In het vorige nummer van de Nieuwe Wiskrant schreef Jan van de Craats over een mogelijk wiskundeproject rond de vergelijking $x^y = y^x$. **Wolfgang Reuter** werkte dit idee uit voor de profielen Natuur & Gezondheid en Natuur & Techniek voor de toekomstige Tweede Fase van het VWO.

$x^y = y^x$

Inleiding

In het eerste deel van zijn artikel 'Intrigerende Machten' in de *Nieuwe Wiskrant* van juni 1996[1] presenteert Jan van de Craats ideeën voor een project voor de VWO-profielen Natuur & Gezondheid en Natuur & Techniek.
In zijn opzet speelt de functie van twee variabelen $f(x,y) = y^x - x^y$ een centrale rol. De vergelijking $x^y = y^x$ behoort immers bij de niveaulijn $f(x,y) = 0$ van deze functie. Deze en nog enkele andere niveaulijnen zijn in de volgende figuur te herkennen (ontleend aan het artikel van Van de Craats).

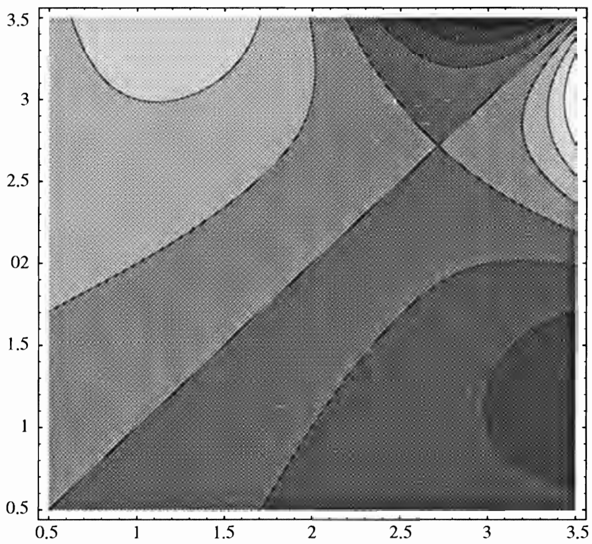

fig. 1 Enige niveaulijnen van de functie $f(x, y) = y^x - x^y$

De opzet van Van de Craats met geavanceerd gebruik van zware computerprogramma's lijkt mij (voorlopig) te ambitieus. Als hij schrijft

> Computerprogramma's blijken een machtig hulpmiddel, maar soms vertonen ze kuren; ze kunnen zelfs op tilt slaan. Dat is allemaal heel leerzaam en ook heel goed te begrijpen als je je er voldoende in verdiept.

dan praat hij volgens mij niet over 6 VWO-leerlingen van het jaar 2001 maar misschien van het jaar 2010.
Verder is de geschetste opzet voorbehouden aan leerlingen uit het profiel Natuur & Techniek, om de doodeenvoudige reden dat het onderwerp *hoogtekaarten en doorsneden* door de vakontwikkelgroep alleen voor dat profiel (bij het domein *Meetkunde en Analyse*) genoemd wordt.
De machten hebben mij echter zo geïntrigeerd dat ik naar een opzet gezocht heb die voor een grotere groep leerlingen geschikt is.

De doelgroep

De doelgroep die ik voor ogen heb, zijn leerlingen uit de profielen N&G en N&T, halverwege klas 6.
De volgende onderwerpen zijn al behandeld:
- machtsfuncties, exponentiële en logaritmische functies
- differentiëren, maxima en minima
- asymptotisch gedrag, limieten.

Ik ga ervan uit dat de leerlingen alle relevante vaardigheden op een grafische rekenmachine beheersen en kunnen werken met een programma zoals VU-GRAFIEK onderbouw. Ze hebben al enige ervaring opgedaan met kleinere onderzoeksopdrachten waar een beroep gedaan wordt op zelfstandig leren. Ook zijn ze in staat om een verslag te maken van hun onderzoeksopzet en hun resultaten.

De opzet

Zo'n onderzoeksopdracht zal straks een cijfer op moeten leveren dat meetelt voor het schoolexamen (examendossier). Leerlingen zullen bij de keuze van een opdracht dan ook moeten kunnen (en willen) inschatten welke inspanning van hen verwacht wordt en welk resultaat haalbaar is. Een opzet vergelijkbaar met die van een opgave voor de wiskunde-A-lympiade is dan zo gek nog niet:
1. Enkele startvragen, die eigenlijk elke leerling moet kunnen beantwoorden, leveren enkele concrete resultaten (en de eerste punten).
2. Bij de generalisatie van de gevonden oplossingen moet de gevolgde aanpak kritisch beoordeeld, aange-

past en misschien wel helemaal verlaten worden. Hier zullen verschillen optreden tussen de uitwerkingen van leerlingen.

3. Wie door de probleemstelling geïntrigeerd is (of wie een heel hoog cijfer wil behalen) gaat op zoek naar een alternatieve, misschien betere aanpak of naar een verbreding of verdieping van het probleem.

Wat nu volgt, is geen uitgewerkte leerlingenopdracht maar slechts een schets voor een mogelijke opzet.
Om in voetbaltermen te spreken:
Jan van de Craats heeft mij met zijn pass de diepte in gestuurd en mijn voorzet bereikt misschien het hoofd van een spits, die de aanval kan afronden.

Oriëntatie op het probleem

Het getal e is iets kleiner dan 3, π is iets groter dan 3. De vraag welk getal groter is, e^{π} of π^{e} (het getal met het grotere grondtal of het getal met de grotere exponent) is met een zakrekenmachine snel beantwoord: $e^{\pi} > \pi^{e}$.
We vervangen e door een onbekend getal x en proberen alle waarden van x te vinden die oplossingen zijn van de vergelijking $x^{\pi} = \pi^{x}$. Behalve de triviale oplossing $x = \pi$ vinden we met de GR of een grafiekenprogramma een tweede oplossing: $x \approx 2{,}38$.
Ook de vergelijkingen $x^3 = 3^x$ en $x^2 = 2^x$ hebben behalve de triviale oplossing nog een tweede oplossing, maar beide oplossingen liggen steeds zo dicht bij elkaar dat flink ingezoomd moet worden op de grafieken of – nog beter – bij de tabellen van functiewaarden.
Een conclusie op dit moment zou kunnen zijn:
Versie 1. De vergelijking $x^{a} = a^{x}$ heeft naast de triviale oplossing nog een tweede oplossing.

Een eerste controle

Voor $a = \pi$ en $a = 3$ is de 'tweede' oplossing kleiner dan de triviale oplossing, voor $a = 2$ juist groter. Dan zou er toch een waarde van a moeten of kunnen zijn waarvoor de twee oplossingen even groot zijn!?
Voor $a = e$ laat de grafisch-numerieke aanpak het afweten. De TI-82 geeft voor $x < e$ èn voor $x > e$ voor $Y_1 = x^e$ grotere waarden dan voor $Y_2 = e^x$, al is dat soms pas te zien als op meer dan drie decimalen gelet wordt.

X	Y1	Y2
2.7	14.879	14.88
2.71	15.029	15.029
2.72	15.18	15.18
2.73	15.333	15.333
2.74	15.486	15.487
2.75	15.64	15.643
2.76	15.795	15.8

Y1=15.3325008594

fig. 2

Een andere aanpak

De vraag of de vergelijking $x^e = e^x$ één of twee oplossingen heeft, kan grafisch-numeriek niet beantwoord worden. Deze vergelijking kunnen we echter ook niet exact oplossen. Leerlingen zullen nu een hint nodig hebben:
Laat zien dat je – nadat je links en rechts de logaritme genomen hebt – de vergelijking $x^e = e^x$ kunt schrijven als

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{e}.$$

Bij deze vergelijking behoren twee nieuwe grafieken: die van de functie

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \text{ en de horizontale lijn } y = \frac{1}{e}.$$

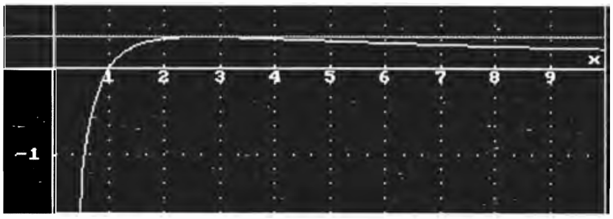

fig. 3

Als je beide grafieken plot, zie je meteen hoe de vraagstelling aangepast moet worden:
Is het maximum van de functie

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \text{ exact gelijk aan } \frac{1}{e} \text{ of groter?}$$

Elke leerling moet kunnen bedenken dat hij het antwoord op deze vraag met behulp van differentiaalrekening kan vinden. Na dit onderzoek kan de conclusie enigszins aangepast worden:
Versie 2. De vergelijking $x^{a} = a^{x}$ heeft
- voor $a = e$ precies één oplossing,
- voor alle andere a twee oplossingen.

Deze tussenstand vormt in mijn ogen de afsluiting van het eerste deel van de driedelige opzet. Het is voor leerlingen nu zaak de aangeboden methoden goed te gebruiken.

Een tweede controle

Figuur 2 is het vertrekpunt voor verder onderzoek.
Elke lijn $y = c$ met $0 < c < \frac{1}{e}$ snijdt de grafiek van f twee keer, voor $c \leq 0$ is er slechts één snijpunt. Wat betekent dat voor het aantal oplossingen van $x^a = a^x$?
Welk verband bestaat er tussen c en a?
In de oriëntatie heb je gezien dat voor $a = 2$ en $a = 3$ de twee oplossingen heel dicht bij elkaar liggen. Hoe vind je dat in figuur 2 terug?
Dit zijn voorbeelden van vragen die bij het tweede deel van de driedelige opzet behoren. Bij hun onderzoek zul-

len leerlingen algebraïsche methoden moeten kunnen combineren met grafisch-numerieke. Dat zal kunnen leiden tot de volgende conclusie:

Versie 3. De vergelijking $x^a = a^x$ heeft

- voor $a = e$ en voor $0 < a \leq 1$ precies één oplossing
- voor alle andere $a > 1$ precies twee oplossingen.

Een andere kijk op de oplossing

Tot nu toe was er eigenlijk steeds sprake van een vergelijking met één variabele (x). Als we de parameter a als een tweede variabele (y) beschouwen, kunnen we het probleem opnieuw formuleren:

> Gezocht zijn alle oplossingen (x,y) van de vergelijking $x^y = y^x$ in het eerste kwadrant.

Om aan de nieuwe invalshoek te wennen, kunnen we het beste eerst alle tot nu toe gevonden resultaten op een rij zetten en herinterpreteren. Dat geeft een aantal punten:

voor a (nu y)	zijn gevonden de oplossingen
π	(π, π) en $(\pi; 2{,}38)$
3	(3, 3) en (3; 2,48)
e	alleen (e, e)
2	(2, 2) en (2, 4)
1	alleen (1, 1)
0,1	alleen (0,1 ; 0,1)

Als we ook nog versie 3 van de conclusie herinterpreteren, krijgen we het volgende plaatje.

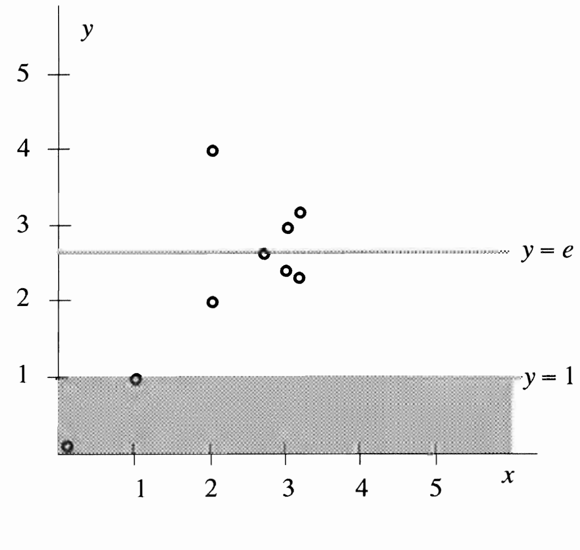

fig. 4

Hiermee zijn de leerlingen dicht bij het einde van het tweede deel in de geschetste driedelige opzet van het project gekomen. De afrondende opdracht kan nu vrij open geformuleerd worden. Eventueel kunnen nog suggesties gedaan worden (denk aan limieten, symmetrie).

Als de leerlingen goed beseffen en uitbuiten dat het probleem (en de oplossing) symmetrisch is in de variabelen x en y, moeten ze een heel eind kunnen komen. Door de juiste verbanden te leggen tussen de figuren 2 en 3 kunnen ze het niet-triviale deel van de gezochte kromme puntsgewijs construeren. De nadruk ligt dan sterk op combineren en redeneren en veel minder op (algebraïsch of numeriek) rekenen.

Uiteindelijk zullen zij dan twee lijnen getekend moeten hebben die samen de niveaulijn $f(x,y) = 0$ van figuur 1 voorstellen.

Ten slotte

Wat is haalbaar? De wiskundige kennis voor dit project hebben de huidige wiskunde B-leerlingen ook al. En veel docenten hebben hun leerlingen al vertrouwd gemaakt met VU-GRAFIEK of andere grafiekenprogramma's. Het probleem zal zijn het juiste niveau voor de vragen te vinden. Die moeten niet te gedetailleerd zijn, want dan is er geen sprake van een uitdaging. De intellectuele nieuwsgierigheid moet geprikkeld worden, zoals Van de Craats zegt. Maar de probleemstelling mag ook weer niet te open zijn, want dan is het risico te groot dat leerlingen helemaal geen ingang tot het probleem vinden.

In de experimentele pakketten van het Profi-team[2] zijn regelmatig kleine onderzoeksopdrachten opgenomen. Ook daar is het zoeken naar de juiste vorm en het juiste niveau. Door tijdgebrek zijn in het afgelopen jaar niet alle 5 VWO-klassen aan al deze opdrachten toegekomen. De ervaringen zijn echter zo bemoedigend dat ook in de herziene versies en in de pakketten voor klas 6 weer onderzoeksopdrachten opgenomen worden. Van de ervaringen zal te zijner tijd op deze plaats verslag gedaan worden.

Wolfgang Reuter is als docent verbonden aan de Schoter Scholengemeenschap te Haarlem. Tevens is hij medewerker van het Profi-project dat aan het Freudenthal instituut wordt uitgevoerd.

Noten

[1] Craats, J. van de (1996). Intrigerende machten. *Nieuwe Wiskrant, 15*(4), pp. 7-11.

[2] Het Profi-project heeft als opdracht een nadere invulling te geven en de haalbaarheid te toetsen van het wiskundeprogramma in de profielen N&T en N&G voor de vernieuwde Tweede Fase.