

Een van de buitenlandse gastsprekers op de Nationale Wiskunde Dagen van februari 1996 was **Claudi Alsina**. Hij hield een gloedvol betoog over hoe leerlingen te verleiden tot wiskunde.

## Hoe verleid ik mijn leerlingen tot wiskunde?

Wiskunde is een mooi, opwindend en vermakelijk vak. Zo komt het tenminste op mij over. Hoe kunnen we het beeld van wiskunde verbeteren en dat op de leerlingen overdragen zodat ze er ook van gaan houden?

In dit artikel geef ik eerst een korte inleiding op het *Anti verleidings Wiskunde Syndroom*. Daarna ligt de nadruk op de middelen die u kunt gebruiken voor de wiskundige verleiding: schoonheid, realiteit, uitdaging, amusement, fictie, geschiedenis, verrassing, poëzie en muziek. Tenslotte laat ik zien wat u nog kunt doen als deze fantasische plannen niet blijken te werken.

### Antiverleidings Wiskunde Syndroom

Het Antiverleidings Wiskunde Syndroom (AWS) is een serieus syndroom dat nog steeds in omvang toeneemt en dat in alle sociale lagen en in alle landen voorkomt. Het AWS heeft het karakter van een epidemie. Het wordt van de ene op de andere generatie doorgegeven. Veel leerlingen in uw klas zullen er last van hebben. De oorsprong van het AWS is onbekend. Zeker is dat er gevallen van AWS ten tijde van Euclides zijn geconstateerd. De echte explosie van AWS vond plaats toen de Wiskundige Instituten werden opgericht. Op dit ogenblik grijpt het AWS steeds dieper in in de eerste jaren van de school. Zelfs kleuters hebben er al last van.

De eerste symptomen van AWS doen zich bij normale personen voor op 10 à 11-jarige leeftijd. Het aanleren van afreksommen schijnt de eerste duidelijke verschijnselen op te wekken. Leerlingen beginnen te huilen of te slapen als ze de uitwerkingen op het schoolbord voor zich zien. In een latere fase hebben ze hun linker arm nodig om hun hoofd in een geschikte positie te houden, totdat de hoofden steeds verder naar de tafel neigen en ze tenslotte hun arm als hoofdkussens gebruiken.

Het is heel opvallend dat de infectie met het AWS toeneemt naarmate de proefwerken dichterbij komen, maar dat geïnfecteerde personen zich in de vakantie veel beter voelen.

Het AWS is sociaal aanvaard. Ouders herkennen het AWS bij zichzelf en in sommige gevallen aarzelen ze niet om in het openbaar te beweren 'dat het een normaal pro-

bleem is', 'dat ik er zelf ook last van heb', 'dat je moeder en ik verliefd werden omdat we beide het AWS hadden'. Het Internationaal Comité voor het Plezier in het Leren heeft speciale programma's ontwikkeld om het AWS te bestrijden. Maar ingrijpendere maatregelen, die voorbereid zijn door wiskundedocenten, zijn noodzakelijk voor een succesvolle bestrijding.

### Testen voor het AWS

Heeft u het AWS?

Kunt u het AWS overdragen op andere mensen?

Om de antwoorden op deze kernvragen te vinden, zijn twee testen beschikbaar. De eerste test bevat vragen over hoe u zich voelt tijdens het lesgeven:

- Zou u een ander beroep willen hebben?
- Denkt u aan het geld dat u verdient met het lesgeven?
- Als alle leerlingen slapen, reageert u dan negatief?
- Als geen enkele leerling slaagt voor het examen, vindt u dan dat dat hun probleem is?

Als u maar één vraag met JA hebt beantwoord, dan heeft u het AWS. Alleen als u alle vragen met NEE beantwoordde, heeft u waarschijnlijk geen AWS. In dat geval dient u de tweede test te ondergaan die gaat over de leerstof:

- Kunt u statistiek vóór de kansrekening behandelen?
- Kunt u wiskunde behandelen zonder verzamelingenleer?
- Kunt u verzamelingenleer behandelen zonder logica?
- Heeft u rekenmachines nodig?
- Heeft u realistische data nodig?

Beantwoordde u al deze vragen met NEE, dan heeft u het AWS. Zei u JA op al deze vragen, dan bent u vrij van het syndroom. Waren uw antwoorden een mengeling van JA en NEE, dan is het niet duidelijk wat er in de toekomst met u zal gebeuren.

In elk geval is een 'plan voor wiskundige verleiding' hard nodig in onze samenleving.

In het volgende geef ik negen overwegingen, toegelicht met concrete voorbeelden; bronnen welke u kunt gebruiken om onze leerlingen de mogelijkheid te geven de wiskundige verleiding te ontdekken.

## Verleiding en schoonheid in wiskunde

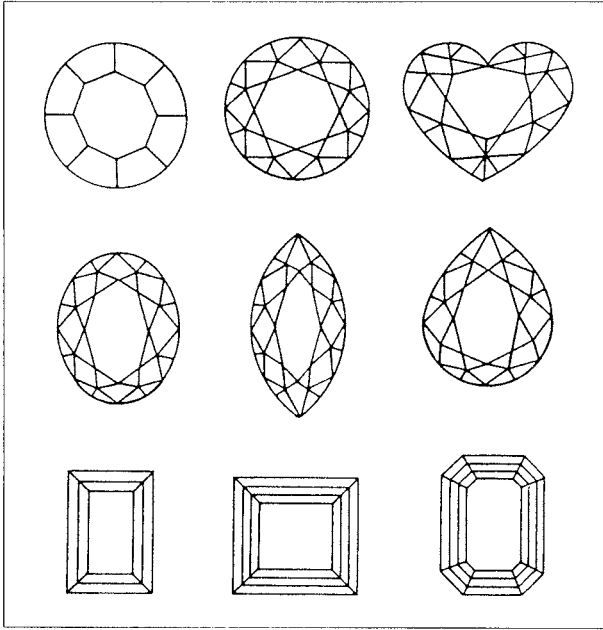


fig. 1

Alles wat we binnen en buiten het klaslokaal doen, hoort een mooie presentatie te hebben. We kunnen niet alleen maar acteurs zijn voor het schoolbord. We willen geen wiskunde in 'zwart en wit'. Onze presentaties kunnen spannend zijn. Daarbij kunt u gebruik maken van de mogelijkheden van multimedia. Ze geven een sterke uitstraling aan ons 'wiskundige laboratorium'. Enkele voorbeelden:

*Welke veelhoeken en hoeken ontdek je in een paraplu?*  
(P. Puig Adam).

*Twee mensen A en B staan drie meter van elkaar af. Een derde persoon C wil zo gaan staan dat de afstand AC twee keer zo groot is als BC. Waar kan C dan gaan staan?*

*Welke veelhoeken kun je krijgen als doorsnede van twee rechthoeken?*

*Hoe kun je een elliptische boog maken in een gebouw?*

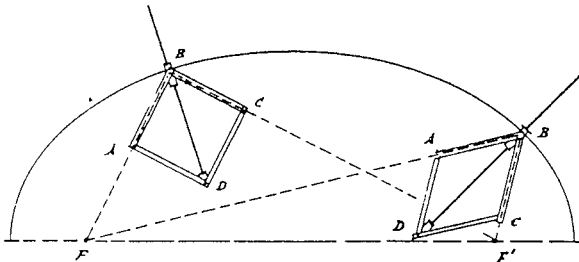


fig. 2

In bovenstaande voorbeelden kunt u kiezen voor een saaie ouderwetse presentatie. U kunt ook kiezen voor een mooie presentatie met een overhead projector, kleuren dia's, computerbeelden en concrete modellen. De manier waarop u dit alles presenteert, is belangrijk om de aandacht van leerlingen vast te houden en ze te motiveren tot leeractiviteiten.

## Verleiding en realiteit

We kunnen voorbeelden en problemen uit de dagelijkse werkelijkheid toelichten en oplossen. Zowel binnen als buiten het klaslokaal. Daarbij kunnen we experimenten uitvoeren. Natuurlijk houden we rekening met het niveau en de interesse van onze leerlingen.

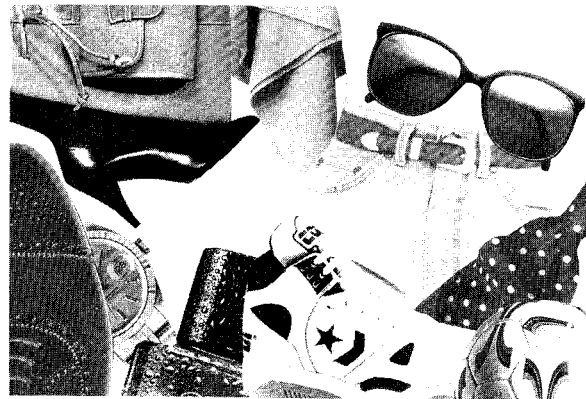


fig. 3

*Allerlei dagelijkse gebruiks zaken bevatten prachtige wiskundige problemen die verband houden met interessante situaties uit het dagelijks leven:*

- hoeveel kost een telefoongesprek?
- hoeveel kilo afval produceren we thuis ieder jaar?
- hoe plannen we een uitstapje?
- wat is de meetkunde achter verpakkingen?

## Verleiding en uitdaging

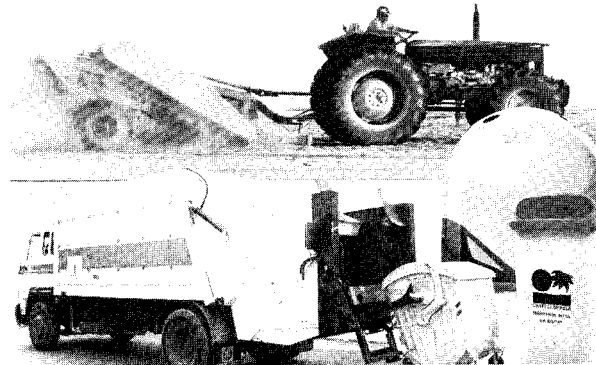


fig. 4

Hier kunnen we discussie en kritische opmerkingen uitlokken. Wiskunde kan helpen om democratische ideeën te ontwikkelen en voor te bereiden op tegenstellingen in het leven. Niet alles in het leven is waar of onwaar, we kunnen dus niet meer vasthouden aan de Boolese logica.

- *Bekijk de volgende zin: 'Deze zin heeft vijf woorden'. Wat is de ontkenning van deze zin?*
- *Is de oorspronkelijke zin waar?*
- *Is de ontkenning waar? Hoe kan dat?*
  
- *Is ons volwassen lichaam 'gelijkvormig' met dat van onszelf als kind?*
- *Hoe verandert het menselijk lichaam?*
- *In welk opzicht zijn kinderen 'gelijkvormig' met hun ouders?*
  
- *Hoe is 'werkeloosheid' gedefinieerd?*
- *Horen militairen bij de werkende klasse?*
- *Hebben nonnen in een klooster een baan?*

## Verleiding en amusement

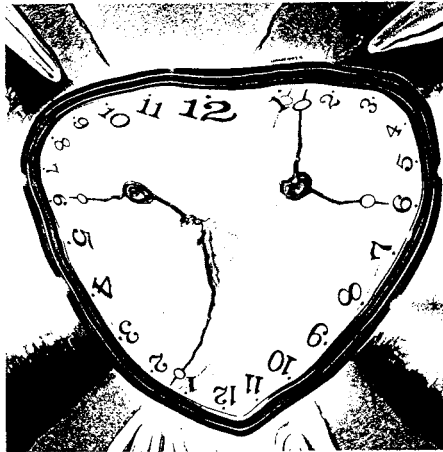


fig. 5

We kunnen laten zien dat wiskunde pret is. Mensen moeten zich prettig voelen bij ons onderwijs. Dat verdienen ze. Heeft u wel eens het genoeg gesmaakt om te zien hoe uw leerlingen u imiteren? Vertel moppen en anekdotes in de klas. Leerlingen zullen zich altijd de details blijven herinneren!

*Het volgende fragment komt uit de Bijbel (Genesis, 5). Toen Methusalem 187 jaar oud was, werd hij vader van Lamech. En nadat hij vader was geworden van Lamech, leefde Methusalem 782 jaar en kreeg hij nog andere zonen en dochters. In totaal leefde Methusalem 969 jaar en toen stierf hij. Toen Lamech 182 jaar oud was, kreeg hij een zoon. Hij noemde hem Noach.... Na de geboorte van Noach leefde Lamech 595 jaar.... In totaal leefde Lamech 777 jaar en toen stierf hij.*

*Noach was 600 jaar oud toen de wateren van de vloed over de aarde kwamen. En Noach en zijn zonen en zijn vrouw en de vrouwen van zijn zonen gingen in de ark om te ontsnappen aan de wateren van de vloed.*

Op een gegeven ogenblik bestudeerde de Canadese meetkundige H.S.M.Coxeter de gegevens van bovenstaande geschiedenis en deed een prachtige ontdekking. Er wordt beweerd dat Methusalem 969 jaar leefde. Terwijl men het volgende kan uitrekenen:

187 jaren + 182 jaren + 600 jaren = 969 jaren, dat wil zeggen: Methusalem stierf toen de wateren van de vloed over de aarde kwamen. Het is duidelijk dat Methusalem niet meeding in de ark. Stierf hij een natuurlijke dood of vergat Noach zijn grootvader?

## Verleiding en geschiedenis

We kunnen historische aspecten bestuderen door naar het verleden te kijken met de ogen van vandaag. Op een dag kunt in het lokaal een middeleeuws plein maken, of een Arabische markt. U kunt proberen de leerlingen ervan te overtuigen dat achter iedere wiskundige droom een wiskundige ervaring staat. En waarom zou u niet een gesprekje aanknopen met de 'oude jongens' zoals Thales of Boole of Cauchy of zelfs Pythagoras?

*Een telefoongesprek met Pythagoras.*

*'Spreek ik met professor Pythagoras?'*

.....

*Hallo Pythagoras, ik bel hier vanuit de Nationale Wiskunde Dagen in Nederland.*

.....

*Alles goed met u?*

.....

*Ik bel u om u te vertellen dat we nog steeds uw stelling onderwijzen.*

.....

*Welke stelling? Uw stelling natuurlijk: het kwadraat van de hypotenusa is gelijk aan de som van de kwadraten van de beide andere zijden in elke rechthoekige driehoek.*

.....

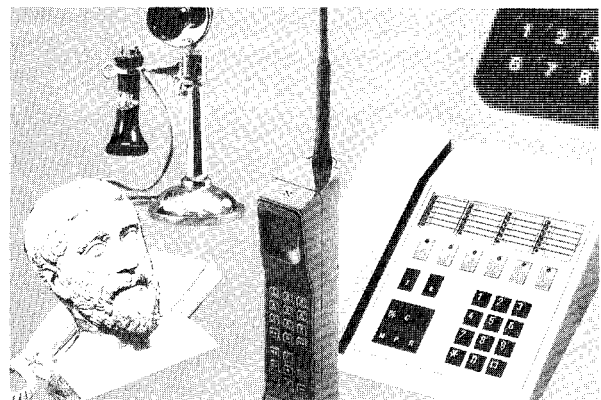


fig. 6

Pardon? Hoe kan ik nu weten dat u de resultaten nog niet heeft gepubliceerd?

.....

Oh. Dat hebben anderen na u gedaan.

.....

Nee, ik vertel u geen namen, ik wil de geschiedenis niet veranderen.

.....

Goedendag!'

## Verleiding vandaag de dag

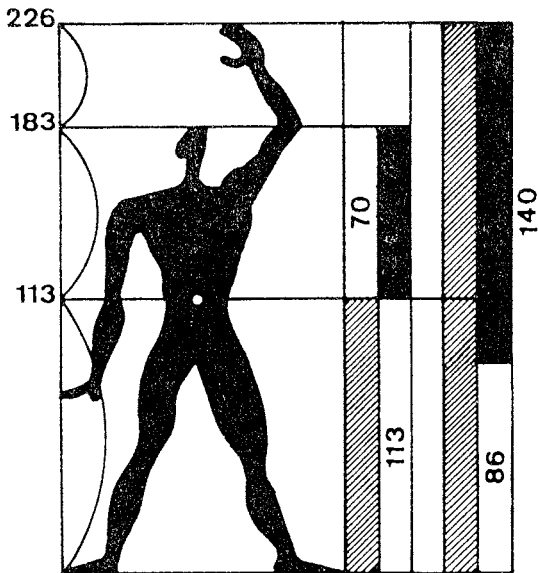


fig. 7

We moeten er rekening mee houden dat de tijden veranderen. De huidige generatie leerlingen is een andere dan onze eigen generatie. Ze herinneren zich niets van zaken die wij ons herinneren. En de hedendaagse problemen verdienen speciale aandacht.

Laten we aansluiten bij de actualiteit en minder vanuit boeken werken.

Tegenwoordig lees je dat de ideale lichaamsindex, berekend met  $G/h^2$  ( $G$  is het gewicht in kilogrammen,  $h$  de hoogte in meters), moet liggen tussen 20 en 25. Een vroegere maat voor het ideale gewicht was  $G = 100h - 100$ . Als we de oude maat hanteren, weten we dan zeker of het met de nieuwe index ook in orde is? Neem aan dat  $G = 110h - 100$ . We willen nagaan of:

$$20 \leq \frac{100h - 100}{h^2} \leq 25$$

of, gelijkwaardig daarmee:

$$25h^2 - 100h + 100 \geq 0 \geq 20h^2 - 100h + 100$$

De eerste ongelijkheid aan de linkerkant is te vereenvoudigen tot  $(h - 2)^2 \geq 0$ , hetgeen voor iedere  $h$  waar is. We

hoeven dus alleen maar de ongelijkheid  $h^2 - 5h + 5 \leq 0$  te bekijken. Door de kwadratische vergelijking  $h^2 - 5h + 5 = 0$  op te lossen, vinden we de oplossingen  $2 + \phi = 3.618...$  en  $2 + \phi' = 1.381...$ , waarbij  $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$  het beroemde getal van de gulden snede is en  $\phi' = 1 - \phi$ . Omdat alle volwassenen lengtes hebben binnen het interval  $(1.381, 3.681)$  klopt de oude maat voor het ideale gewicht voor altijd (in alle omstandigheden!).

## Verleiding en verrassing

We kunnen de suggestie wekken dat we deelnemer zijn aan de verrassing en ontdekking van nieuwe wiskundige feiten.

Op een tafel staat een gesloten doos en een liniaal. Wat is de handigste manier om de lengte van de lichaamsdiagonaal van de doos te meten?

Veel leerlingen (en bijna al hun wiskundedocenten!) geloven dat dit een probleem is dat je met Pythagoras moet aanpakken. Bijvoorbeeld door tenminste twee zijden van de doos te meten en de corresponderende berekeningen uit te voeren. Het is heel verrassend om die 2D aanpak te vergeten en onze 3D intuïtie te gebruiken. We kunnen de doos op tafel verschuiven zodat die precies aansluit naast de vroegere positie en dan kunnen we gewoon direct de diagonaal meten in de ontstane lege ruimte van de oude plaats van de doos.

## Verleiding en poezie

We zouden de wiskunde ook emotioneel kunnen benaderen. We kunnen zingen, muziek maken en gedichten maken om leerlingen de kans te geven plezier aan wiskunde te beleven.

Brad Candle en Richard Candle (1992) maakten een muzikale 'rap' versie van het optellen van getallen. Laat dit horen in de klas.

In hun publicatie 'Giants' laten P. Martin en Marjorie Carss zien hoe de voetafdruk van een reus in de klas, vergezeld van briefjes aan de leerlingen, weet aan te zetten tot prachtig werk over getallen, meetkunde, verhoudingen en maten.

Een oud suggestief gedicht van Dr. W. Whewell (1794-1866):

Geen kracht op aard, zo sterk  
Kan spannen een snaar zo fijn  
In een horizontale lijn  
Die absoluut recht zal zijn.

Een ander interessant gedicht van V. Lindsay:

Oude Euclides tekende een cirkel  
Op het strand lang geleden

Van binnen en buiten tekende hij bogen  
Ook van boven en beneden  
.....  
Van 's ochtends tot 's middags  
Een stil kind keek het aan  
Want hij tekende van die mooie  
Plaatjes van de maan.

## Verleiding en toetsing

We kunnen onze vaste toetsprocedures openbreken en afstappen van het idee dat de 'klassieke wiskunde-examens' de enige manier zijn om een succesvol einde van een cursus vast te stellen. Observaties in de klas, open opdrachten, projecten, mondelinge vragen zijn middelen die ook gebruikt kunnen worden. Voorbeelden:

*Twee personen A en B moeten een auto 'verdelen'. A kent de waarde a toe aan de auto en B de waarde b ( $b > a$ ). B krijgt de auto en betaalt het bedrag  $\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}(b - a)$  aan A. Is dit een eerlijke verdeling? (S. Garfunkel).*

*Maak een radioverslag van de informatie die staat in een cartesische grafiek (bijvoorbeeld krommen die het verband aangeven tussen tijd en afstand voor verschillende atleten). (Shelle Centre).*

In het prachtige werk van het Freudenthal instituut vindt u de beste toetsvoorbeelden die in de laatste tien jaar zijn gemaakt.

## Wat u kunt doen als het plan niet werkt

Stel, u bent de meest opwindende wiskundedocent van de wereld. U bereidt uw lessen tot in de kleinste details voor. U probeert uw leerlingen te verleiden met indrukwekkende voorstellingen, door te zingen, door uitdagend gedrag, door geschiedenis en realistische problemen in de klas te halen, door muziek te maken. Maar dit alles slaat niet aan! U kunt niet meer terug. Nooit meer. U kunt iets anders proberen. Bijvoorbeeld door uw kleding aan te passen en met uw leerlingen op 'vriendschappelijke basis' verder te gaan. U kunt ze vertellen dat u niet meer kunt slapen als ze zakken voor het examen, dat u het gebeuren in de klas meeneemt naar huis en wat dat allemaal niet voor gevolgen heeft voor uw vrouw en kinderen, dat u uw eigen succes verwacht te vinden in hun succes en

dat het ontvangen van een Ansichtkaart van een leerling voor u het mooiste ogenblik van het jaar is.

## Een stelling die niet verloren gaat

Ik heb geprobeerd u wat ideeën te geven en wat positieve voorstellen te doen voor een wiskundeonderwijs dat zowel voor u als voor de leerlingen opwindend kan zijn. Samengevat vindt u dit terug in de volgende stelling:

### STELLING

Als wiskundedocent bent u dan en slechts dan een verleider als u tegelijkertijd van uw leerlingen en van de wiskunde kunt houden.

Dat is de kern van alles. Ons wiskundige werk kan niet worden losgemaakt van emoties en gevoelens. Ik gebruikte het woord 'stelling' voor mijn laatste bewering. Als u er een volledig bewijs van heeft, proficiat! Bent u nog niet overtuigd, dan hebt u nog een heel leven voor u om het te bewijzen.

## Literatuur

- Alsina, C. (1995). *Una matemática feliz y otras conferencias*. OMA, Buenos Aires.
- Bolt, B. and D. Hobs (1989). *101 mathematical projects: a resource book*. Cambridge UP, Cambridge.
- COMAP (1988). *For all Practical Purposes* (book and videos). Freeman/COMAP.
- Freudenthal instituut, diverse projecten en publicaties, Utrecht.
- Krantz, S.G. (1993). *How to teach mathematics: a personal perspective*. AMS, Providence.
- Martin, P. and Marjorie Carss (1994). *Giants*. COMAP, Lexington.
- Steen, L. et al. (1988). 'Everybody Counts NRC', *The Elementary Mathematician*. COMAP, Lexington.

*Prof. C. Alsina is hoogleraar aan de Universiteit Politécnica de Catalunya, Barcelona.*

## Wiskundeposters

Door het APS wordt een Werkmiddag wiskundeposters voor wiskundedocenten in VBO, MAVO, HAVO en VWO gehouden. (W1). Er wordt gewerkt aan het maken van opdrachten voor leerlingen bij de posters en aan het organiseren van lessen waarin de posters centraal staan. De cursus omvat één werkmiddag van 14.00 tot 17.00 uur

en wordt op drie lokaties gegeven, te weten:  
Zwolle: dinsdag 18 maart 1997  
Rotterdam: woensdag 19 maart 1997  
Utrecht: donderdag 20 maart 1997  
Kosten f 175, inclusief de drie posters  
Inlichtingen bij het APS, tel. 030-2856722