'Terugkijkend op twintig jaar ervaring, observatie en onderzoek kom ik tot de conclusie dat we de (niet zo) realistische wereld nodig hebben voor het ontwikkelen van echte wiskunde die gebruikt kan worden in de realiteit'. Dat beweerde **Jan de Lange** in zijn afsluitende plenaire lezing op ICME 8 in Sevilla.

Echte problemen met realistische wiskunde

Het wiskundeonderwijs verandert

Het wiskundeonderwijs verandert voortdurend, dat is geen verrassing. Toch is het de moeite waard even terug te kijken, want we kunnen daarvan leren voor de toekomst. Een Amerikaans tijdschrift gaf het volgende voorbeeld van de veranderingen in het Amerikaanse wiskundeonderwijs.

- in 1960: Een houthakker verkoopt een vrachtwagen hout voor \$100. De productiekosten zijn vier vijfde van de prijs. Wat is zijn winst?
- in 1970 (traditionele wiskunde): Een houthakker verkoopt een vrachtwagen hout voor \$100. De productiekosten zijn vier vijfde van de prijs, dus \$80. Wat is zijn winst?
- in 1970 (moderne wiskunde): Een houthakker verhandelt een verzameling L van houtblokken voor een verzameling M van dollars. Het aantal elementen van M is 100. Teken de verzameling M met 100 stippen. De deelverzameling C van de kosten heeft 20 stippen minder dan M. Teken C als deelverzameling van M. Beantwoord de volgende vraag: wat is het aantal elementen van de verzameling die de winst aangeeft?
- in 1980: Een houthakker verkoopt een vrachtwagen hout voor \$100. De winst is \$20. Opdracht: onderstreep het getal 20.
- in 1990 (maatschappelijk gericht onderwijs): Door prachtige bomen te kappen, verdient een houthakker \$20. Wat vind je ervan als je op deze manier de kost verdient? (Onderwerp voor een klassegesprek: Hoe zullen de vogels en de eekhoorntjes zich voelen?)

Dit (overtrokken) voorbeeld maakt twee zaken zichtbaar:

- de rol van de realiteit in het wiskundeonderwijs
- het probleem dat je de echte wiskunde kwijt dreigt te raken als je de realiteit binnenhaalt.

Een realistisch probleem dat geen echt probleem is

Er bestaan legio voorbeelden van realistische problemen waarin de realiteit wordt gedegradeerd tot een kunstmatig en niet-relevant probleem. Zoals in het volgende voorbeeld:

Op een dag rijdt een vertegenwoordiger 300 kilometer in $x^2 - 4$ uur. De volgende dag rijdt zij 325 kilometer in $x + 2$ uur.
Schrijf de verhouding op van haar gemiddelde snelheden van beide dagen en vereenvoudig die.

In dit voorbeeld is een wiskundig probleem aangekleed om het op een realistisch probleem te laten lijken. Het is een erg kunstmatig probleem dat geen enkele relevantie heeft en geen betekenis heeft voor de leerlingen. De wiskunde is misschien echt, het probleem is dat niet.

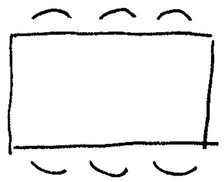
Het kiezen van geschikte contexten

In 1980 presenteerde Freudenthal op de vierde ICME conferentie in Berkeley zijn dertien belangrijke problemen voor de toekomst van het wiskundeonderwijs.
Zijn achtste probleem was: 'Hoe vinden we geschikte contexten waarin we het mathematiseren kunnen onderwijzen?' Hij erkende dat dit niet zo'n gemakkelijke vraag was: 'Realiteit – wat is dat eigenlijk? Vergeef me mijn onzorgvuldige manier van uitdrukken. In het onderwijzen van het mathematiseren wordt de 'werkelijkheid' voorgesteld door een (voor de leerling) betekenisvolle context dat een wiskundig probleem in zich heeft.'
Bij het beoordelen van realistische problemen gaat het er dus om of we te maken hebben met een wiskundig probleem in een voor de leerlingen betekenisvolle context.
In het volgende laat ik een aantal voorbeelden zien van realistische problemen die door leerlingen als betekenisvol werden beoordeeld en die over echte wiskunde gaan.

Betekenisvolle contexten voor de ontwikkeling van begrippen

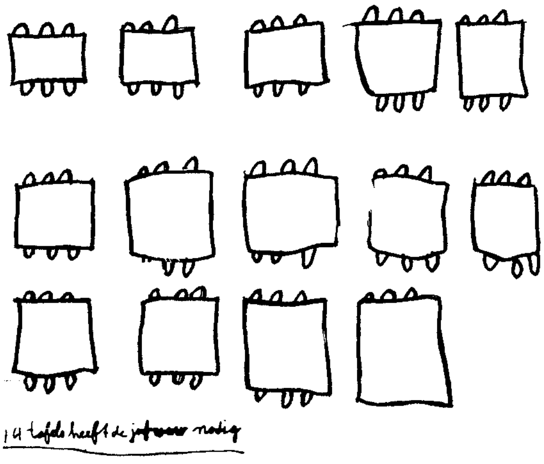
Een klas in de basisschool. De leerlingen zijn acht tot negen jaar. De docent introduceert het probleem:
Vanavond komen jullie ouders op bezoek. Uit de briefjes die jullie hebben meegenomen weten we dat er 81 ouders komen. Ze zitten aan tafels in de zaal. Aan iedere tafel

kunnen zes ouders zitten.
De docent maakt een tekening op het bord:

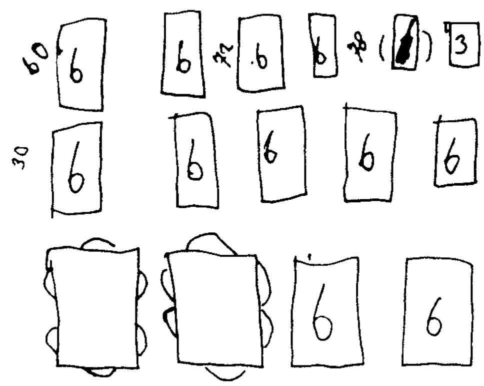


De vraag is: *Hoeveel tafels moeten er in de zaal staan?*

De leerlingen gaan enthousiast aan het werk in groepjes van drie of vier en de docent loopt helpend rond. Na ongeveer tien minuten vraagt de docent om de oplossingen te laten zien en uit te leggen. Badr tekende net zoveel tafels als hij nodig had om alle ouders te laten zitten:

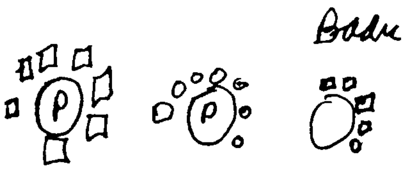


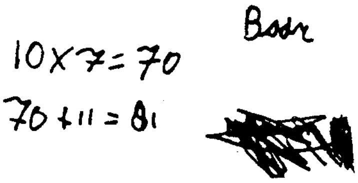
Roy begon op dezelfde manier, maar na twee tafels tekende hij schematisch een rechthoek met daarin het getal 6. Weer na twee van deze 'tafels' realiseerde hij zich dat aan vijf tafels samen 30 ouders konden zitten. Zo kwam hij via 30 op 60 en zo op 72 en 78. Aan het eind zette hij er nog een tafel met drie stoelen bij.



Een derde leerling, Abdelaziz, ging nog een stap verder in het mathematiseren van het probleem. Hoewel hij ook begon met het tekenen van de modeltafel van het bord, wist hij onmiddellijk het probleem te schematiseren door zijn recent verworven kennis van veelvouden van 6 te gebruiken. Hij schreef: $6 \times 6 = 36$, dat verdubbelde hij tot 72 en hij voegde er nog twee tafels aan toe om op 84 te komen.

Als we op een afstand naar deze drie verschillende oplossingen kijken, zien we dat op heel verschillende niveaus echte wiskunde is gebruikt in dit realistische probleem. Veel docenten zullen vinden dat bij de eerste aanpak de wiskunde ontbreekt. Maar het visualiseren en schematiseren zijn ook belangrijke en krachtige technieken van mathematiseren. Alleen in de derde oplossing is de wiskunde meer zichtbaar en staat die op een 'hoger' niveau. Het gaat natuurlijk niet alleen om dit probleem. Het is een voorbereiding op problemen met het delen in een later stadium. Het is een onderdeel van de fenomenologische verkenning die de leerlingen in staat stelt wiskunde te reconstrueren of liever: opnieuw uit te vinden.
Na een klassegesprek over de verschillende manieren van aanpak presenteert de docent het volgende probleem: 'De 81 ouders krijgen natuurlijk ook koffie. Uit iedere pot koffie kun je 7 kopjes schenken. Hoeveel potten koffie moeten we zetten?'
Uit wiskundig oogpunt is dit probleem hetzelfde als het vorige. In plaats van te delen door zes moeten de leerlingen nu delen door zeven. Voor de leerlingen is het echter een heel ander probleem. Het is nu veel moeilijker om een visuele presentatie te geven van het probleem. Je tekent nu eenmaal gemakkelijker tafels met stoelen eromheen dan potten koffie. Badr probeert het toch:

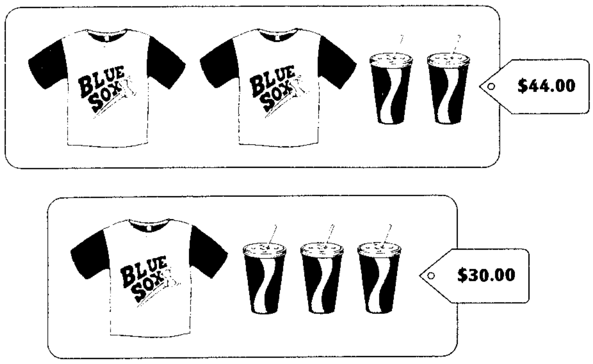




Maar na twee potten herinnert hij zich de discussie over het vermenigvuldigen en dat je daarmee sneller kunt werken. Hij gaat over naar $10 \times 7 = 70$, gevolgd door $70 + 11 = 81$, waarmee hij op 12 potten komt. In één les maakt de leerling dus een stap vooruit door wiskundige technieken te hanteren in realistische problemen.

Een belangrijk aspect bij het beoordelen van dit soort voorbeelden is het feit of ze deel uitmaken van een lange lijn die bestaat uit een serie van problemen (soms gespreid over jaren) waarin goed gedefinieerde wiskundige begrippen en activiteiten zich kunnen ontwikkelen. Dat geldt ook voor het volgende voorbeeld, bestemd voor leerlingen van twaalf jaar.

Het probleem wordt visueel aangeboden:



Hoeveel kost een T-shirt? En een soda?
Leg uit hoe je aan je antwoord komt.

Ook hier bedenken leerlingen slimme en verschillende oplossingen. Ze worden niet gehinderd door de algebra van twee vergelijkingen met twee onbekenden, maar lossen het probleem op met gezond verstand.

Een leerling pakt het als volgt aan:

'Eén T-shirt kost $18, want een T-shirt en een soda kosten samen $22. Er blijven 2 soda's en $8 over in het onderste plaatje, dus 1 soda is $4. 22 – 4 = 18, dus een T-shirt kost $18.'

Een andere leerling ziet de regelmaat:

'2 T-shirts en 2 glazen, dan
1 T-shirt en 3 glazen, dan doe ik 0 T-shirts en 4 glazen – bijna klaar.
De prijzen zijn $44, 1 T-shirt eraf:
$30, weer 1 T-shirt eraf:
$16 gedeeld door 4 is $4.'

In één klas zijn zo vijf totaal verschillende aanpakken geobserveerd, inclusief een aantal algebraïsche notaties zoals: $2t + 2c = 44$. Vanuit een wiskundig oogpunt zijn deze formele notaties niet altijd correct, maar vanuit een oogpunt van begripsontwikkeling zijn ze wel heel belangrijk. In een veel later stadium zullen de leerlingen vergelijkingen op een formele manier oplossen. Ze weten dan hoe ze algebraïsch moeten redeneren, ze snappen wat een vergelijking is, ze gebruiken een correcte wiskundige notatie en ze begrijpen wat een variabele is. In dit specifieke geval duurde het twee jaar voordat dit niveau van wiskundig begrijpen was bereikt.

Realistisch wiskundeonderwijs

De voorgaande twee voorbeelden geven een beeld van het leren en onderwijzen van wiskunde, ingebed in realistische situaties, met in gedachten de ontwikkeling van echte wiskunde, zij het op langere termijn. Wat zijn de principes van een dergelijke aanpak?

Allereerst ligt het beginpunt bij een probleem dat realistisch is voor de leerling, zodat die zich erbij betrokken voelt en het een zinvol probleem vindt om aan te pakken. Het is moeilijk om de voorwaarden te formuleren waaraan een geschikte context moet voldoen. Die context kan een situatie uit het dagelijks leven zijn, iets cultureels, wetenschappelijks, kunstzinnigs, wiskundigs, enzovoort. In elk geval moet de context de leerling houvast bieden om een model te ontwikkelen dat hij kan gebruiken in zijn verdere wiskundige ontwikkeling.

Realistische problemen worden gebruikt om wiskundige begrippen te ontwikkelen. Het gaat niet in de eerste plaats om het aanleren van probleemoplossende vaardigheden, maar om de exploratie van nieuwe onderliggende wiskundige concepten.
Na het proces van aanvankelijke mathematisering (waarbij het probleem uit de realiteit in een meer wiskundig probleem is omgezet) zal de leerling in een situatie terechtkomen die mogelijkheden biedt voor abstractie, formalisering en generalisatie.
In een volgende fase zal de leerling de nieuw verworven kennis toepassen in nieuwe problemen in andere contexten. Daarmee worden de begrippen verankerd en kan transfer plaatsvinden van vaardigheden.

Uit de voorgaande voorbeelden blijkt wel dat het op deze manier leren en onderwijzen van wiskunde geen gemakkelijke opgave is en ons voor de nodige problemen zal plaatsen. In het volgende zal ik me concentreren op twee belangrijke problemen:
– het verloren gaan van het 'lesgeven'
– het verloren gaan van basisvaardigheden en routines.

Het verloren gaan van het 'lesgeven'

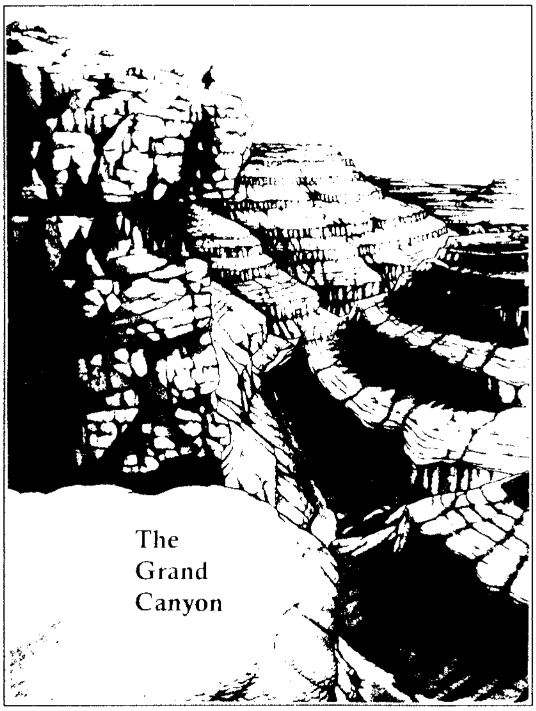
Lesgeven wordt vaak opgevat als een activiteit van de docent: hij introduceert het onderwerp, geeft één of twee voorbeelden, stelt één of twee vragen en nodigt de passief luisterende leerling uit om actief te worden door de sommen uit het boek te gaan maken. Meestal doen leerlingen dat alleen of in tweetallen. Ten slotte wordt de les klassikaal afgesloten. De volgende lessen zien er ongeveer net zo uit.
Echt realistisch wiskundeonderwijs maakt het lesgeven ingewikkelder. De docent wordt niet langer geacht 'les te geven'. Deze overgang naar niet-lesgeven is bijzonder lastig te maken en erg afhankelijk van de persoon.

Als we terugkijken naar de voorbeelden van de ouderavond en het T-shirt probleem, zal duidelijk zijn dat we deze problemen niet meer op de traditionele manier kunnen onderwijzen. Leerlingen en docenten worden regelmatig geconfronteerd met problemen die verschillende goede antwoorden en aanpakken hebben.

Het onderwijs zal niet meer volgens standaardprocedures kunnen verlopen. Iedere keer zal de docent een persoonlijke inschatting moeten maken, hij is de organisator van het leerproces. In de klassesituatie bepaalt de docent hoe een optimaal resultaat kan worden verkregen door een geschikte combinatie van individueel werk, groepswerk, klassegesprek, presentaties door leerlingen, presentaties door de docent en andere activiteiten.
Dat is geen gemakkelijke klus, zoals zal blijken uit het volgende.

De didactiek van het herontdekken

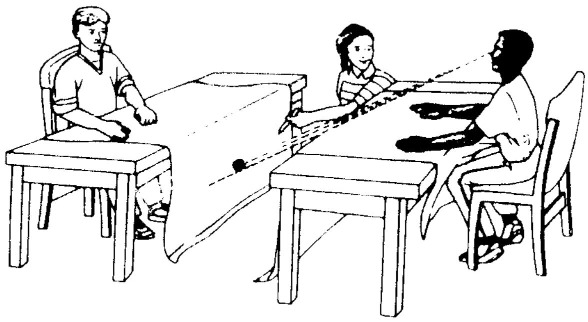
Zodra de doelen en de begrippen zijn vastgesteld, ontstaat het probleem van het vinden van een geschikte context. Dit is een echt ontwerpersprobleem.
In het volgende voorbeeld gaat het om het vinden van een context die leerlingen voldoende mogelijkheden biedt tot het herontdekken van het begrip 'kijklijn'.
In het eerste ontwerp werden leerlingen geconfronteerd met een foto van een lifter die aan de rand van de Grand Canyon zit.



De vraag is:
De lifter kijkt recht naar beneden en naar voren. Hij kan de rivier niet zien. Waarom niet?

Door deze open vraag wordt het begrip niet weggegeven, maar wordt een discussie uitgelokt waarin het idee van kijklijnen op een natuurlijke manier aan bod kan komen. Hoewel de leerlingen enthousiast deelnamen aan de discussie en veel antwoorden zinvol waren, kwam geen enkele leerling op het idee van kijklijnen. De ontwerpers konden dus terug naar hun tekentafel.

Na een lange discussie werd gekozen voor een simulatie van de canyons met twee tafels. De leerlingen zitten achter de tafels en de opdracht is om met stippen aan te geven welk gedeelte van de verticale wand tegenover hen zichtbaar is. De figuur laat zien hoe deze opdracht in drietallen uitgevoerd kan worden.



Deze activiteit (die niet gemakkelijk is te organiseren in een grote volle klas!) bleek succes te hebben. Verschillende leerlingen gebruikten het begrip lijn in hun redeneringen. Sommigen gebruikten en/of vonden woorden als kijklijn of zichtlijn.

De ontwerpers hadden het probleem van hoe het begrip 'kijklijn' te laten herontdekken, opgelost. Maar de docent kreeg met onverwachte nieuwe problemen te maken. De leerlingen vroegen zich af wat voor soort lijn op de 'wand van de canyon' werd getekend. De volgende suggesties kwamen naar voren:
- de lijn is recht
- de lijn is hol
- de lijn heeft de vorm van de top van een heuvel.

Deze discussie was niet voorzien door de ontwerpers. De docent was dus aan zijn lot overgelaten, zoals regelmatig zal gebeuren in probleem-georiënteerd onderwijs. Zelfs buitengewoon bekwame docenten hebben grote moeite met dit soort situaties in de klas. Dit pleit voor een goede ondersteuning met docentenhandleidingen en trainingen.

Maar de opbrengst kan ook geweldig zijn. De beschreven exploratie van kijklijnen leidt niet alleen tot het begrip kijklijn, maar ook tot ideeën die te maken hebben met steilheid, hoeken en verhoudingen. Na een week of drie blijken de leerlingen de formele definitie van de tangens aan te kunnen. De waarde van een realistisch probleem moet dus worden afgemeten aan de plaats in het hele curriculum en niet op een enkel onderdeel daarvan.

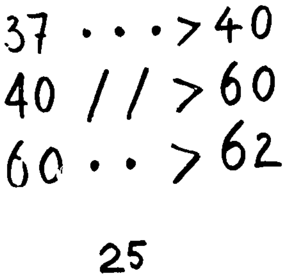
Het probleem van de basisvaardigheden

De discussie van de basisvaardigheden in relatie tot de implementatie van realistische wiskunde wordt op dit ogenblik in veel landen gevoerd. Voor veel docenten speelt deze discussie helemaal niet. Basisvaardigheden zijn voor hen een gegeven en vormen de kern van hun wiskundeonderwijs.

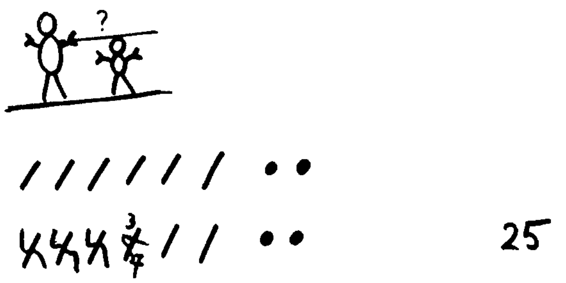
De actuele vragen zijn: welke zijn eigenlijk nog de basisvaardigheden in de eenentwintigste eeuw? Hoe ontwikkelen en onderhouden we die? Wat is hierin de rol van de zakrekenmachine?

Uit een rapport over het wiskundeonderwijs op de basisschool blijkt duidelijk dat een realistische aanpak niet hoeft te leiden tot een lagere score op testen over basisvaardigheden. Integendeel, het onderzoek toont aan dat de leerlingen het op de meeste terreinen beter doen. Voor het voortgezet onderwijs kunnen we enig inzicht krijgen in de scores van leerlingen op basisvaardigheden van de basisschool via het internationale onderzoek 'Third International Mathematics and Science Study'. Hoewel de toets-items niet goed corresponderen met het huidige onderwijsprogramma, scoren de Nederlandse leerlingen behoorlijk goed.

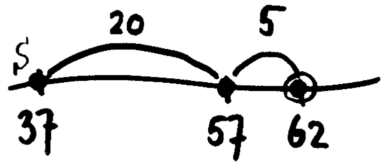
In het volgende voorbeeld zal ik laten zien hoe een context de basisvaardigheden op een begripsmatig niveau kan ondersteunen.
De vraag is: bepaal het verschil in lengte van Jorge en Paulo. Jorge is 62 inch en Paulo is 37 inch lang.
Gabriela loste het probleem op door van 37 naar 62 te tellen. Ze telde eerst van 37 tot 40 en zette drie stippen tijdens het tellen. Toen telde ze van 40 tot 60 en tekende twee stokjes. Tot slot telde ze tot 62 met nog twee stippen:



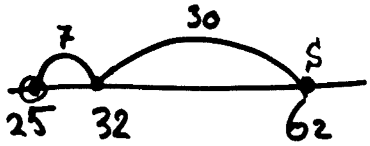
Een andere leerling, Roberto, maakte eerst een tekening van Jorge en Paulo. Zijn commentaar: 'Ik maakte de grote jongen kleiner door de kleine ervan af te halen. Ik nam 3 10-en van de 6 10-en en 7 van zijn 10, daar bleven er 3 van over en met deze 2 zijn dat er 5 en met de 2 10-en die er nog zijn is alles 25.'



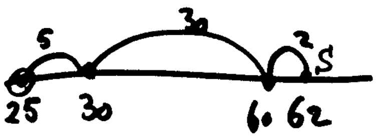
Een ander krachtig model is de lege getallenlijn. Hetzelfde probleem kan op verschillende manieren worden aangepakt.
Allereerst, tel 20 bij 37 op om 57 te krijgen. Met nog een sprong van 5 komen we bij 62. Het totaal is 20 + 5 = 25.



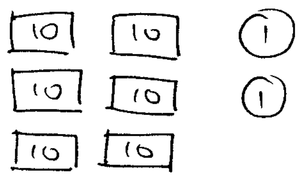
Een tweede strategie. Begin bij 62 en neem er 30 af. Zo kom je bij 32. Neem er nog eens 7 af en je bent bij 25. Het verschil in hoogte is dus 25.



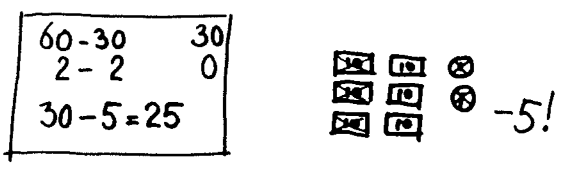
Een derde strategie. Begin bij 62. Neem er 2 af om bij 60 te komen. Neem er 30 af. Je bent nu bij 30. Neem 5 weg. We zijn nu bij 25.



Nog een ander model naast dat van de stippen en stokjes en de lege getallenlijn is het geldmodel. De lengte van de langste jongen geven we aan met 6 biljetten van 10 en 2 munten van 1.



Nu lost de leerling het probleem op door wegstrepen. Eerst 3 biljetten van 10. Daarna wil hij 7 munten wegstrepen. Maar er zijn maar 2 munten. Dus hij streept die weg en maakt een aantekening dat hij 5 tekort komt (notatie -5!). In de rechthoek vat hij alles nog eens samen:



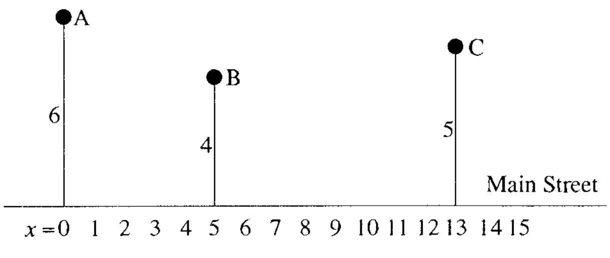
Twee zaken zijn belangrijk in dit voorbeeld.
In de eerste plaats moeten we de leerlingen een breed scala aan modellen aanbieden, zodat ze kunnen kiezen hoe ze het willen doen, bijvoorbeeld met stokjes/stippen, de lege getallenlijn en geld. Binnen een dergelijk model hebben ze weer de mogelijkheid hun eigen strategie te kiezen. Zo zullen leerlingen flexibel zijn en zullen ze, zoals onderzoek uitwijst, minder herhaling en training nodig hebben, terwijl hun begrip op een hoger niveau staat.
Een tweede punt dat zorgvuldige aandacht vraagt, is de plaats van contextrijke problemen in het leerplan. Er zijn twee uitersten: aan het begin of aan het eind van een leerweg. Geplaatst aan het begin van de leerweg, kan het fungeren als een didactisch fenomenologische exploratie. Het probleem van de lengte van de twee leerlingen functioneert alleen maar als de leerlingen nog weinig van aftrekken afweten. Als de leerlingen al goed zijn in aftrekken, verliest het probleem volledig haar doel en waarde.
Een realistisch probleem kan ook haar plaats vinden aan het eind van een leerweg. Leerlingen hebben rijke toepassingen nodig om het begrip te kunnen versterken en om transfer van de vaardigheden te ontwikkelen.

Waar is de echte wiskunde gebleven?

Onlangs ontstond een ander probleem in de discussie over realistische wiskunde. In het internationale forum van onderzoekers van wiskundeonderwijs is wiskunde in context wel eens omschreven als 'proto-wiskunde'. Andere bezwaren die genoemd worden, zijn dat de beperking tot contexten uit de realiteit verhindert dat de doelen worden bereikt en dat het gebruik van hogere wiskundige middelen en generalisaties niet het doel is van de zuivere realist.
We zullen duidelijk moeten maken onder welke voorwaarden realistische wiskunde echte wiskunde oplevert. Het volgende voorbeeld laat zien hoe echte wiskunde kan worden bedreven in een zinvolle context. Het gaat hierbij om leerlingen van vijftien en zestien jaar.

Realistisch probleem met echte wiskunde

In de Hoofdstraat moet een nieuw gebouw komen. A, B en C zijn gebouwen in de zijstraten.



Waar moet het nieuwe gebouw in de Hoofdstraat worden neergezet zodat de gemiddelde afstand tot A, B en C zo klein mogelijk wordt?

Laten we eerst eens kijken naar het werk van een leerling die het probleem met een tabel oploste:

X	to A	to B	to C	tot. Ds	Ave. Ds.	Max
0	6	9	18	33	11	18
1	7	8	17	32	$10\frac{2}{3}$	17
2	8	7	16	31	$10\frac{1}{3}$	16
3	9	6	15	30	10	15
4	10	5	14	29	$9\frac{2}{3}$	14
5	11	4	13	28	$9\frac{1}{3}$	13
6	12	5	12	29	$9\frac{2}{3}$	12
7	13	6	11	30	10	13
8	14	7	10	31	$10\frac{1}{3}$	14
9	15	8	9	32	$10\frac{2}{3}$	15
10	16	9	8	33	11	16
11	17	10	7	34	$11\frac{1}{3}$	17
12	18	11	6	35	$11\frac{2}{3}$	18
13	19	12	5	36	12	19
14	20	13	6	39	13	20
15	21	14	7	42	14	21

Enkele docenten (en anderen) zullen beweren dat er weer geen wiskunde in voorkomt. Dit zou proto-wiskunde of gewoon gezondverstand redeneren zijn. Natuurlijk is dit tot op zekere hoogte ook zo. Net zoals bij het probleem van de ouderavond. Er zijn verschillende niveaus van wiskundig redeneren om dit probleem aan te pakken. Maar laten we eerst kijken naar het vervolg van het probleem voordat we een definitief oordeel vellen.

De volgende vraag is:
Gebruik de tabel om een minimax-plaats te vinden.

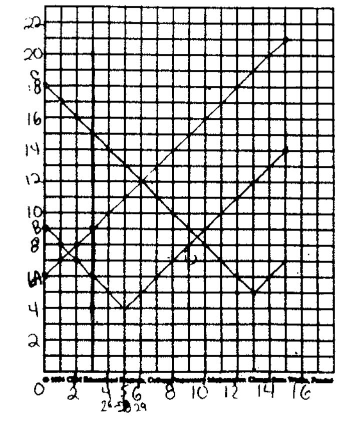
Het antwoord van de leerling maakt volstrekt duidelijk dat hij het probleem snapt: 'De minimax-plaats is bij 6, daar is het verst verwijderde punt het dichtste bij.'

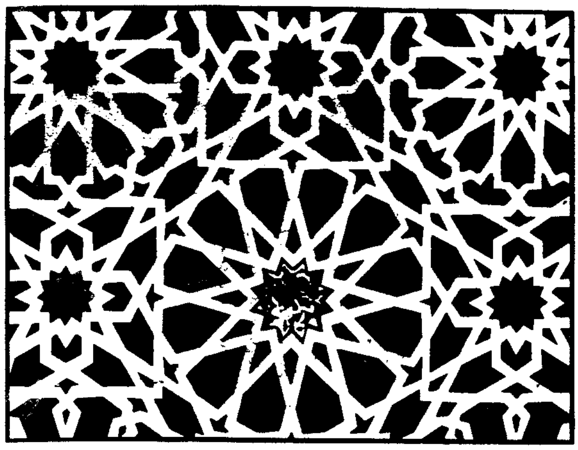
De volgende vraag is:
Stel dat het nieuwe gebouw op plaats x wordt neergezet. Geef vergelijkingen met absolute waarde voor de afstand van x tot A, B en C.

De leerling antwoordt:

$$A:\ \cancel{y=|x-0|+6}\ /\ y=|x|+6$$
$$B:\ y=|x-5|+4$$
$$C:\ y=|x-13|+5$$

Na het tekenen van de grafieken worden de leerlingen gevraagd om de minimax-plaats te vinden met behulp van grafieken.





Echte wiskunde, een zinvol probleem en een goede redenering. Dat zijn de kenmerken waar we naar moeten zoeken. Dat is niet gemakkelijk, zelfs niet (of juist niet!) op het niveau van de basisschool.

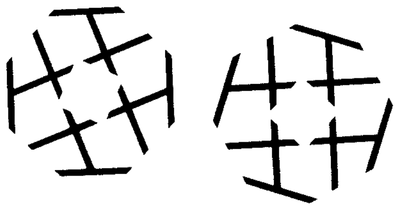
Ontwerp en invloed van een goed probleem

De kunst van het 'niet-lesgeven' is één van de belangrijkste aandachtspunten bij de implementatie van realistisch wiskundeonderwijs. Het is noodzakelijk dat de atmosfeer in de klas het reflectieve denken op gang zet, zodat de leerlingen met plezier meedoen aan een klassediscussie en ze een probleemoplossende houding gaan aannemen. Dat zal voor veel klassen een volledige cultuuromslag betekenen. Sommige onderzoekers zijn van mening dat het reflectieve denken en problematiseren meer van de leerlingen en de cultuur in de klas afhangt dan van de opdracht.
Ik ben geneigd het hiermee oneens te zijn. Het zal erg lastig zijn de cultuur in de klas te veranderen als er geen geschikte opdrachten zijn. Goede opdrachten vergemakkelijken het proces zelfs zodanig, dat de cultuur van de leerlingen sneller verandert dan die van de docent.
Ik ben er na jarenlange observaties van leerlingen in verschillende landen, inmiddels van overtuigd dat de ontwikkeling van het reflectieve denken en het problematiseren vooral afhangt van de kwaliteit van de opdracht en van de plaats in het leerplan.

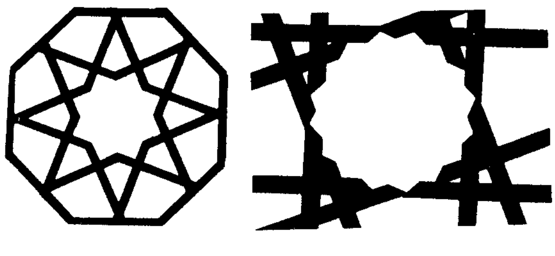
Het Alhambra en echte wiskunde

Het volgende voorbeeld laat zien hoe patronen uit het Alhambra gebruikt kunnen worden als een realistische context met echte wiskunde. Dit voorbeeld is ontworpen voor twaalfjarigen, maar het materiaal werd ook uitgeprobeerd met wiskundestudenten aan een universiteit.
De kunst van het Alhambra is sterk wiskundig van karakter, meer precies: meetkundig. Mooie stervormige structuren zijn op verschillende ingenieuze manieren met elkaar verweven. Soms hebben de sterren twaalf punten, soms acht of zes:

De studenten krijgen twee transparanten met een basisfiguurtje. Ze kennen de hoeken waar het om gaat.



De opdracht is om de stervormige figuur hieronder te construeren en te beredeneren hoe groot de hoeken zijn.



De volgende opdracht is om de zestienpuntige ster te maken met beide transparanten. Wat is er in dat geval over de hoeken te zeggen?
Het is interessant om te zien hoe wiskundestudenten reageren op dit probleem. Ze hadden er een hele klus aan. Allereerst vonden ze het gek om met transparanten te werken. Vervolgens hadden ze er geen idee van hoe deze kennis paste in hun bestaande kennis. Bovendien vonden ze het behoorlijk moeilijk om in dit geval de goede redenering te vinden. Ten slotte wisten ze niet goed hoe ze de oplossing moesten presenteren.

Aandachtspunten

Er bestaat een essentieel verschil tussen de rollen die contexten kunnen vervullen als we nieuwe wiskundige begrippen proberen te introduceren of als we deze proberen toe te passen.

In de fase van verkenning en problematisering komt het ontwerp van de juiste context erg precies. Sommige contexten werken, andere contexten werken niet. Belangrijk is dat de context de leerling een model biedt dat later gebruikt kan worden om andere problemen mee op te lossen. Het werkelijkheidsgehalte van een context is in dit verband niet belangrijk. Een context mag zelfs helemaal kunstmatig zijn. Ze hoeft alleen maar betekenis te hebben voor de leerlingen.
Contexten in toepassingen hebben een andere rol. De keuze van de context zelf is minder belangrijk, maar het werkelijkheidsgehalte is belangrijker dan in de exploratiefase.
Als we inzoomen en kijken naar de rol die een context speelt in een specifiek probleem, zijn er verschillende mogelijkheden. Vaak is de context een 'aankleding' van een probleem en geeft er alleen maar wat kleur aan. Het probleem van de lengtes van de twee leerlingen valt in deze categorie als het te laat in de cognitieve ontwikkeling wordt gepresenteerd.
Het meest intrigerende gebruik van contexten doet zich voor als de leerling zich werkelijk moet verdiepen in de context om het probleem echt te kunnen begrijpen en op te lossen. Het probleem van de vier gebouwen valt in deze categorie.

Verschillende soorten contexten schijnen voor verschillende groepen leerlingen gebruikt te worden. Voor basisschoolleerlingen lijkt het of de contexten kunstmatiger zijn of dicht bij de leerling liggen, zoals boodschappen doen, school, muziek en sport. Voor oudere leerlingen lijkt het dat de contexten verder van de leerling afstaan. Ze hebben een hoger realiteitsgehalte en zijn meer wetenschappelijk. Dit ervaringsfeit wordt echter niet door onderzoek ondersteund. Integendeel, er zijn aanwijzingen dat ook leerlingen van de basisschool met wetenschappelijke contexten kunnen omgaan, mits de problemen maar uitdagend en betekenisvol zijn. Nader onderzoek hierover is gewenst.

Bij toetsing worden de problemen rondom contexten snel onderschat. Toetsen moeten nu eenmaal aan andere eisen voldoen dan gewoon leerlingmateriaal.
Allereerst maakt een context het moeilijker om vast te stellen wat er gemeten wordt door de toets. Ook is het scala van contexten, waaruit bij een toets gekozen kan worden, aanmerkelijk kleiner. Contexten in een toets mogen leerlingen niet afleiden of emotioneel verwarren. In toetsen moet men dus voorzichtig zijn met contexten als aids, kanker, armoede, enzovoorts.
Het volgende voorbeeld is zo'n controversiële context, in dit geval met een politieke lading.

Een controversiële context

Het voorbeeld is bedoeld voor zestienjarigen.

In een zeker land is het defensiebudget voor 1990 vastgesteld op 30 miljoen dollar. De totale begroting is 500 miljoen dollar. Het jaar daarop is het defensiebudget 35 miljoen dollar, terwijl de totale begroting 605 miljoen dollar bedraagt. De inflatie was 10% in deze periode. Je wordt uitgenodigd om een lezing te geven voor een groep pacifisten. Je gaat ze vertellen dat het defensiebudget het laatste jaar is gedaald.

Dit probleem is behoorlijk ingewikkeld: relatief tegen absoluut, percentages, verhoudingen. Maar het controversiële karakter van de context volgt uit de combinatie van deze vraag met de volgende:
Je wordt uitgenodigd om een lezing te geven voor een militaire academie. Vertel ze dat het defensiebudget het laatste jaar is toegenomen.

De reacties van de docenten waren nogal uiteenlopend. Van: 'Een prachtige opgave, verhelderend, laat de rol van wiskunde in de politiek zien' tot: 'Ik weiger om mijn leerlingen te leren hoe ze kunnen manipuleren.'
Dit probleem werd opgenomen in een Amerikaanse publicatie. De wiskunde van het probleem bleef hetzelfde, maar de context werd politiek geneutraliseerd. Persoonlijk vind ik dat we dit soort problemen nodig hebben om een kritische houding bij onze leerlingen te ontwikkelen.

De houthakker in 1996

Hoe zou het probleem van de houthakker er anno 1996 uitzien? Dit is mijn versie:
In een oud wiskundeboek (1960) stond een realistisch probleem: Een houthakker verkoopt een vrachtwagen hout voor $100. De productiekosten zijn vier vijfde van de prijs. Wat is zijn winst?
Nu is het 1996. De prijzen van hout zijn gestegen. Winstmarges staan onder druk. Toen de houthakker naar zijn winst werd gevraagd zei hij: 'Tja, de productiekosten zijn dramatisch gestegen. Een vrachtwagen hout kost me nu $750. En mijn winst is hetzelfde gebleven.'
Bespreek de verschillende betekenissen van 'de winst is hetzelfde gebleven' en bereken deze winst(en).

Nu is het probleem een zinvol realistisch probleem geworden met echte wiskunde. Dat is het doel waarnaar we in de komende jaren moeten streven.

Jan de Lange is hoogleraar aan het Freudenthal instituut te Utrecht.

Dit artikel is een verkorte weergave van de lezing 'Real Problems with Real World Mathematics' gehouden op zondag 21 juli 1996 op ICME 8 in Sevilla.
In deze populaire versie zijn de literatuurverwijzingen achterwege gelaten.