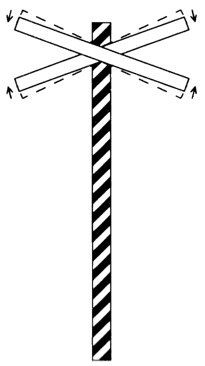
Inspiratie voor de recreatierubriek doet **Aad Goddijn** overal en op elk moment op. De bronnen van deze aflevering zijn een treinreis, enkele werkgroepen op ICME 8 in Sevilla en het Profi-pakket 'Machtige Functies'.

Wuivend kruis, formules met een prijskaartje

Recreatierubriek

Gezien vanuit de trein

Mijn trein reed achteruit. Of: ik reed achteruit in de vooruit rijdende trein. Omdat ik de bel van een overweg hoorde rinkelen, keek ik even op uit mijn boek. Nog net ving ik een flits op van het waarschuwingsbord met het schuine kruis. In die flits zag ik: *het bord wuifde naar mij!* Verder leek niemand in de coupé iets gemerkt te hebben, maar dat zegt natuurlijk weinig. En zo opvallend was het wuiven nu ook weer niet, eigenlijk niet veel meer dan dit:



Maar ik was er absoluut zeker van het gezien te hebben. Achteraf ging ik natuurlijk aan mijzelf twijfelen. Teveel gedaan vlak voor de vakantie, begonnen de ogen het te begeven? Deze onzekerheid heeft me lang dwarsgezeten. Traditionele therapieën werkten niet, het wuivend kruis bleef mij achtervolgen. Uiteindelijk heb ik het verschijnsel kunnen verklaren, gewoon meetkundig. Deze treinreis vond vorig jaar plaats, het was in Noorwegen. Ik had u dit natuurlijk al veel eerder moeten voorleggen.

Opgave 143

Probeer een meetkundige verklaring voor dit merkwaardige gezichtsbedrog te vinden.

Ontsnapt aan de chaos

Mijn trein van dit jaar ging naar Sevilla, naar de ICME 8 conferentie. Thalys, TGV, AVE, ik heb nu alle hoge snelheidstreinen wel gehad. Bij elkaar toch nog twee keer vierentwintig uur om op de heenweg het conferentieprogramma in te zien en op de terugweg de wiskundige problemen te bestuderen die nog zijn blijven knagen. Buiten de door de organisatoren geleverde chaos was er een werkgroep 'Mathematics of Chaos', van Daphne Kerslake uit Engeland. In echt Britse stijl moesten we vooral veel zelf proberen. Onder andere konden met de grafische rekenmachines in de aanslag vergelijkingen door iteratie opgelost worden. U kent dat wel, beginnen met een getal en dan steeds dezelfde functie erop loslaten; op het laatste resultaat, wel te verstaan. Neem bijvoorbeeld als startgetal $x = 1$ en pas steeds de functie

$$x \to \frac{7}{x+1}$$

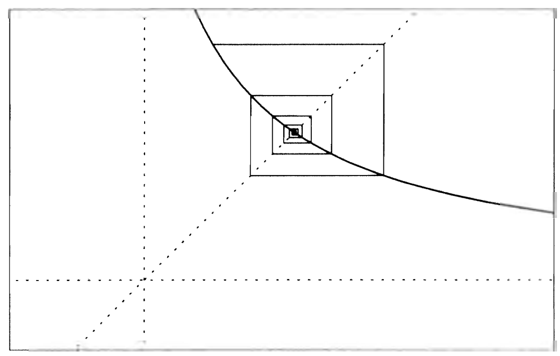
toe. De eerste tien opeenvolgende uitkomsten zijn: 3.5, 1.5555556, 2.7391304, 1.872093, 2.437247, 2.0365135, 2.3052754, 2.1178265, 2.2451538, 2.15706. Uiteindelijk lijkt er een limiet bereikt te worden: 2.1925824; die is een oplossing van de vergelijking

$$x = \frac{7}{x+1}$$

Ofwel van $x^2 + x - 7 = 0$; dat klopt, want:

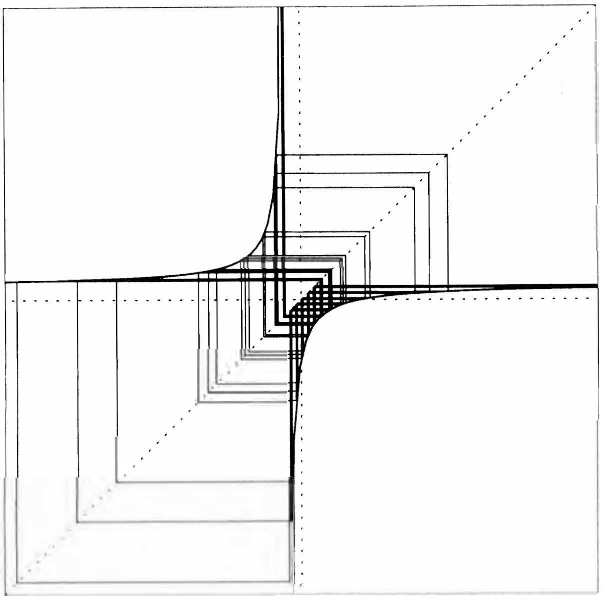
$$\frac{-1+\sqrt{1+4\cdot 7}}{2} \approx 2.1925824$$

Erbij hoort het bekende plaatje dat bestaat uit de grafiek van $\frac{7}{x+1}$, de lijn $y = x$ en een spinneweb dat aangeeft hoe de opeenvolgende waarden ontstaan:



Chaotische taferelen kunnen ontstaan als we zorgen dat de grafiek van de iteratiefunctie de lijn $y = x$ niet snijdt. Hier is het plaatje waarin

$$\frac{7}{x+1} \quad \text{door} \quad \frac{x-2}{2x+1} \quad \text{is vervangen.}$$



Begonnen is met startwaarde $x = 2$. Het itereren is na zo'n 50 stappen afgebroken; een ordentelijk convergerend web is nog niet in zicht en was er lang doorgerekend, dan zou het gebied tussen de twee hyperbooltakken volledig zwart zijn geworden.
De nu volgende opgave lijkt me op dit moment behoorlijk lastig, maar omdat hij zo voor de hand ligt en de daarna volgende opgave 145 in een mooi daglicht stelt, noem ik hem toch eerst; later kom ik er nog even op terug.

Opgave 144
Toon aan dat voor geen enkele startwaarde van x periodiciteit optreedt als we de bewerking

$$x \to \frac{x-2}{2x+1}$$

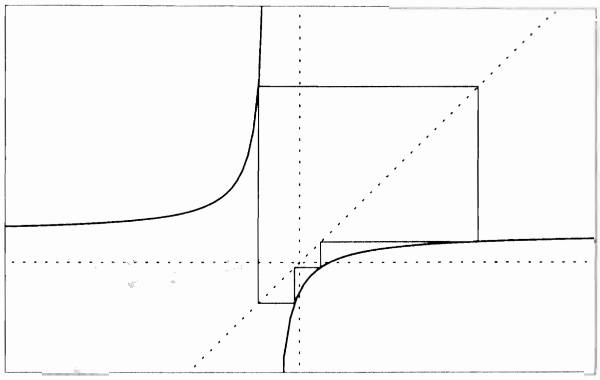
voortdurend herhalen.

In het derde voorbeeld itereren we

$$x \to \frac{x-1}{x+1}$$

Nu met startwaarde $x = 6$; na ook 50 keer itereren ontstaat de figuur bovenin de volgende kolom.
Nu treedt om een of andere reden een cyclus met periode 4 op. Het plaatje is daardoor betrekkelijk simpel. Andere startwaarden blijken dezelfde periode te leveren, je zou daarom verwachten dat

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$



impliceert

$$f(f(f(f(x)))) \equiv x$$

Dit komt neer op de vereenvoudiging:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1}-1}{\dfrac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1}+1}-1}{\dfrac{\dfrac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1}-1}{\dfrac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1}+1}+1} = x$$

De vorm met de herhaalde f's is gemakkelijk in bijvoorbeeld de TI-82 in te voeren.
De grafiek van Y_2 bij het functiebestand

```
Y1 = (X-1)/(X+1)
Y2 = Y1(Y1(Y1(Y1(X))))
```

verrast natuurlijk.
Wie iets met dergelijke verrassingen wil doen in onderwijssituaties, moet meer zulke spectaculaire voorbeelden kunnen vinden. Vandaar de volgende opgave:

Opgave 145
Geef aan hoe de coëfficiënten a_n, b_n, c_n en d_n bepaald kunnen worden om te zorgen dat de functie

$$f_n(x) = \frac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n}$$

bij itereren van

$$x \to f_n(x)$$

een rij met periode n levert.

Zoals gebruikelijk in deze rubriek wordt geen nadruk gelegd op vervelende details als waarden van x waarvoor de noemer 0 wordt. In dit geval is het verreweg het eenvoudigst zulke waarden gewoon toe te laten, dan ook de uitkomst ∞ toe te laten en een natuurlijke betekenis te geven aan $f_n(\infty)$. Het blijkt dat ∞ gewoon in de periodiciteit van de rij waarden mee mag doen.
Voor de liefhebbers – misschien is er een hint in te ontdekken – geef ik nog een functie die periode 6 heeft. U moet zelf maar bedenken van welke wortelvorm de vreemde (?) coëfficiënt afstamt.

$$f(x) = \frac{0.8660254x - 0.5}{0.5x + 0.8660254}$$

Een vraag aan de kenners

De charme van de voorbeelden

$$x \to \frac{x-1}{x+1} \quad \text{en} \quad x \to \frac{x-2}{2x+1}$$

is dat de formules alleen kleine gehele coëfficiënten bevatten. Voor experimenteren met een grafische rekenmachine is dat gewoon heel prettig. Dit voorbeeld is van de algemene vorm

$$x \to \frac{ax-b}{bx+a}$$

Dat is ook de vorm die ik overduidelijk suggereer bij opgave 145. Nu heb ik sterk de indruk dat de enige voorbeelden van deze vorm, die periodiciteit leveren èn alleen gehele coëfficiënten bevatten,

$$x \to \frac{x-1}{x+1}, \quad x \to x \quad \text{en} \quad x \to \frac{-1}{x}$$

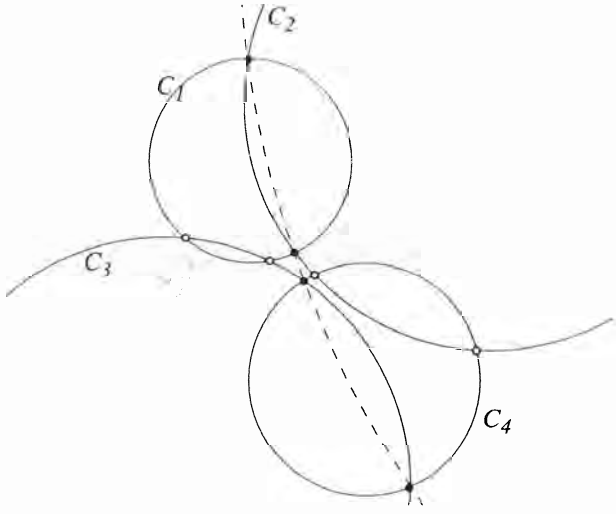
zijn, afgezien van triviale varianten zoals de drievoudige iteratie van het eerste voorbeeld. Opgave 144 is helaas alleen op dat vermoeden gebaseerd.

Opgave 146
Kan iemand mijn vermoeden bevestigen, weerleggen, verbeteren? Kan er iets over gezegd worden dat met niet àl te moeilijke middelen (zoals benodigd bij opgave 145) bewezen kan worden?

Snijdende cirkels

Nu we de chaos omzeild hebben, kunnen we ons gaan vermeien in de vorm die het mooist orde èn periodiciteit uitbeeldt, de cirkel. (Alweer een hint voor opgave 145!) Het voorbeeld ontleen ik aan een lezing op ICME 8 van Adrien Douady (Frankrijk): *Seeing and reasoning in parameterspaces*. Hij gaf een serie voorbeelden waar steeds figuren of formules parameters bevatten en waarbij het beschouwen van de (ruimtelijke of vlakke) figuur, die gevormd wordt door de punten die mogelijke parameterwaarden voorstellen, tot onverwachte oplossingen leidt.

Misschien bedenkt u hier zelf iets bij, of lost u op een andere manier het nu volgende aardige meetkundevraagstuk op. Het gaat om vier cirkels, C_1, C_2, C_3 en C_4, zie de figuur.



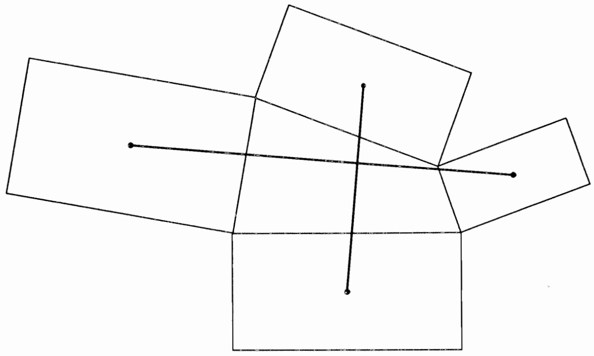
Opgave 147
Toon de volgende equivalentie aan:

De snijpunten van C_1 en C_2, èn die van C_3 en C_4 liggen op één cirkel of rechte lijn.	$\Leftrightarrow$	*De snijpunten van C_1 en C_3, èn die van C_2 en C_4 liggen op één cirkel of rechte lijn.*

In de figuur gaat het dus om de zwarte en de witte punten; laten we maar aannemen dat alle acht snijpunten bestaan. In de figuur liggen de zwarte snijpunten ook op één cirkel, maar dat is natuurlijk niet altijd het geval.
Een bewijs mag korter zijn dan het stellen van de opgave, dat spreekt vanzelf.

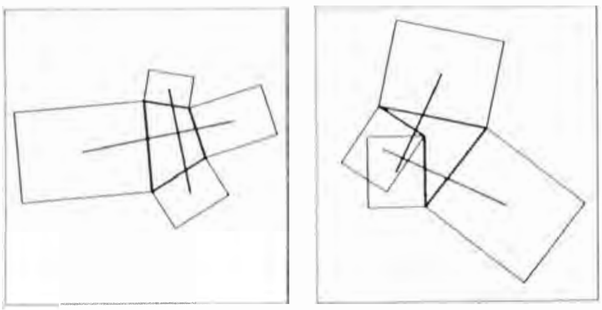
Bewijzen

Van de werkgroep 'Proofs and proving: why, when and how?' verwachtte ik heel wat. Ik ben niet geheel teleurgesteld; want al kwam ik niet terug met totaal nieuwe inzichten hoe met 'bewijzen' om te gaan binnen het werk van het Profi-team, een paar interessante vraagstukken leverde de werkgroep wel op. Een mooi meetkundevraagstuk heeft een eenvoudige schets en een onverwacht resultaat. Michael de Villiers (Durban, Zuid-Afrika) had er zo een bij zich en vertelde aan de hand van dit vraagstuk over ervaringen met *Sketchpad*, een computerprogramma dat in ieder geval goed kan helpen bij het zoeken naar bewijzen, doordat de ermee gemaakte tekeningen zo flexibel zijn.
Het vraagstuk gaat over een (willekeurige) vierhoek waar op de zijden onderling gelijkvormige rechthoeken zijn gezet, om en om met de korte en de lange zijde vastgemaakt zoals in de figuur op de volgende bladzijde. Met de verbindingslijnen van de middens van overstaande rechthoeken is iets bijzonders aan de hand.



Opgave 148
Bewijs dat de verbindingslijnen van de middens van overstaande rechthoeken loodrecht op elkaar staan.

Om wat vertrouwen in het gestelde te geven, volgen hier nog twee voorbeelden.



De prijs van de algebra

Uiteraard kwam in de werkgroep 'Curriculum changes in the secondary school' ook de vraag op of we met z'n allen niet teveel van de algebraïsche vaardigheden aan het weggooien zijn. Degenen die denken dat wij dat alleen in Nederland met de basisvorming hebben gedaan, mogen weten dat het leed op dit gebied wereldwijd gespreid is. Natuurlijk werd onder meer betoogd dat de algebraïsche vaardigheden niet als los zand naast elkaar maar binnen een groter geheel moeten worden geoefend. Het toeval(?) wil dat we in de kring van scholen rond het Profi-project juist nu beginnen te experimenteren met een boekje dat *Machtige Functies* heet, waar precies dat geprobeerd wordt. Het gaat om 4 vwo.
In 'Machtige Functies' komt een paragraaf voor die 'De prijs van de algebra' heet. Het idee daarin is makkelijk uit te leggen aan de hand van de uitwerking

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

Haakjes verdrijven heette dat. Nu gaan we eens tellen hoeveel bewerkingen er in het linkerlid en in het rechterlid moeten worden uitgevoerd. Links zijn dat twee optellingen en één vermenigvuldiging, rechts respectievelijk drie en vier. Tel uit je winst!
In 'De prijs van de algebra' wordt het prijsbepalen van formules eerst gemodelleerd met behulp van een prijslijst die er als volgt uitziet:

Prijslijst algebraïsche bewerkingen	
basisoperaties +, –, ×, :	1 punt
machtsverheffen (alleen gehele positieve machten)	exponent geeft puntenaantal
aanroep variabele	1 punt
haakjes, gewone getallen	gratis

Nu verschillen
$5x4 + 3x3 + 7x2 - 6x + 13$
en
$x(x(x(5x + 3) + 7) - 6) + 13$
in prijs: de standaardvorm van de veelterm 'kost' in totaal 21 punten, de tweede vorm (de zogenaamde vorm van Horner) slechts 12.

In situaties waar veel berekeningen van dezelfde vorm moeten worden uitgerekend, gaat dit type overwegingen een rol spelen. In de sfeer van het programmeren van computers komt zoiets als de vorm van Horner dan ook vaak voor. Je kunt wel stellen dat zonder Horner het weerbericht niet op tijd voor het journaal klaar zou zijn. Het zou overigens niet slechter kloppen: het gaat hier immers om formules die equivalent zijn.
Behalve dat het fenomeen van de efficiënte omwerking van een formule op zich interessant is, geeft het ook een aardige gelegenheid nog eens met allerlei algebraïsche bewerkingen te oefenen. Denk bijvoorbeeld aan werken met machten in deze opgave.

Je weet: $(a^8)^8 = a^{64}$.
a. *Nogal wat prijsverschil tussen links en rechts! Hoe zit dat precies?*
b. *Schrijf* a^8 *in een goedkopere vorm, en daarna ook* a^{64}.
c. *Vind goedkopere vormen voor* x^{15} *en* y^{24}.
d. *Probeer een algemeen voorschrift te formuleren voor het vinden van de goedkoopste vorm van zulke eenvoudige machtsformules als in deze opgave.*

De slotopgave van 'De prijs van de algebra', en ook van deze puzzelrubriek, is:

Opgave 149
Herschrijf
$$a^8b^{16}c^{32} + a^{16}b^{32}c^8 + a^{32}b^8c^{16}$$
zo goedkoop mogelijk.

Omdat bij de hier gevolgde prijsstelling de prijzen altijd natuurlijke getallen zijn, is er een oplossing. Zendt u die in voor de leerlingen die met 'Machtige functies' werken, gaan vragen wat 'het' juiste antwoord is. Ik weet het nog niet!