Sinds de invoering van de basisvorming en daarmee het nieuwe leerplan wiskunde voor de onderbouw zijn er zorgen over de algebra in HAVO en VWO. **Mieke Abels** ontwikkelde een eigen aanpak in klas 3 VWO.

Algebra, een plus en een min

Inleiding

De opzet van de algebralijn in het huidige programma voor de onderbouw, waarin verbanden centraal staan, geeft goede mogelijkheden voor het ontwikkelen van allerlei vaardigheden. Bij het onderzoeken van verbanden tussen tabellen, grafieken en formules merk ik dat mijn leerlingen flexibel omgaan met de onderwerpen uit dit nieuwe algebraprogramma. Ze krijgen ruimte om verschillende strategieën te ontwikkelen en problemen op verschillende manieren (en niveaus) op te lossen.
In de derde klas HAVO/VWO concentreert algebra zich rond het manipuleren met variabelen en formules. In het programma zijn veel 'oude' onderwerpen te herkennen, zoals gelijksoortige termen bij elkaar nemen, producten van twee tweetermen, ontbinden in factoren, enzovoort. Maar de leerlingen hebben nu een andere basis dan de leerlingen van vroeger en dat vraagt dan ook om een aanpak die past bij de manier waarop ze de twee jaren ervoor hebben gewerkt. Voor mijn leerlingen betekent dit dat ze ruimte krijgen voor het ontwikkelen van eigen strategieën. Klassegesprekken hierover vormen een belangrijk onderdeel in mijn lessen. Onderstaand lesverslag laat zien hoe mijn huidige 3 VWO-klas bezig is met zo'n 'oud' onderwerp.

Een les

'Dat betekent niet keer', hoor ik Ole zachtjes zeggen nadat ik de formule $y = 5 - 2(x - 5)$ op het bord had geschreven. Deze formule stond in het boek (*Moderne Wiskunde deel 3vwo*, hoofdstuk 4) als laatste in een rijtje formules die 'zonder haakjes' geschreven moesten worden en deze laatste formule was net even anders dan de vorige formules. Daarom hadden veel leerlingen op de vraag 'Wie heeft iets te vragen?' deze formule genoemd als onderwerp voor een klassegesprek.
Ik snap de opmerking van Ole. Hij heeft gekeken naar de structuur van de formule en even gedacht dat er misschien een vermenigvuldigpunt was weggelaten. Dit was twee hoofdstukken hiervoor ter sprake gekomen. Begrijpelijk dat Ole op zijn hoede is: je kan niet weten, misschien had er wel een punt gestaan: $y = 5 \cdot -2(x - 5)$.
Ik vraag om suggesties uit de klas. Gelukkig komt niet iemand met het idee om 5 – 2 te doen en de formule te schrijven als $y = 3(x - 5)$. 'Als die 5 er niet staat, kan ik hem wel', zegt Claartje, 'want dan heb je $y = -2(x - 5)$.'
Ik dacht meteen dat dit een mogelijk begin zou kunnen zijn voor de volgende strategie: die 5 even weglaten, dan wat je overhoudt zonder haakjes schrijven en daarna die 5 er weer voor zetten. Even kijken of iemand hiermee komt.
Evelien reageert: 'Maar dan heb je toch een andere min voor die 2 staan.' Hiermee wordt de koers voor dit moment bepaald: er volgt een korte discussie over de verschillende betekenissen van het min-teken, waarbij als voorbeeld 7 – 3 en 7 + -3 op het bord komt. De formule wordt als $y = 5 + -2(x - 5)$ geschreven en ik geef de leerlingen de opdracht om nu zelf te kijken of ze hiermee verder kunnen. Ik zie dat de meesten een vermenigvuldigtabel gebruiken om $-2(x - 5)$ zonder haakjes te schrijven en daarmee de opdracht goed afmaken. Daarna werken ze verder met de opdrachten uit het boek.

Om een idee te krijgen hoe 'vaardig' de leerlingen nu zijn, schrijf ik even later de formule $y = 10 - (x - 3)$ op het bord en vraag om deze zonder haakjes te schrijven. Ik loop rond en zie van alles gebeuren. Sommige leerlingen schrijven direct op $y = 10 - x + 3$, maar ik zie ook $y = 10 - x - 3$. Sommige leerlingen maken een tussenstap en schrijven eerst $y = 10 - 1 \cdot (x - 3)$ en krijgen één van de twee eerder genoemde uitkomsten, al dan niet gebruikmakend van een vermenigvuldigtabel.
Ik ga nu klassikaal verder en bedenk snel wat ik nu zou kunnen doen om de leerlingen nog eens goed naar de structuur van de formule te laten kijken, met als uiteindelijk doel het snel kunnen herleiden van de formules.
De vraag om in de formule $y = 10 - (x - 3)$ het getal 7 voor x in te vullen, is geen probleem, iedereen krijgt er 6 uit.
Mooi zo, ik ga verder: 'Leg nu eens uit wat goed is, $y = 10 - x - 3$ of $y = 10 - x + 3$.' Rosanne geeft antwoord: 'Bij die eerste komt er 0 uit als je een 7 voor x invult en dat klopt niet'. Ik ga nog een stapje verder. 'Hoe kun je nu uitleggen dat 10 – (7 – 3) niet gelijk is aan 10 – 7 – 3,

zonder de uitkomsten uit te rekenen?' Bart legt uit: 'Bij die eerste gaat er van die 10 niet 7 af, maar minder.' Marleen steekt haar vinger op. 'Ik heb het anders gedaan. Ik schrijf gewoon de formule anders op: $y = -(x - 3) + 10$, dat vind ik handiger. Dat mag toch?' Een paar leerlingen kijken achterom naar Marleen en dan weer naar mij, met een blik in hun ogen van 'slim hè, van Marleen'. Ik wil Marleen niet teleurstellen, het is een prima strategie en ik zeg dat ook. Maar ik wil toch wel even weten wat ze zou doen bij $y = -2(x + 4) - 3(5 - 4x)$. Ze krijgt steun uit de klas. 'Dat is makkelijker, want dat zijn gewoon twéé formules.' Ze vragen om nog meer van dit soort sommen, om te oefenen. Blijkbaar voelen ze zich erg onzeker en ze zeggen ook dat ze het moeilijk vinden.

Een probleem

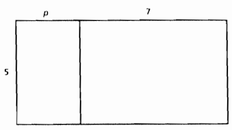
Waarom vinden ze het zo moeilijk? Dit is heel eenvoudig uit te leggen met deze ene bladzijde uit het boek:

Hoofdstuk 4 **Rekenen met formules** 74

4·3 Enkele haakjes ....

14 Met behulp van de rechthoek hiernaast kun je zien hoe je de formule
oppervlakte $= 5 \cdot (p + 7)$ zonder haakjes kunt schrijven. Namelijk als *oppervlakte* $= 5p + 35$
Schrijf onderstaande formules zonder haakjes.

a $opp = 2 \cdot (p + 7)$ **c** $y = 5 \cdot (p + 3)$
b $opp = 3 \cdot (2p + 3)$ **d** $y = p \cdot (p + 2)$



Je kunt een formule als $y = 2 \cdot (x + 8)$ zonder haakjes schrijven door te denken aan een rechthoek met zijden van 2 en $x + 8$.
Een ander hulpmiddel is de vermenigvuldigtabel.
Daarmee kun je ook uitzoeken hoe je de formule $y = 6 \cdot (x - 3)$ zonder haakjes kunt schrijven.

$y = 6 \cdot (x - 3)$

×	x	-3
6	$6x$	-18

$y = 6x - 18$

15 Maak bij de volgende formules een vermenigvuldigtabel en schrijf zonder haakjes.

a $q = 2 \cdot (p + 5)$ **d** $y = (2x - 3) \cdot 4{,}7$
b $r = (2 - 3a) \cdot 9$ **e** $m = -6 \cdot (4{,}2 + n)$
c $k = m \cdot (m^2 + 5)$ **f** $t = (s - 9) \cdot 2\frac{1}{3}s$

▶ *Extra oefening – opdracht E-5*

16 Welke van de onderstaande formules zijn hetzelfde als de formule $y = -1 \cdot (x - 3)$?

a $y = -(x - 3)$ **c** $y = -x + 3$
b $y = -x - 3$ **d** $y = x - 4$

Voor de formule $y = -1 \cdot (x + 2)$ kun je ook schrijven $y = -(x + 2)$
En dat is hetzelfde als $y = -x - 2$

17 Schrijf de volgende formules zonder haakjes.

a $y = -(x + 7)$ **d** $y = \frac{1}{2}n(n + 1)$
b $y = 4x(x + 5)$ **e** $y = -2(x - 3) - x$
c $y = -(3x^2 - 7x)$ **f** $y = 5 - 2(x - 5)$

▶ *Extra oefening – opdracht E-6*

Moderne Wiskunde deel 3vwo, p. 74

Bovenaan staat uitgelegd dat je met behulp van een rechthoek kunt zien hoe je de formule *oppervlakte* = 5 · (p + 7) zonder haakjes kunt schrijven.
Namelijk als *oppervlakte* = 5p + 35. Dit rechthoekmodel is overigens regelmatig vanaf klas 1 aan de orde geweest, maar altijd in een oppervlaktecontext. Nadat dit nog even opgehaald wordt, vermeldt de volgende tekst dat een ander hulpmiddel de vermenigvuldigtabel is. En die formule $y = 5 - 2(x - 5)$ is het laatste probleem van deze bladzijde.
Didactisch gezien is deze opbouw goed en een mooi voorbeeld van progressief schematiseren, maar zelfs voor mijn VWO-leerlingen is het nauwelijks haalbaar om dit proces in één les te doorlopen. En lukt het ze dan om vlot, zonder gebruik te maken van modellen, die formules zonder haakjes te schrijven? Wanneer zou je dit willen bereiken, in dit hoofdstuk? Is dit ook het doel? Het lijkt me wel wenselijk, zeker als ik naar de rest van het derdeklas programma kijk, en ook als ik denk aan de klachten van mijn collega's die in de bovenbouw les geven. Moet ik dan nu maar een heleboel dezelfde sommen geven om de leerlingen te laten oefenen? Nee, ik kies voor een andere weg.

Eigen producties

Ik voel er dus niet veel voor om nu rijtjes sommen op het bord te schrijven. Het idee van 'eigen producties' lijkt me veel beter. Ik wijs op de rijtjes formules in het boek en geef de opdracht om van elke soort er zelf twee of drie te bedenken en uit te werken. Voor de zekerheid controleer ik nog even of ze begrijpen wat ik bedoel met 'soort formule', maar dat was duidelijk.
Ze gaan met deze opdracht aan het werk. Terwijl ze werken, kijk ik hier en daar al na wat af is. Als de bel gaat, krijg ik nog wat blaadjes met eigen producties in mijn handen gedrukt: of ik die thuis wil nakijken zodat ze die de volgende les terug kunnen krijgen.
Dat nakijken was niet veel werk en het was interessant om te zien wat ze hadden bedacht. Hieronder volgt een bloemlezing van wat leerlingenwerk met kort commentaar.

Rosanne heeft het zich niet al te moeilijk gemaakt en gebruikte alleen maar plustekens. Ze heeft blijkbaar nog de steun nodig van de vermenigvuldigtabel:

Zelfverzonnen

$y = 4 \cdot (3 + x) + 3 \cdot (5 + x)$
$y = 7 \cdot x + 27$

	3	x
4	12	$4 \cdot x$

	5	x
3	15	$3x$

Van Ronald weet ik dat hij altijd al vrij snel op een formeel niveau werkt. Zijn werk laat dit ook nu weer zien:

$$y = 6(x \mp 5) - 6(x+12)$$

$$y = 6x - 30 - 6x + -72 \Rightarrow y = -102$$

Selina gebruikt het idee dat je de formule kan zien als een samenstelling van twee formules:

$$y = \underbrace{5(x^2 - 7)}_{5x^2 - 35} - \underbrace{2(3x^2 + 6)}_{-6x^2 - 12}$$

$$\text{antw} \quad y = -1x^2 - 47.$$

Wouter laat niet zien wat hij gedaan heeft. Dat doet hij vaker, dus daar moet ik hem ook nu weer op wijzen:

$$y = -2(-6 + 2x) - 3(4 + 6x)$$

$$y = -22x$$

Kim heeft niet door hoe de structuur van de formule is die ze bedacht heeft:

$$y = 4(3 + 7x) + (8 + 3x)$$

$$y = (12 + 28x) + (32 + 12x)$$

$$y = 44 + 40x$$

Een andere aanpak van Robert:

$$y = 7(2 - x) - 5(x + 3)$$

$$y = (14 - 7x) + (-5x - 15)$$

$$y = -1 - 12x$$

Hieronder twee van de problemen van Evelien:

$$y = -8(-1x - 7) \quad \underline{y = 8x + 7}$$

$$y = 2(x - 5) - 3(3x - x)$$

$$y = 2x - 10 - 9x - 3x$$

$$\underline{y = -10x - 10}$$

Dit gaat nog niet helemaal goed, die 7 moet 56 zijn. Evelien maakt niet de 'klassieke' fout, want die zou zijn dat ze de formule schrijft als $y = 8x - 7$. Bij haar tweede som gaat het ook niet goed, hier maakt ze de fout andersom: x is wel vermenigvuldigd met 3, maar het teken is verkeerd.

Evelien is een leerling die snel leert van haar eigen fouten. Aan het eind van een hoofdstuk zijn haar vaardigheden en inzicht meestal heel goed. Om haar maak ik me geen zorgen. Maar ... .

Een plus en een min

Aan het eind van het hoofdstuk bleek dat de manieren en niveaus waarop de verschillende problemen uit het hoofdstuk werden opgelost tamelijk gelijkgetrokken waren. De resultaten van de toets vielen niet tegen. Eigenlijk ben ik heel tevreden hoe mijn HAVO/VWO leerlingen omgaan met allerlei verbanden, formules en grafieken. De nieuwe opzet van de algebra biedt veel leerlingen steun. Begrippen worden inzichtelijk ontwikkeld met daarbij ook een voor leerlingen begrijpelijke taal. Bijvoorbeeld begrippen als startwaarde, richtingsgetal, stapgrootte en inklemmen, kunnen leerlingen heel goed in verband brengen met de (wiskundige) contexten.

In het nieuwe leerplan (trajectenboek) staat een omschrijving 'manipuleren met variabelen, vooral in klas 3.' Dit algebrahoofdstuk is hier een concretisering van. Voor mijn HAVO en VWO leerlingen is dit in de tijd echter niet goed gepland. Aan het eind van klas 1 hebben ze al veel aan inzicht ontwikkeld op het gebied van variabelen en formules. In de tweede klas wordt hier helaas niet echt veel aan toegevoegd.

Deze conclusie trek ik uit het feit dat aan het eind van de eerste en het begin van de tweede soms problemen besproken worden op een manier en op een niveau die pas aan het eind van de tweede aan de orde komen.

Voor mijn leerlingen zou het algebraprogramma in de tweede klas ingedikt kunnen worden. Dan is er ruimte om een paar onderwerpen die nu pas in de derde aan bod komen naar de tweede klas te verplaatsen. Misschien moet ik dat volgend jaar maar eens proberen uit te voeren in de tweede klas. Want alhoewel de opbouw van de algebralijn goed is, de verdeling in de tijd is dit niet en daar maak ik mij grote zorgen om. Eén van mijn leerlingen uit de 3 VWO klas verwoordde dit met: 'Het lijkt wel of we nu alles in één keer moeten kunnen. Hadden we daarop niet béter voorbereid kunnen worden in de tweede?' Ik weet dat de leerlingen die nu in 4 VWO zitten een vergelijkbaar probleem hebben, maar dat heb ik maar even niet gezegd.

Mieke Abels is als docente verbonden aan de Regionale Scholengemeenschap Broklede te Breukelen. Ze is tevens werkzaam bij het Freudenthal Instituut. ❑