïde* vertelt meer: een cycloïde óp een cirkel, waarbij twee cuspen optreden.
In de volgende figuur is het afwikkelproces in beeld gebracht. Er is ook een raaklijn getekend, die weer door de top van het lopende wiel lijkt te gaan.



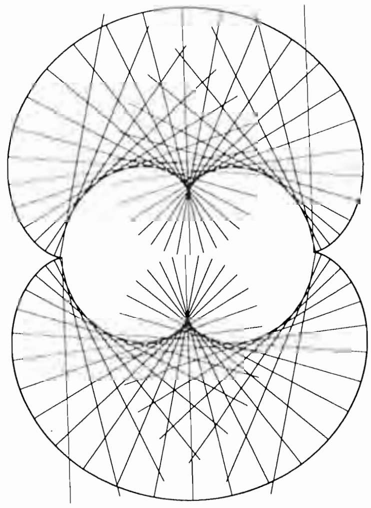
Opgave 156
Toon aan dat de nephroïde inderdaad de brandlijn bij het spiegelen van een evenwijdige bundel in een holle cirkelvormige spiegel is.

Cycloïde en nephroïde behoren tot de familie van de afwikkelkrommen. Verwanten ontstaan door het 'schrijvende' punt niet op de rand van het wiel te nemen, door de straalverhouding van rollende en vaste cirkel te veranderen, door aan de binnenkant van de vaste cirkel te gaan zitten. Bij dat laatste ontstaan de zogenaamde hypocycloïden. Ik vermeld nog dat epi- en hypo-cycloïden worden toegepast in de vorm van de tanden bij tandwielconstructies. Dit om zeer constante overbrengingen te verkrijgen, wat met vlakke tanden niet lukt. Zie bijvoorbeeld het nog steeds gebruikte boek van de ingenieurs Meewis, Stolk en Kros uit 1913: *Machineonderdelen*; 20e druk, Morks uitgeverij, Dordrecht, 1976.

De brandkromme die ontstaat door spiegelen van parallelle stralen is slechts een van de vele krommen die van een gegeven kromme kan worden afgeleid. Er zijn ook nog:
- involuten (laat een raaklijn afrollen langs de kromme en volg een punt)
- evoluten (brandlijn der normalen)
- pedaalkrommen (voetpunten van een vast punt op alle raaklijnen)

en vele anderen.
Wie wil experimenteren, verwijs ik naar de *Famous Curves Index* op Internet:
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk:80/~history/Curves/Curves.html
Dat is een bijzonder rijke site! Als uw computer dat toelaat, kunt u zelf bij allerlei krommen de diverse geassocieerden in vele varianten laten verschijnen.
De illustratie op de volgende bladzijde laat zien dat de normalen op de nephroïde een kleinere nephroïde omhullen.

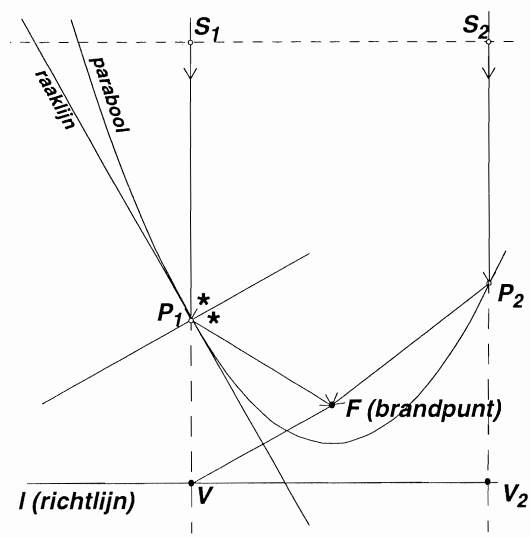
Opgave 157
Zoek een bewijs hiervoor en probeer het bewijs zo in te richten dat het ook werkt voor andere epi-cycloïden en hypo-cycloïden, want die hebben allemaal soortgelijke eigenschappen!



In het nieuwe programma voor het VWO-profiel N&T spelen diverse van deze krommen een rol. Onder andere de cycloïde en de cardioïde, dat is de epi-1-cycloïde. Maar natuurlijk ook de holle spiegel bij uitnemendheid, die ontstaat door omwentelen van de parabool.

De parabool

Een parabool is de verzameling punten die gelijke afstanden hebben tot een gegeven vast punt en gegeven vaste lijn. Deze heten brandpunt (F) en richtlijn (l). Zie figuur.



Uit de definitie volgt direct de getoonde puntsgewijze constructie: kies een punt V op de richtlijn en snijdt de loodlijn door V op l met de middelloodlijn van F en V. Elke ander punt dan het snijpunt P_l van die lijnen ligt dichterbij l dan bij F, om de eenvoudige reden dat zo'n punt even ver van V als van F ligt. Dus is die middelloodlijn tevens de raaklijn!
Gevolg is ook de belangrijke spiegeleigenschap van de parabool: stralen evenwijdig aan de as gaan na reflectie door het brandpunt. In de figuur is ook nog geïllustreerd dat een lichtfront S_lS_2 dat loodrecht op de as staat, ook op een zelfde moment in het brandpunt aankomt:
$|S_lP_l| + |P_1F| = |S_1V| = |S_2V_2| = |S_2P_2| + |P_2F|$.
Als dit allemaal niet zo was, wisten we nauwelijks iets van de rest van de wereld (satellietantennes) en van het heelal (radiotelescopen).
Als $2p$ de afstand van F en l is, kan de parabool in een geschikt assenstelsel door de vergelijking

$$y = \frac{x^2}{4p}$$

worden voorgesteld.
Omgekeerd is uit de vergelijking

$$y = \frac{x^2}{2}$$

meteen de waarde van p af te lezen: 0.5.
Nu is bij de eerder vertoonde symmetrische holle spiegels de cusp steeds de limiet van het snijpunt van twee gereflecteerde stralen die op gelijke afstand van het midden invallen, waarbij die afstand tot nul nadert. Zo was de cusp te bepalen.
De halve cirkel

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

laat zich in (0, 1) benaderen door

$$y = 1 - \frac{x^2}{2}$$

Daarbij worden ook de afgeleiden, die we nodig hebben voor de raaklijnen en spiegelingen, goed benaderd in de omgeving van $x = 0$.

Opgave 158
Mag ik daar zomaar uit concluderen dat de cusp van de brandkromme bij de halve cirkel inderdaad op halve afstand van het middelpunt ligt? En hoe kan dit helpen bij opgave 153?

Opgave 159
Gebruik één berg van de kromme cos(x) als holle spiegel. Voorspel de ligging van de cusp van de brandkromme als de stralen evenwijdig aan de y-as invallen.

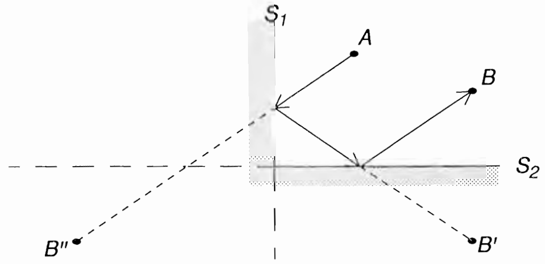
Vlakke spiegels en beeldgrootte

We keren terug tot vlakke spiegels!
Pak eens staande voor een gewone spiegel in de badkamer een stuk zeep en teken op de spiegel uw hoofdomtrek om. Werk met gestrekte arm, dat wil zeggen, sta niet met de neus tegen de spiegel.

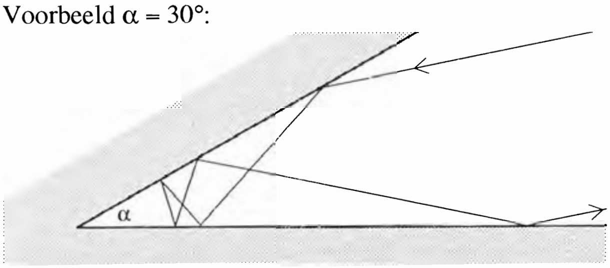
Opgave 160
Verklaar waarom de getekende omtrek ongeveer half zo groot is als uw hoofd zelf.

Twee vlakke spiegels onder een hoek van 90° graden geven een apart effect: een lichtstraal die de ene spiegel

raakt, zal na spiegeling ook de andere raken en dan terugkeren in de richting waarin de straal aankwam.
De techniek om, uitgaande van een gegeven punt A na twee keer spiegelen B te treffen, is bekend: spiegel punt B in spiegel S_2, dat geeft B'; spiegel B' in spiegel S_1, dat geeft B''. Richt nu vanuit A op B''.
De figuur hieronder verklaart alles.



Het lijkt efficiënter meteen B'' te construeren als puntspiegelbeeld van B ten opzichte van het snijpunt, maar dan kan de route niet zo gemakkelijk geconstrueerd worden. (Waarschuwing: dit werkt niet goed bij biljarten vanwege het effect dat de bal bij de eerste kaatsing oploopt).
De loodrechtheid is een bijzonder geval. Hier maken twee spiegels een hoek α met elkaar. Neem α kleiner dan of gelijk aan 90°. Een straal die, vanuit het oneindige komend, de ene spiegel raakt, kaatst dan ook naar de andere. Voorbeeld $\alpha = 30°$:

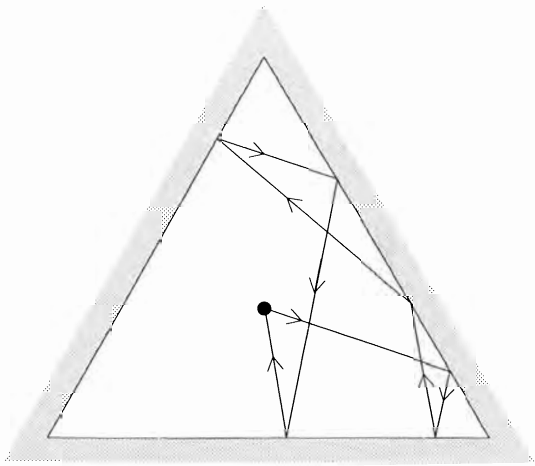


Opgave 161
Wat mag α zijn, als de straal uiteindelijk evenwijdig aan de invalsrichting moet terugkeren?
Hangt het van de richting van de invallende straal af?
Hoeveel keer wordt een spiegel geraakt?
Wat gebeurt voor de andere waarden van α?
Toon ook aan dat een straal altijd na eindig veel keer terugkeert, tenzij het snijpunt van de spiegels direct al getroffen wordt.

Zevensprong in de driehoek

Een inwendig spiegelende gelijkzijdige driehoek.
De aangegeven lijn begint in het midden, spiegelt zes keer tegen de wand en keert in het midden terug. De route wordt geheel door de startrichting bepaald. Er zijn nog meer richtingen waarin de lichtstraal mag starten om na zes keer spiegelen terug te keren.

Opgave 162
Bepaal hoeveel mogelijkheden er zijn en bepaal ook de startrichtingen.



Las Meninas

Een beroemd schilderij van Velasquez, uit 1656, zie volgende bladzijde.
Velasquez werkte voor Philips IV van Spanje. Midden op het schilderij staat de Infanta Margarita, de toekomstige keizerin. Op de achterwand lijkt een schilderij te hangen, een dubbelportret van Philips IV en diens tweede vrouw, Mariana van Oostenrijk. Bij nadere beschouwing van het echte schilderij blijkt het een spiegel te zijn en dus moet het schilderij in deze rubriek gebruikt worden.
Negen personen op het schilderij kijken u, de toeschouwer, aan. Een ongebruikelijke vraag:

Opgave 163
Maak een plattegrond van de geschilderde zaal met de positie van het schilderij waaraan Velasquez (staande links) werkt, de spiegel en de positie van u, de waarnemer. Maak gebruik van bekende feiten over vlakke spiegels. Wie bent u, of: in wiens schoenen staat u dan eigenlijk?

Tot slot de waterspiegel

Op de volgende bladzijde staat ook een ansichtkaart uit Amsterdam afgedrukt. Zo ziet het er echt uit als de brug verlicht is.
Als er een licht briesje over de Amstel scheert, dan kan ik me goed voorstellen dat de spiegelbeelden van de lampen in de golfjes alle kanten uitspringen en dat er een soort vlek ontstaat. Maar hoe is het toch mogelijk dat het inderdaad altijd is wat op de foto te zien is: verticale evenwijdige lichte balken?

Opgave 164
Probeer een verklaring te geven voor dit bijzondere verschijnsel.
Dit is een lastig, maar boeiend probleem. Het wordt uitvoerig besproken in: M. Minnaert, *De natuurkunde van 't vrije veld, deel I.* Thieme, 1976.

Aad Goddijn, Freudenthal Instituut

Las Meninas, schilderij vanVelasquez, 1656

De Magere Brug over de Amstel