Spreadsheet-programma's worden weinig gebruikt in het Nederlandse wiskundeonderwijs. Toch liggen bij een vak als wiskunde A de mogelijkheden voor het oprapen. **Victor Hermans** laat dit zien aan de hand van enkele voorbeelden.

Spreadsheets en wiskunde

Nu het erop lijkt dat ook in het alledaagse wiskunde-onderwijs de computer een grotere rol zal spelen, rijst de vraag welke programmatuur het geschiktste is om in de les te gebruiken. Welnu, er zijn veel programma's die zich afficheren als wiskundeprogrammatuur maar er is niet één programma dat ideaal is. Een categorie die veel wensen vervult en toch zelden genoemd wordt, is de spreadsheet. De gangbare merken zijn Quattro Pro, Lotus en Excel. Deze programma's vinden vooral aftrek in de boekhoudkundige en commerciële wereld. Ze behoren naast de tekstverwerkers en databaseprogramma's tot de meest populaire software.

Kort gezegd komt het principe van de spreadsheet erop neer dat de gebruiker de beschikking heeft over een aantal regels en kolommen. De regels zijn genummerd, de kolommen beginnen bij de letter A. De cel in de linkerbovenhoek heet dus A1. In elke cel past een tekst, getal, formule of commando.

Wat de gemiddelde gebruiker vooral waardeert, is de combinatie van tekst en getal, de flexibiliteit, het grote assortiment van bewerkingen en de makkelijke visualisatie. Het betreft hierbij vooral berekeningen die uit wiskundig oogpunt niet erg interessant zijn: zeg de omzetcijfers van twaalf maanden, een overzicht van bezittingen en schulden en dergelijke. Het geheel – vaak gecombineerd met een grafiek en toelichting – is compleet met een spreadsheet te produceren.

Daarnaast is er een groot 'menu' met allerlei aantrekkelijke mogelijkheden voor databasebewerkingen, die hier verder buiten beschouwing blijven, en wiskunde.

Vergelijkingen oplossen

De voorbeelden in dit artikel zijn doorgerekend met Quattro-Pro, versie 4.0. Het eerste voorbeeld gaat over het oplossen van vergelijkingen. Tik op regel 1, van cel A1 tot en met cel C1 het volgende in:

	A	B	C
1	1	+A1^13	@SUM(A1..B1)

De spreadsheet voert de berekeningen meteen uit, zodat je de bovenstaande formules of commando's niet meer ziet (tenzij de cursor er toevallig zou staan).

Wat de gebruiker wel ziet is het volgende:

	A	B	C
1	1	1	2

Stel dat we willen weten hoe groot het getal in cel A1 moet zijn om een som te krijgen van 250. Je kan al gokkend natuurlijk een heel eind komen. Veel fraaier is echter de volgende methode. Neem in het algemene menu de Tools en kies dan het submenu Solve for. Hier moeten we enkele vragen beantwoorden, zoals:

- Waar staat de formule? (C1)
- Wat is je 'target'? (250) en
- Waar staat de variabele? (A1)

Het programma levert dan de waarde 1.27580. Wat we hiermee dus eigenlijk gedaan hebben, is de vergelijking $x + x^{13} = 250$ oplossen.

Je kan dit probleem natuurlijk sneller oplossen met een wiskundeprogramma als Derive, maar helaas hebben veel scholen dat nog niet en dan is de spreadsheet vooralsnog een uitkomst. Daar komt nog bij dat spreadsheets deze typisch wiskundige oplossingen ook niet als zodanig presenteren, waardoor opleiders de kans krijgen om een 'gecamoufleerde' wiskundeles te geven.

Veel onderwerpen die bijvoorbeeld voorkomen in het wiskunde-A programma kunnen studenten beter en sneller doorrekenen met een spreadsheet dan met de gangbare software voor wiskunde.

In het onderstaande komen aan de hand van onder andere eindexamenopgaven achtereenvolgens aan de orde: lineair programmeren, matrices, regressie, groeiprocessen, kansrekening en statistiek.

Lineair programmeren

Een fabriek produceert onder andere bakovens en magnetrons[1], de winst bedraagt respectievelijk f 60,- en *f 90,-. Bij de productie zijn er in de diverse afdelingen fysieke beperkingen, randvoorwaarden genoemd.*

Het overzicht hiervan is als volgt:

afdeling	beschikbare tijd	arbeidstijd bakoven	arbeidstijd magnetron
plaatwerkerij	160	1,6	2,0
elektro-afdeling	180	2,0	1,8
montage-afdeling I	120	1,5	–
montage-afdeling II	120	–	2,0
controle-afdeling	40	0,4	0,4

Het model, in wiskundige stijl geformuleerd, luidt:

maximaliseeer: $\text{Winst} = 60 * B + 90 * M$

onder de randvoorwaarden:

$$
\begin{aligned}
1.6 * B + 2 * M &\leq 160 \\
2 * B + 1.8 * M &\leq 180 \\
1.5 * B &\leq 120 \\
2 * M &\leq 120 \\
0.4 * B + 0.4 * M &\leq 40
\end{aligned}
$$

De spreadsheet zit als volgt in elkaar. Elke vergelijking (althans de linkerkant daarvan) is opgeborgen in een cel.

	A	B	C	D	E
1	totale winst	0	(B5*B6+C5*C6)		
2					
3		bakovens	magnetrons		
4					
5	productie	0	0		
6	winst p/st	60	90		
7				constraints	waarden
8	voorwaarde 1	1.6	2	0	160
9	2	2	1.8	0	180
10	3	1.5	0	0	120
11	4	0	2	0	120
12	5	0.4	0.4	0	40
				(B5*B12+C5*C12)	

De doelstelling staat in cel B1 en de randvoorwaarden staan in kolom D. Tussen haakjes staan de formules die in feite 'onder' de getallen verborgen zitten.
Het is nu zaak om de spreadsheet de juiste opdracht mee te geven. Dit gebeurt door in het afgebeelde hoofdmenu de optie 'Tools' te kiezen. Hier bevindt zich het (in figuur 1 niet zichtbare) submenu 'Optimizer'. Dat levert weer enkele dialoogvensters op, waar de gebruiker de goede antwoorden moet intikken.

Hierna geeft het programma de oplossing van 25 ovens en 60 magnetrons, met bovendien allerlei andere gegevens waaronder de schaduwprijzen.

```
 File  Edit  Style  Graph  Print  Database  Tools  Options  Window        ?
A:A8: (F2) [W16] "constraint 1
          A               B
1     total profit     6900  Solution Cell                     A:B1..B1
2                            Variable Cell(s)                  A:B5..C5
3                         0  Constraints
4                            Options
5        production      25  Answer R  Constraints:               ..I30
6            profit      60  Detail R   <Add New Constraint>
7                            Go         A:E8 <= A:F8
8     constraint 1        1  Restore    A:E9 <= A:F9
9                2        2  Model      A:E10 <= A:F10
10               3        1  Reset      A:E11 <= A:F11
11               4        0  Quit       A:E12 <= A:F12
12               5        0             A:B5 Integer
13                                      A:C5 Integer
14
15  Answer Report                         Library
16  Solution Cell:  Starting      Final
17             A:B1      6938            69
18
19  Variable Cells: Starting      Final
20             A:B5        26            26
\A/\B/\C/\D/\E/\F/\G/\H/\I/\J/\K/\L/
Set limits for the solution                                              EDIT
```

fig. 1 Beeldschermafdruk van Quatro-Pro met de verschillende submenu's bij het lineaire programmeringsprobleem

Matrices

Een ander aardig onderdeel is het matrixmenu waarin de mogelijkheid bestaat om matrices te inverteren en te vermenigvuldigen. (Het programma spreekt trouwens consequent over 'blocks' in plaats van matrices.) Het menu is bereikbaar via 'Tools' en 'Advanced Mathematics'. De matrixinverse verleent goede diensten bij het oplossen van stelsels van vergelijkingen. De matrixvermenigvuldiging is handig voor het gebruik van Markovketens, waarmee je bijvoorbeeld marktaandelen kan berekenen.

Stel er zijn twee politieke partijen, Democraten en Republikeinen, elk van gelijke sterkte in de uitgangssituatie. Onderzoek wijst uit dat bij elke verkiezing 70% van de Democraten trouw blijft aan zijn eigen partij en 30% overloopt. Bij de concurrent zijn de cijfers 60% en 40%.

Dit tikken we als volgt in:

	A	B	C	D
1	DEM.	REP.	DEM.	REP.
2	0.50	0.5	0.70	0.30
3			0.40	0.60

Door de beginvector in cel A2 tot en met B2 te vermenigvuldigen met de matrix (C2 tot en met D3) verkrijgt men de nieuwe krachtsverhouding in cel A3 en B3, bijvoorbeeld. Door de nieuwe verdeling weer te vermenigvuldigen met de matrix en dat proces nog enkele keren te herhalen, blijkt al gauw dat de partij met de trouwste aanhang het grootst wordt. De beginsituatie is hierbij niet van belang, wat blijkt als je de matrix een aantal malen met zichzelf vermenigvuldigt. Uiteindelijk zal een stabiele situatie ontstaan waarin 57% van de bevolking voor de Democraten en 43% voor de Republikeinen stemt.

Regressie

Een statisticus in de Verenigde Staten van Amerika vermoedt dat er een bepaald verband bestaat tussen enerzijds het maandelijks olieverbruik van een huis (Y) en anderzijds de gemiddelde buitentemperatuur (X1) en de dikte van de dakisolatie van het huis (X2). Een willekeurige steekproef van vijftien huizen levert de gegevens op die afgebeeld zijn in de kolommen A, B en C van figuur 2. (De eenheden zijn respectievelijk gallons, graden Fahrenheit en inches.)

Met behulp van Tools, Advanced Math en Regression kan een lineaire regressie uitgevoerd worden op de twee variabelen X1 en X2. Dit levert de volgende regressievergelijking op:

$$Y = 562.151 - 5.43658\ X1 - 20.0123\ X2$$

de correlatie bedraagt ruim 98%.

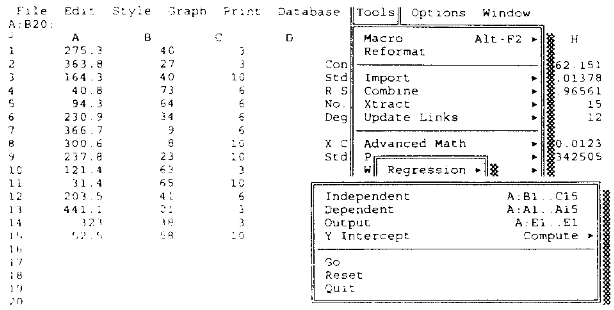

fig. 2

De bedenker van dit voorbeeld[2] suggereert trouwens om voor dit soort problemen professionele pakketten als Minitab of SPSS te gebruiken. Die leveren overigens exact dezelfde uitkomst.

Analyse van groeiprocessen

De bevolkingsomvang van Sri-Lanka in de loop der jaren staat in de tabel hieronder (in 1000-tallen)[3].

jaar	bevolkingsomvang
1871	2400
1901	3566
1921	4499
1931	5307
1946	6657
1953	8098
1963	10582
1971	12690
1981	14988

De vraag is natuurlijk: volgens welk patroon groeit die bevolking? Men zou weer een regressie kunnen uitvoeren (Tools, Advanced Math, Regression), maar dat veronderstelt een rechtlijnig verband, wat misschien niet zo voor de hand ligt bij dit soort groeiprocessen. Dus proberen we of een exponentieel verband misschien beter past. Daarvoor moeten we de gegevens in een grafiek zetten en analyseren. (Menu-optie: Graph, Series, Analyze, Linear Fit en Exponential Fit).

Zoals uit figuur 3 blijkt, is de grafiek met de door het programma gesuggereerde exponentiële groei bijna identiek met de werkelijkheid. De groeifactor blijkt 1,247499 per periode te zijn. Aangezien de periode niet steeds gelijk is, bedraagt de veronderstelde jaarlijkse groeivoet in de eerste 30 jaar

$$1{,}247499^{\frac{1}{30}} - 1 = 0{,}0074$$

dus 0,74% per jaar.

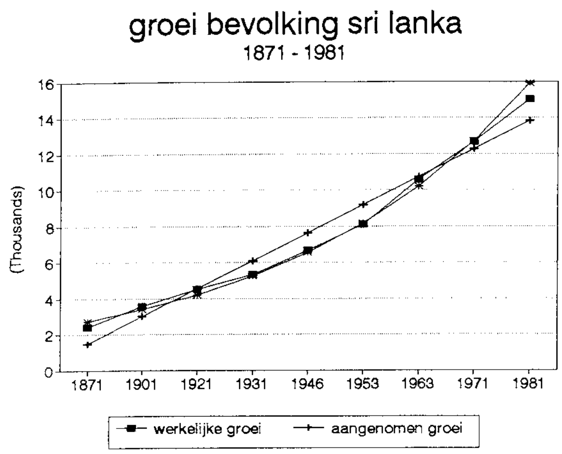

fig. 3

Kansrekening en statistiek

Veel computerprogramma's kunnen randomgetallen produceren, zo ook de spreadsheet. De functie @RAND maakt een willekeurig getal tussen nul en één. Een andere functie is @INT, de afkorting van *integer*, geheel getal. Het gooien van een dobbelsteen simuleren we aldus:

@INT(@RAND*6)+1.

Het werpen van 3 dobbelstenen tegelijk en het bepalen van de som van de ogenaantallen gaat als volgt:

@INT(@RAND*6)+@INT(@RAND*6)+@INT(@RAND*6)+3.

Deze formule zetten we in de linkerbovenhoek van ons werkvel en we kopiëren deze cel zo vaak mogelijk. Op mijn (gangbare) computer levert dat 6000 worpen op. We sorteren deze getallen in twee aparte kolommen, één voor het aantal ogen, varierend van 3 tot en met 18, de ander voor de frequentie van het aantal ogen.

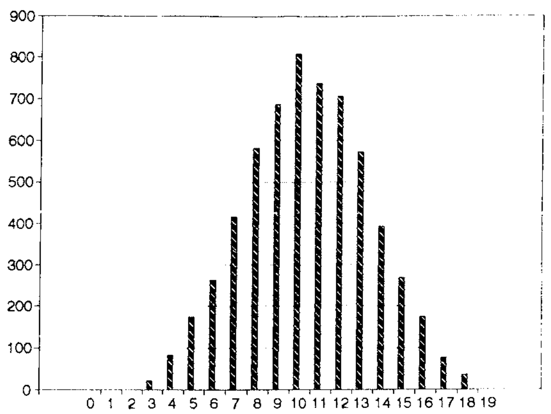

fig. 4

Aan de hand daarvan kan een staafdiagram gemaakt worden, dat – als we tenminste genoeg worpen hebben gedaan – tamelijk dicht in de buurt komt van de normale verdeling (figuur 4).

Conclusie

Spreadsheets of rekenbladen zijn heel geschikt voor het wiskundeonderwijs en zouden op geen enkele school mogen ontbreken. Ik zie de volgende voordelen:

- spreadsheets zijn bruikbaar bij het oplossen van allerlei rekenproblemen, variërend van klein tot kolossaal groot, van basisonderwijs tot professioneel en universitair niveau
- door de brede verspreiding van spreadsheets buiten het onderwijs zijn studenten er zeker van dat ze ook na hun opleiding de gebruikte technieken kunnen blijven toepassen
- rekenbladen zijn bruikbaar als black-box (de gebruiker begrijpt niet hoe het model tot stand gekomen is) en als white-box (de gebruiker heeft alle relaties zelf gedefinieerd)
- spreadsheets kunnen binnen een klein kader zowel getallen, teksten als grafieken combineren
- rekenbladen gebruiken nauwelijks wiskundige terminologie en zijn daardoor goed bruikbaar op die opleidingen waar bijvoorbeeld wiskunde niet als apart vak gegeven wordt.

Er blijft natuurlijk altijd iets te wensen over. Een spreadsheet is puur numerieke software en dus is het lastig om functies te formuleren en af te beelden. Men blijft daarvoor inderdaad aangewezen op pakketten met symbolische mogelijkheden.

Victor Hermans is docent aan de Hogeschool van Utrecht.
Privé-adres: Bartoklaan 14, 2253 CX Voorschoten, tel 071-5613589, email: v.hermans@econ.hvu.nl

Dit artikel is gebaseerd op een suggestie van Rom Pijlgroms.

Noten

[1] Eindexamen VWO - Wiskunde A, 1989 I, opgave 2.
[2] Berenson, Mark L. & David M. Levine (1992). *Basic business statistics*, 5th edition. New York: Prentice-Hall, ISBN 0-13-065780-8, blz. 669.
[3] Eindexamen VWO - Wiskunde A, 1988 II, opgave 2A.