

Vorig jaar is er een herziene druk – een study edition – van het beroemde boek *The Mathematical Experience* (1981) van Philip J. Davis en Reuben Hersh verschenen. **Arthur Bakker** ziet hierin een goede gelegenheid dit waardevolle boek weer eens onder de aandacht te brengen.

The Mathematical Experience

Het boek

Wat is wiskunde? Deze vraag is één van de belangrijkste thema's van *The Mathematical Experience* van Philip J. Davis en Reuben Hersh. Andere belangrijke vragen die aan de orde komen, zijn: wat is er zo mooi aan wiskunde, wat is het nut van wiskunde, wat doet een wiskundige? De schrijvers zijn ervan overtuigd dat een wiskundige aan een geïnteresseerde leek moet kunnen uitleggen waar hij of zij mee bezig is en wat er zo fascinerend aan is. Ja, maar hoe kun je nu een niet-wiskundige de essentie van de niet-standaardanalyse of de moderne verzamelingenleer uitleggen? Volgens de schrijvers is het heel goed mogelijk daarover met leken te converseren en ze te overtuigen van de kracht en de schoonheid van de koningin der wetenschappen.

Aanvankelijk stond ik enigszins sceptisch tegenover de wervende en populaire stijl van de eerste hoofdstukken: wat te denken van dialogen met de Ideale Wiskundige? Maar langzamerhand ben ik zeer onder de indruk geraakt van de prestatie van Davis en Hersh. Talloze filosofische en historische aspecten van de wiskunde worden heel helder uiteengezet. Ze zijn er zelfs in geslaagd de kernideeën van de niet-euclidische meetkunde, niet-cantoriaanse verzamelingenleer en niet-standaardanalyse duidelijk te maken. Ik had het niet verwacht van een boek van vijfhonderd pagina's over wiskunde, maar het werd een bestseller, zelfs de *Winner of the 1984 American Book Award*. Het boek wordt vooral gebruikt bij colleges over kunst en wetenschappen op lerarenopleidingen. Speciaal voor studenten en docenten is er nu een studie-editie met essay-opdrachten, discussieonderwerpen, aanbevolen literatuur en wiskunde- en computervraagstukken. Om een indruk te geven:

Write a program that exhibits every even integer up to, say, 1000, as the sum of two prime numbers (Goldbach's conjecture).

You are a mathematician who thought you proved the Goldbach conjecture. Unfortunately, someone has found a flaw in your proof. You are now trying a different ap-

proach to the problem. The Atlantic Monthly wants to interview you. Describe the Goldbach conjecture to your readers and explain why you continue to prove this conjecture that eluded mathematicians for more than 100 years.

Do we 'find' mathematics or do we 'invent' it? What do you think?

ILLUSTRATING GOLDBACH'S CONJECTURE

4 = 2 + 3	20882 = 3 + 20879
6 = 3 + 3	20884 = 5 + 20879
8 = 3 + 5	20886 = 7 + 20879
10 = 3 + 7	20888 = 31 + 20857
12 = 5 + 7	20890 = 3 + 20887
14 = 3 + 11	20892 = 5 + 20887
16 = 3 + 13	20894 = 7 + 20887
18 = 5 + 13	20896 = 17 + 20879
20 = 3 + 17	20898 = 11 + 20887
22 = 3 + 19	20900 = 3 + 20897
.....

Dit soort extra opdrachten en vragen maken de studie-editie zeer geschikt voor de wiskundeleraar in opleiding. Maar ook de gevestigde leraar kan ideeën opdoen; voor een zebrablok of voor zo maar een losse krent in de pap. *The Mathematical Experience* is echt een boek om in te grasduinen; het heeft soms iets van een encyclopedie. Of je nu de eerste 2500 priemgetallen of de eerste 5000 decimalen van π wilt zien, of je nu een afbeelding van L'Hospital of een bewijs van de stelling van Pythagoras zoekt, een beknopt historisch overzicht wilt raadplegen of een exposé van de belangrijkste filosofische stromingen wilt lezen, je vindt het allemaal in *The Mathematical Experience*.

Als je in een les iets extra's wilt doen, een praatje over wiskunde moet houden of net een discussie met collega's hebt gehad, dan kan dit boek een prettig naslagwerk zijn. Bovendien spreekt uit de tekst een aanstekelijke liefde voor het vak; alleen dat al kan een reden zijn om het af en toe open te slaan. Uiteraard gaat het nergens echt diep op

in, maar de uitgebreide bibliografie kan de diepgraver verder helpen.

Wat is wiskunde?

Deze vraag kun je op veel manieren benaderen. Davis en Hersh beginnen met een historisch antwoord dat ook als woordenboekdefinitie bruikbaar is: wiskunde is de wetenschap van kwantiteit en ruimte. Ze merken daarbij op dat ook het symbolisme met betrekking tot kwantiteit en ruimte tot het wiskundig onderzoeksterrein behoort. Maar ook andere benaderingen zijn mogelijk: ik heb zelf in de derde schoolweek aan een brugklas en een 4 HAVO-klas gevraagd wat wiskunde volgens hen is en wat er leuk en niet leuk aan is. Ook negen leraren in opleiding hebben deze vragen beantwoord.

Wiskunde is een soort rekenen, volgens de brugklassers; een 'volwassenere naam' voor rekenen, zei eentje. Een enkeling heeft over formules gehoord: wiskunde is iets met formules of zo. Het is ook gewoon een schoolvak. Het is alleen leuk als je het begrijpt; gelukkig doet vrijwel iedereen dat nog in dit stadium.

Ook voor 4 HAVO A is wiskunde een soort rekenen, maar dan worden er allerlei activiteiten bij vermeld: gegevens verwerken in grafieken en tabellen, voorspellingen doen op grond van grafieken, enzovoorts. Maar wiskunde is ook 'een moeilijke manier om problemen op te lossen die er niet zijn'. Je leert er wel logisch van denken.

Zeer karakteristiek vond ik het antwoord dat wiskunde alleen leuk is als je het snapt; het geeft verder een kick als je een moeilijke som oplost. Yes! Het zwarte gat lost op. Er is altijd een manier om achter het antwoord te komen en er is maar één antwoord – dit in tegenstelling tot veel andere vakken op school.

Alleen maar sommen doen, is uiterst saai. Hier kan de docent iets aan doen door af en toe een krent in de pap te doen.

Wat is wiskunde volgens leraren in opleiding? Dit varieert van 'een studie', 'een spel', 'een uit de hand gelopen hulpmiddel om problemen op te lossen' tot 'een abstracte wereld van zuivere begrippen in hun onderlinge samenhang'. Helderheid, schoonheid, zekerheid, abstractie, duidelijkheid, eenvoud, universaliteit, zijn zo enkele begrippen die genoemd worden. De één geniet vooral van het abstracte, de ander van de toepasbaarheid, weer een ander van het feit dat het denken in je hoofd blijkt te kloppen met de wereld om je heen.

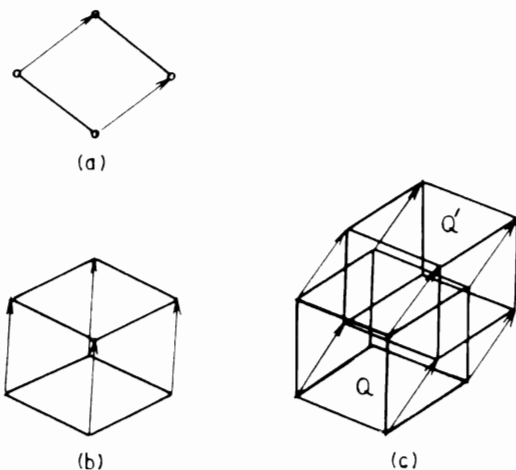
Al dit soort aspecten komen in *The Mathematical Experience* aan bod: abstractie en generalisatie en het verschil daartussen, de rol van symbolen, bewijzen, het nut voor andere wetenschappen, maar ook de relatie met religie en astrologie. Eén hoofdstuk is gewijd aan onderwijs; hierin komt onder andere Pólya's *How to solve it?* – een boek over hoe je een wiskundig probleem aanpakt – aan bod. Dan volgt een hoofdstuk over filosofische vragen. In welke zin bestaan wiskundige objecten? Leven ze in een Pla-

toonse ideeënwereld, bestaan ze alleen in de menselijke geest of is wiskunde een soort schaakspel? Is wiskunde een cumulatieve wetenschap van eeuwig ware stellingen of is ze net zo goed falsificeerbaar en aan correctie onderhevig als de natuurwetenschappen? Na een korte behandeling van het Platonisme, constructivisme en formalisme volgen bespiegelingen over Popper en Lakatos. De schrijvers ontpoppen zich als aanhangers van deze wetenschapsfilosofen, die onder andere vinden dat de wiskunde geen grondslagen nodig heeft.

Hyperkubus

Een mooi voorbeeld van iets wat je in de klas kunt behandelen en een aanknopingspunt vormt voor filosofische discussie, is de constructie van een vierdimensionale kubus (een hyperkubus). Hoe ziet een vierdimensionale kubus eruit? Bestaat die wel? Een fysisch georiënteerde slimmerik zal misschien zeggen dat de tijd de vierde dimensie is. In de relativiteitstheorie is dat gebruikelijk, maar in de wiskunde doen we het anders.

Een punt is nuldimensionaal. Beweeg dit punt in een richting over een bepaalde afstand, zeg 1, en je hebt een (één-dimensionaal) lijnstukje. Beweeg dan dit lijnstukje over een afstand 1 in een nieuwe richting – loodrecht op de vorige – en je krijgt een (tweedimensionaal) vierkant. Dit vierkant verplaatsen we weer over een afstand 1 in een nieuwe richting – loodrecht op de vorige twee – en we krijgen een (driedimensionale) kubus. Hoe ziet een hyperkubus er nu uit? We moeten hetzelfde doen als in ieder van de vorige stappen. Dit vraagt een bepaalde abstractie. We bewegen de kubus in een nieuwe richting (gesteld dat die er is) – loodrecht op de vorige richtingen – over een afstand 1 en we hebben een vierdimensionale kubus geconstrueerd!



Hebben we in onze geest een 'nieuw' object geconstrueerd, of bestond dit al en hebben we het alleen ontdekt? Het is in ieder geval een imaginair object dat niet in de fysieke werkelijkheid te vinden is. Wel kunnen we er een

Vorig jaar is er een herziene druk – een study edition – van het beroemde boek *The Mathematical Experience* (1981) van Philip J. Davis en Reuben Hersh verschenen. **Arthur Bakker** ziet hierin een goede gelegenheid dit waardevolle boek weer eens onder de aandacht te brengen.

The Mathematical Experience

Het boek

Wat is wiskunde? Deze vraag is één van de belangrijkste thema's van *The Mathematical Experience* van Philip J. Davis en Reuben Hersh. Andere belangrijke vragen die aan de orde komen, zijn: wat is er zo mooi aan wiskunde, wat is het nut van wiskunde, wat doet een wiskundige? De schrijvers zijn ervan overtuigd dat een wiskundige aan een geïnteresseerde leek moet kunnen uitleggen waar hij of zij mee bezig is en wat er zo fascinerend aan is. Ja, maar hoe kun je nu een niet-wiskundige de essentie van de niet-standaardanalyse of de moderne verzamelingenleer uitleggen? Volgens de schrijvers is het heel goed mogelijk daarover met leken te converseren en ze te overtuigen van de kracht en de schoonheid van de koningin der wetenschappen.

Aanvankelijk stond ik enigszins sceptisch tegenover de wervende en populaire stijl van de eerste hoofdstukken: wat te denken van dialogen met de Ideale Wiskundige? Maar langzamerhand ben ik zeer onder de indruk geraakt van de prestatie van Davis en Hersh. Talloze filosofische en historische aspecten van de wiskunde worden heel helder uiteengezet. Ze zijn er zelfs in geslaagd de kernideeën van de niet-euclidische meetkunde, niet-cantoriaanse verzamelingenleer en niet-standaardanalyse duidelijk te maken. Ik had het niet verwacht van een boek van vijfhonderd pagina's over wiskunde, maar het werd een bestseller, zelfs de *Winner of the 1984 American Book Award*. Het boek wordt vooral gebruikt bij colleges over kunst en wetenschappen op lerarenopleidingen. Speciaal voor studenten en docenten is er nu een studie-editie met essay-opdrachten, discussieonderwerpen, aanbevolen literatuur en wiskunde- en computervraagstukken. Om een indruk te geven:

Write a program that exhibits every even integer up to, say, 1000, as the sum of two prime numbers (Goldbach's conjecture).

You are a mathematician who thought you proved the Goldbach conjecture. Unfortunately, someone has found a flaw in your proof. You are now trying a different ap-

proach to the problem. The Atlantic Monthly wants to interview you. Describe the Goldbach conjecture to your readers and explain why you continue to prove this conjecture that eluded mathematicians for more than 100 years.

Do we 'find' mathematics or do we 'invent' it? What do you think?

ILLUSTRATING GOLDBACH'S CONJECTURE

4 = 2 + 3	20882 = 3 + 20879
6 = 3 + 3	20884 = 5 + 20879
8 = 3 + 5	20886 = 7 + 20879
10 = 3 + 7	20888 = 31 + 20857
12 = 5 + 7	20890 = 3 + 20887
14 = 3 + 11	20892 = 5 + 20887
16 = 3 + 13	20894 = 7 + 20887
18 = 5 + 13	20896 = 17 + 20879
20 = 3 + 17	20898 = 11 + 20887
22 = 3 + 19	20900 = 3 + 20897
.....

Dit soort extra opdrachten en vragen maken de studie-editie zeer geschikt voor de wiskundeleraar in opleiding. Maar ook de gevestigde leraar kan ideeën opdoen; voor een zebrablok of voor zo maar een losse krent in de pap. *The Mathematical Experience* is echt een boek om in te grasduinen; het heeft soms iets van een encyclopedie. Of je nu de eerste 2500 priemgetallen of de eerste 5000 decimalen van π wilt zien, of je nu een afbeelding van L'Hospital of een bewijs van de stelling van Pythagoras zoekt, een beknopt historisch overzicht wilt raadplegen of een exposé van de belangrijkste filosofische stromingen wilt lezen, je vindt het allemaal in *The Mathematical Experience*.

Als je in een les iets extra's wilt doen, een praatje over wiskunde moet houden of net een discussie met collega's hebt gehad, dan kan dit boek een prettig naslagwerk zijn. Bovendien spreekt uit de tekst een aanstekelijke liefde voor het vak; alleen dat al kan een reden zijn om het af en toe open te slaan. Uiteraard gaat het nergens echt diep op

in, maar de uitgebreide bibliografie kan de diepgraver verder helpen.

Wat is wiskunde?

Deze vraag kun je op veel manieren benaderen. Davis en Hersh beginnen met een historisch antwoord dat ook als woordenboekdefinitie bruikbaar is: wiskunde is de wetenschap van kwantiteit en ruimte. Ze merken daarbij op dat ook het symbolisme met betrekking tot kwantiteit en ruimte tot het wiskundig onderzoeksterrein behoort. Maar ook andere benaderingen zijn mogelijk: ik heb zelf in de derde schoolweek aan een brugklas en een 4 HAVO-klas gevraagd wat wiskunde volgens hen is en wat er leuk en niet leuk aan is. Ook negen leraren in opleiding hebben deze vragen beantwoord.

Wiskunde is een soort rekenen, volgens de brugklassers; een 'volwassenere naam' voor rekenen, zei eentje. Een enkeling heeft over formules gehoord: wiskunde is iets met formules of zo. Het is ook gewoon een schoolvak. Het is alleen leuk als je het begrijpt; gelukkig doet vrijwel iedereen dat nog in dit stadium.

Ook voor 4 HAVO A is wiskunde een soort rekenen, maar dan worden er allerlei activiteiten bij vermeld: gegevens verwerken in grafieken en tabellen, voorspellingen doen op grond van grafieken, enzovoorts. Maar wiskunde is ook 'een moeilijke manier om problemen op te lossen die er niet zijn'. Je leert er wel logisch van denken.

Zeer karakteristiek vond ik het antwoord dat wiskunde alleen leuk is als je het snapt; het geeft verder een kick als je een moeilijke som oplost. Yes! Het zwarte gat lost op. Er is altijd een manier om achter het antwoord te komen en er is maar één antwoord – dit in tegenstelling tot veel andere vakken op school.

Alleen maar sommen doen, is uiterst saai. Hier kan de docent iets aan doen door af en toe een krent in de pap te doen.

Wat is wiskunde volgens leraren in opleiding? Dit varieert van 'een studie', 'een spel', 'een uit de hand gelopen hulpmiddel om problemen op te lossen' tot 'een abstracte wereld van zuivere begrippen in hun onderlinge samenhang'. Helderheid, schoonheid, zekerheid, abstractie, duidelijkheid, eenvoud, universaliteit, zijn zo enkele begrippen die genoemd worden. De één geniet vooral van het abstracte, de ander van de toepasbaarheid, weer een ander van het feit dat het denken in je hoofd blijkt te kloppen met de wereld om je heen.

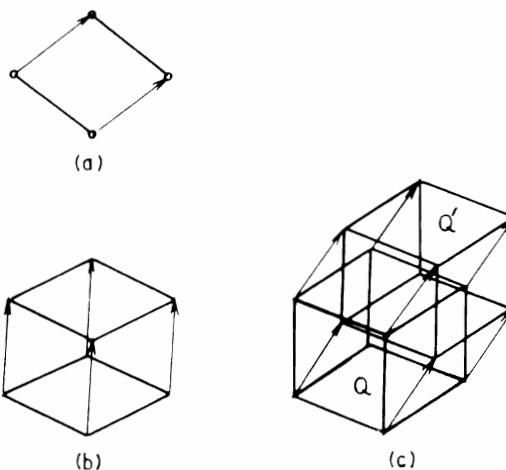
Al dit soort aspecten komen in *The Mathematical Experience* aan bod: abstractie en generalisatie en het verschil daartussen, de rol van symbolen, bewijzen, het nut voor andere wetenschappen, maar ook de relatie met religie en astrologie. Eén hoofdstuk is gewijd aan onderwijs; hierin komt onder andere Pólya's *How to solve it?* – een boek over hoe je een wiskundig probleem aanpakt – aan bod. Dan volgt een hoofdstuk over filosofische vragen. In welke zin bestaan wiskundige objecten? Leven ze in een Pla-

toonse ideeënwereld, bestaan ze alleen in de menselijke geest of is wiskunde een soort schaakspel? Is wiskunde een cumulatieve wetenschap van eeuwig ware stellingen of is ze net zo goed falsificeerbaar en aan correctie onderhevig als de natuurwetenschappen? Na een korte behandeling van het Platonisme, constructivisme en formalisme volgen bespiegelingen over Popper en Lakatos. De schrijvers ontpoppen zich als aanhangers van deze wetenschapsfilosofen, die onder andere vinden dat de wiskunde geen grondslagen nodig heeft.

Hyperkubus

Een mooi voorbeeld van iets wat je in de klas kunt behandelen en een aanknopingspunt vormt voor filosofische discussie, is de constructie van een vierdimensionale kubus (een hyperkubus). Hoe ziet een vierdimensionale kubus eruit? Bestaat die wel? Een fysisch georiënteerde slimmerik zal misschien zeggen dat de tijd de vierde dimensie is. In de relativiteitstheorie is dat gebruikelijk, maar in de wiskunde doen we het anders.

Een punt is nuldimensionaal. Beweeg dit punt in een richting over een bepaalde afstand, zeg 1, en je hebt een (één-dimensionaal) lijnstukje. Beweeg dan dit lijnstukje over een afstand 1 in een nieuwe richting – loodrecht op de vorige – en je krijgt een (tweedimensionaal) vierkant. Dit vierkant verplaatsen we weer over een afstand 1 in een nieuwe richting – loodrecht op de vorige twee – en we krijgen een (driedimensionale) kubus. Hoe ziet een hyperkubus er nu uit? We moeten hetzelfde doen als in ieder van de vorige stappen. Dit vraagt een bepaalde abstractie. We bewegen de kubus in een nieuwe richting (gesteld dat die er is) – loodrecht op de vorige richtingen – over een afstand 1 en we hebben een vierdimensionale kubus geconstrueerd!



Hebben we in onze geest een 'nieuw' object geconstrueerd, of bestond dit al en hebben we het alleen ontdekt? Het is in ieder geval een imaginair object dat niet in de fysieke werkelijkheid te vinden is. Wel kunnen we er een

plaatje of een driedimensionaal draadmodel van maken. We kunnen ook allerlei eigenschappen van de hyperkubus uit de constructie of uit het plaatje afleiden. Zo heeft dit ene vierdimensionale object 16 hoekpunten, 32 ribben, 24 tweedimensionale zijvlakken en 8 driedimensionale zijvlakken.

Dimen- sion	OBJECT	0-Faces (vertices)	1- Faces (Edges)	2- Faces (Faces)	3- Faces	4- Faces
0	Point	1				
1	Interval	2	1			
2	Square	4	4	1		
3	Cube	8	12	6	1	
4	Hyper- cube	16	32	24	8	1

Het zou geen wiskunde zijn als er niet een of ander mooi

verband te vinden was; en jawel, als we de hoekpunten, ribben en zijvlakken optellen, komt er een macht van 3 uit en wel 3^n , waarbij n de dimensie van het object is.

Dit is een mooi voorbeeld waaraan de schoonheid van de wiskunde aan leken duidelijk gemaakt kan worden. Het is tevens nauw verbonden met de vraag wat wiskunde nu eigenlijk is. Ja, zelfs na veel grasduinen in het boek blijft de vraag: 'Wat is wiskunde?' Dit is geen wiskundige, maar een filosofische vraag; en zoals altijd met filosofische vraagstukken wordt na veel studie niet zozeer het antwoord alswel het probleem duidelijker.

P.J. Davis / R. Hersh / A.E. Marchisotto
The Mathematical Experience
 2nd revised edition 1995. 500 pagina's. Hardcover
 ISBN 3-7643-3739-7

Arthur Bakker is in 1995 afgestudeerd in de wiskunde in de verzamelingenleer met als specialisatie logica en als bijvak wijsbegeerte. Thans doet hij de lerarenopleiding aan de UvA in Amsterdam.

Cursus achtergronden van de meetkunde in het nieuwe vwo-programma

Omschrijving

In de Meetkunde die in het profiel Natuur en Techniek van de vwo-top zijn gereserveerd, komen traditionele onderdelen van de vlakke meetkunde en moderne toepassingsgebieden verweven aan bod. Ook verbindingen tussen meetkunde en analyse worden gelegd.

In deze nascholingscursus wordt vooral ingegaan op de wiskunde zelf, maar ook zullen de eerste ervaringen met het programma ter tafel komen. De inhoud van het nieuwe programma worden daarbij geplaatst in het kader van wiskundige ontwikkelingen van de twintigste eeuw.

Cursusvorm

Presentaties, practica, discussies, maken van opgaven tussen de cursusmiddagen.

Cursusleiding

Aad Goddijn, medewerker ontwikkelteam wiskunde in de nieuwe profielen, Freudenthal instituut.

Dirk Siersma, hoogleraar wiskunde Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht.

Duur en data

Vier middagen, van 15.00-18.00 uur op de dinsdagen 21 januari, 4 februari, 18 februari, 11 maart 1997. Dit is een herhaling van de cursus die in het najaar van '96 is gegeven.

Plaats

Wiskundegebouw, Universiteit Utrecht
 Budapestlaan 6, Uithof, Utrecht.

Prijs

f 300,- ; inclusief cursusmateriaal, koffie, thee.

Aanmelding

Vakgroep Wiskunde t.a.v. K. Schoenmaker
 Universiteit Utrecht, Postbus 80.010, 3508 TA Utrecht
 Telefoon: 030 -2531430, fax: 030 -2518394
 email: vakgroep@math.ruu.nl