Om de grafische rekenmachine kan zo langzamerhand geen wiskundedocent meer heen en zeker niet in de bovenbouw van HAVO en VWO. De vraag is eigenlijk alleen maar: Waar trek je de grens van wat op het examen toelaatbaar is en hoe lang houdt die stand? **Douwe Kok** geeft zijn mening.

Even Krijten met de GR

Recentelijk is het voorstel voor de nieuwe examenprogramma's voor HAVO en VWO een beetje veranderd. Zo is er een nieuwe eindterm aan toegevoegd:
Bij het raadplegen, verkennen en presenteren van wiskundige informatie en bij het uitvoeren van wiskundige bewerkingen en redeneringen gebruik maken van ICT.

Behalve aan bekende software als grafieken-, statistiek- en meetkundeprogramma's moeten we bij wiskunde ook denken aan spreadsheet-programma's en software voor het doorrekenen van modellen en het uitvoeren van simulaties.
Wat zal zo'n toevoeging in de praktijk gaan betekenen? Het antwoord wordt vooral bepaald door de plannen met het examen. Dat leert ook het recente verleden. Enkele opmerkingen in de examenprogramma's voor VBO/MAVO zorgden ervoor dat alle wiskunde-schoolboeken nu serieus aandacht besteden aan computergebruik. Het gevolg was ook dat scholen tamelijk massaal wiskundige software aanschaften. En daarmee zijn twee belangrijke stappen gezet op weg naar het regelmatig gebruik maken van de computer. De belangrijkste invloed van ICT binnen het vak wiskunde zal de komende jaren uitgaan van de grafische rekenmachine. Dat zal te merken zijn aan de wijze waarop in de schoolboeken bepaalde begrippen worden ontwikkeld, denk bijvoorbeeld aan de afgeleide. Maar ook de vraag welke wiskundige technieken ingeoefend moeten worden, krijgt een ander antwoord in het licht van deze technologie. Deze vraag wordt klemmender naarmate er krachtiger apparaten op de markt komen. De ontwikkelingen gaan erg snel. De jongste generatie rekenmachines is al voorzien van computeralgebra. Denk maar aan de TI-92, die docenten voor ongeveer 300 gulden kunnen aanschaffen. Helaas is er geen duidelijke grens tussen grafische rekenmachines met en zonder computeralgebra. De HP83G bijvoorbeeld kan 'echt' differentiëren.
Welke rekenmachines zullen op het examen worden toegestaan? Wordt er een ondergrens en/of bovengrens vastgelegd met betrekking tot de toegestane mogelijkheden van het apparaat?
Ik nodig u uit tot een klein gedachten-experiment: Hieronder staat opgave 1 uit het examen wiskunde B VWO 1996, 1e tijdvak.

Opgave 1

Met domein R zijn gegeven de functies
$f: x \to (x^2-4)(2x+1)$ en $g: x \to x^2-4$

7p 1. ❒ Onderzoek f en teken de grafiek van f in een rechthoekig assenstelsel Oxy.

4p 2. ❒ Los op: $f(x) > g(x)$.

De lijn met de vergelijking $x = p$ met $p \in \langle -2, 0 \rangle$ snijdt de grafiek van f in A en de grafiek van g in B.
7p 3. ❒ Bereken de waarden van p waarvoor de oppervlakte van driehoek OAB gelijk is aan 3.

Met domein R zijn nu voor elke $a > 0$ gegeven de functies

$f_a: x \to (ax^2-4)(2x+1)$ en $g_a: x \to ax^2-4$

De grafieken van f_a en g_a hebben drie gemeenschappelijke punten en sluiten twee vlakdelen V_1 en V_2 in.
6p 4. ❒ Bewijs dat de oppervlakten van V_1 en V_2 gelijk zijn.

Stel u voor dat uw leerlingen een grafische rekenmachine hebben die voorzien is van de knoppen DIFF (om functies te differentiëren), INT (om de primitieve te bepalen) en SOLVE (om vergelijkingen op te lossen). Wat moeten uw leerlingen dan kunnen om deze opgave te maken? Neem er even de tijd voor.

Met onze denkbeeldige rekenmachine is het vinden van de uiterste waarden niet meer dan een kwestie van knoppen drukken. Je moet wel weten dat je van $f(x)$ de afgeleide moet hebben en dat je vervolgens de x-waarden wilt weten waarvoor die afgeleide gelijk is aan nul.
Vraag 2 maak je door eerst op te lossen $f(x) = g(x)$ en vervolgens lees je uit een figuur met de grafieken van $f(x)$ en $g(x)$ het antwoord af. Je drukt op de SOLVE-knop en het enige wat je te doen staat is 'verstandig kijken': het combineren van de grafiek met het resultaat bij SOLVE.
Bij vraag 3 heb je niks aan je rekenmachine. Nou ja, je hebt in elk geval de grafiek.
Voor vraag 4 geldt hetzelfde. Je moet zelf weten hoe je de oppervlakten V1 en V2 kunt berekenen. Het vereist nogal wat inzicht om een machine te bedienen die bij dit soort situaties de primitieve kan vinden. De SOLVE-knop kan wel helpen bij het vinden van de snijpunten.

Wat is de didactische moraal van dit verhaal? De machine kan veel technische taken overnemen, maar de essentiële beslissingen moet de gebruiker nemen. Bij deze opgave zijn dat:

- Om de uiterste waarde te bepalen moet je eerst de afgeleide hebben. Daarna stel je die afgeleide gelijk aan nul en moet je deze vergelijking oplossen. De bij deze oplossingen horende functiewaarden leveren de extreme waarden op.
- Een ongelijkheid los je op door eerst de bijbehorende vergelijking op te lossen. Met de grafiek vind je dan het antwoord.
- Bij vergelijkingen met parameters moet je precies weten wat de rol van de parameter is. Overigens kan juist bij de ontwikkeling van dat inzicht een grafisch pakket en/of grafische rekenmachine een belangrijke rol spelen.
- Voor het bewijs dat de oppervlakten gelijk zijn, moet je over dezelfde inzichten beschikken als altijd. Wel verkleint hier het rekenapparaat de kans op technische fouten.

Wat betekent de volgens mij onstuitbare opkomst van de grafische rekenmachine voor dit moment? De discussie moet gaan over de manier waarop we soft/hard-ware (het onderscheid is eigenlijk niet interessant meer) willen gaan gebruiken. En dan zijn er grofweg twee mogelijkheden:

- alleen als wiskundig gereedschap
- ook als didactisch hulpmiddel.

Want net als bij een programma als VU-grafiek kun je de grafische rekenmachines inzetten bij begripsontwikkeling. Denk aan het begrip parameter. Een extra probleem is dat deze twee aspecten niet goed zijn te scheiden. Hoe zal de begripsontwikkeling verlopen bij leerlingen die vanaf zeg begin 4 VWO de TI-92 onder handbereik hebben? Sommigen menen dat de techniek die nodig is om de huidige examens VWO-B te kunnen maken meteen de basis vormt om met inzicht computeralgebra-pakketten te kunnen gebruiken. Zij willen dus de verdedigingslinie leggen bij de computeralgebra. Ik vraag me af hoe lang zo'n verdediging stand houdt. Wat doe je als een apparaat als de TI-92 in het jaar 2002 nauwelijks meer kost dan het simpele broertje? Lastige vragen, die wel beantwoord moeten worden. Voorlopig blijft het nog onrustig in wiskundeland.

Deze 'Even Krijten' is ontleend aan een lezing die de auteur op 2 oktober j.l. heeft gehouden in het kader van de APS-conferentie 'Wiskunde en zelfstandig leren'.

Douwe Kok is verbonden aan de Vrije Universiteit te Amsterdam.

Vervolgcursus Internet

Thema:	Het gebruik van ICT bij het zelfstandig leren in de bovenbouw voortgezet onderwijs.
Doelgroep:	Docenten exacte vakken (wiskunde, natuurkunde, scheikunde, biologie).
Organisatie:	CDbeta, Universiteit Utrecht.
Materiaal:	Handleiding + één Access op Internet per vier docenten.

Inhoud

In vervolg op de basiscursus Internet, die in het najaar van 1996 werd georganiseerd, wordt in het voorjaar van 1997 een vervolgcursus aangeboden, waarin de meer vakinhoudelijke aspecten van het gebruik van Internet aan de orde komen.
In deze cursus zullen de cursisten onder andere met elkaar inventariseren welke concrete gebruiksmogelijkheden aanwezig zijn voor het gebruik van Internet in de lespraktijk. De concrete uitwerkingen hiervan zullen vervolgens in school uitgeprobeerd worden.
De cursus wordt afgesloten met een demonstratie door iedere cursist van een ontwikkelde les c.q. lesidee.

Inlichtingen

Jenny Andriese, tel 030-25 31 179
email: J.Andriese@fys.ruu.nl
Homepage CDbeta: http://www.fys.ruu.nl/~csmeut