Intrigerende machten

J. van de Craats
Universiteit van Amsterdam / Open Universiteit

Probleemoplossen en redeneren zijn kernwoorden in de voorstellen van de Vakontwikkelgroep Wiskunde voor het nieuwe onderwijs in de Tweede Fase. Het werken aan een project rond een wiskundig thema, liefst ook met inzet van de computer, wordt daarbij nadrukkelijk als een onderdeel van het schoolexamen gepresenteerd. Er is op dit punt echter weinig ervaring. Duidelijk is wel dat zulke thema's intrigerend, uitdagend en veelomvattend moeten zijn. Soms zullen ze te maken hebben met toepassingen buiten de wiskunde, maar dat is lang niet altijd nodig. In het eerste deel van het onderstaande artikel presenteren we ideeën voor een project voor de VWO-richtingen Natuur & Gezondheid en Natuur & Techniek. Ze zijn niet gericht op toepassingen, maar bevatten wel heel wat wiskundige en intellectuele uitdagingen. Ook geven ze gelegenheid tot het afsteken van computervuurwerk. In het tweede deel van het artikel zullen we ingaan op een aantal theoretische aspecten van het gebruikte wiskundige instrumentarium en op de vraag wat daaraan in de schoolpraktijk gedaan kan worden.

Een oud sommetje

We beginnen met een paar vingeroefeningen om het terrein wat te verkennen. Een sommetje uit de tijd dat er nog geen zakrekenmachines waren, luidt als volgt:

> Welk getal is groter, e^{π} of π^{e}?

Tegenwoordig is dat flauw: we toetsen die getallen direct in (de uitkomsten blijken verrassend dicht bij elkaar te liggen) en vinden zo het antwoord. Terzijde zij opgemerkt dat je natuurlijk toch de uitdaging kunt aannemen om de oplossing zonder elektronica te vinden, met alleen maar pen en papier. Veel geleerdheid is er niet voor nodig; met de voorkennis van VWO-wiskunde B en wat creativiteit moet het op een half A4-tje lukken.

Maar nu een wat moeilijker variant. We vervangen het getal e door een iets kleiner getal k. De precieze definitie van k stellen we nog even uit, maar wel geven we vast een flink aantal decimalen:

$$k = 2{,}382179087993018774555593 05252......$$

Voor alle praktische doeleinden zou dat voldoende moeten zijn. Het is echter geen praktische vraag die we stellen, maar een theoretische. En die luidt weer: welk getal is groter: k^{π} of π^{k}? Nu helpt de zakrekenmachine niet veel, want beide getallen komen binnen de beperkte rekencapaciteit ervan volledig overeen. Trouwens, hoe nauwkeurig is π op de zakrekenmachine?

Een computeralgebrapakket als DERIVE kan met veel meer cijfers achter de komma werken. Als je DERIVE met de opgegeven waarde van k in een stuk of veertig decimalen laat rekenen, blijkt dat k^{π} en π^{k} inderdaad verschrikkelijk dicht bij elkaar liggen: pas in de 29e decimaal treden er verschillen op. Dat is geen toeval; eigenlijk hebben we de lezer met onze vraag een beetje op het verkeerde been gezet. We hebben van k ook niet voor niets alleen maar een numerieke benadering gegeven. De precieze definitie van k kiezen we namelijk zo, dat de twee getallen k^{π} en π^{k} gelijk zijn. Niet bijna gelijk, maar exact gelijk. Waar we vooral in geïnteresseerd zijn, is de vraag of er eigenlijk wel zo'n k bestaat.
Met andere woorden, of de vergelijking

$$\pi^{x} = x^{\pi}$$

inderdaad een oplossing heeft die ongeveer gelijk is aan 2,38. De DERIVE-berekening met de gegeven numerieke 'benadering' van k geeft aanleiding tot het vermoeden dat er inderdaad zo'n k bestaat, maar dat is nog geen bewijs. Bovendien zijn er misschien nog meer oplossingen. Even rustig nadenken leert dat er in ieder geval een triviale oplossing is, namelijk $x = \pi$. Maar dat is blijkbaar niet de oplossing die we zoeken.

Uitdagende problemen

Met de bovenstaande vragen is de toon gezet voor een onderzoeksproject dat goede VWO-leerlingen voor allerlei interessante uitdagingen stelt. De instapvraag zou kunnen zijn: bepaal alle oplossingen van de vergelijking $\pi^{x} = x^{\pi}$. Die ziet er echter tamelijk ontoegankelijk uit. Kun je hem misschien tot een wat handzamer formaat omvormen?

(Tip: neem links en rechts de logaritme!) Brengt functieonderzoek je verder? Kun je *bewijzen* dat er naast π nog een andere oplossing k is? En hoe zou je k met elke gewenste precisie kunnen benaderen? De benadering van hierboven is met behulp van DERIVE gevonden. Hoe zou DERIVE dat doen?
Wil je nog verder gaan, dan kun je je vervolgens storten op de algemenere vergelijking

$$y^x = x^y$$

Om definitieproblemen te voorkomen (wat is bijvoorbeeld $(-e)^{\pi}$?) kun je je daarbij het beste beperken tot positieve waarden van x en y. Zo'n vergelijking stelt in het algemeen een 'kromme' voor in het vlak, hier dus een kromme in het eerste kwadrant. Hoe ziet die eruit? Allereerst zal de lijn $y = x$ er deel van uitmaken. Maar er zijn nog meer punten die voldoen, bijvoorbeeld $(x, y) = (2, 4)$, of $(x, y) = (4, 2)$. Of misschien het punt $(x, y) = (\pi, k)$, waarbij $k \approx 2{,}382179...$ het mysterieuze getal is waar het hierboven over ging. Hoe kunnen we een mooie grafiek krijgen van de gehele kromme?
Rond al deze vragen kun je een prachtig project opzetten waarin ook de computer een belangrijke rol speelt. Eigenlijk gaat het daarbij natuurlijk om het onderzoek van een functie van twee variabelen, namelijk de functie $f(x, y) = y^x - x^y$.

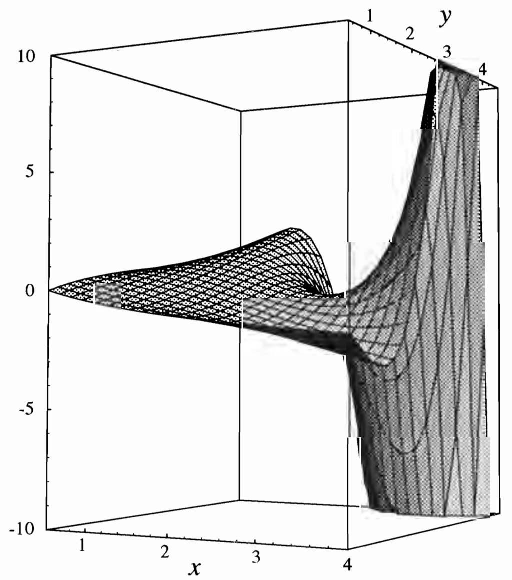


fig. 1 Een impressie van de grafiek van de functie $f(x, y) = y^x - x^y$

De moderne technologie stelt ons in staat van zulke functies indrukwekkende ruimtelijke grafieken te maken en realistische 'hoogtelijnenkaarten'. Niets is zo stimulerend als onderzoek dat ondersteund wordt door zelf geproduceerde computertekeningen. Figuur 1 geeft een impressie van de grafiek van $f(x, y)$ en figuur 2 toont de bijbehorende hoogtelijnenkaart. Beide kaarten zijn gemaakt met behulp van MATHEMATICA.
Heel fraai is het zadelpunt te zien dat zich bevindt bij – ik kan het niet laten om het te verklappen – het punt (e, e).

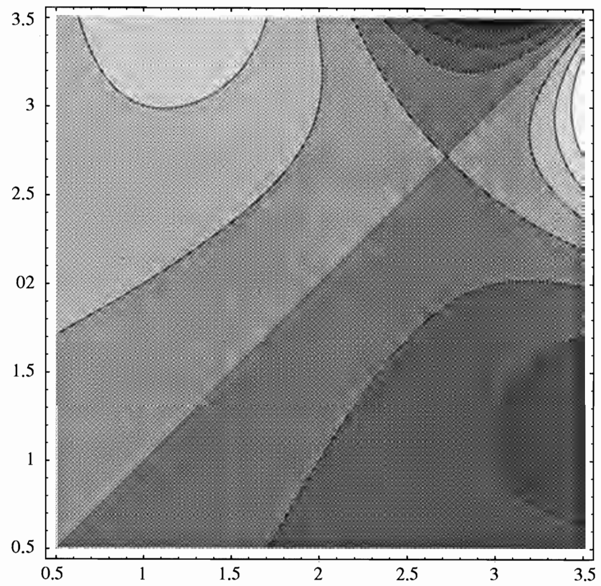


fig. 2 Enige niveaulijnen van de functie $f(x, y) = y^x - x^y$

De figuren laten natuurlijk slechts een beperkt deel van de grafiek zien. In figuur 1 en figuur 2 zijn x en y allebei groter dan 0,5 gehouden. Hoe zit het in de buurt van de x-as en de y-as en vlak bij de oorsprong? Waarom gebeuren er ongelukken als je daarvan computerplaatjes laat tekenen?
Wat maakt dit alles nu tot een uitdagend en stimulerend schoolproject? Concrete toepassingen zijn er nauwelijks, maar dat zal door leerlingen met een exacte belangstelling niet direct als een bezwaar worden gevoeld. Het draait uiteindelijk om een functie $f(x, y)$ met een eenvoudig functievoorschrift, maar met heel verrassende eigenschappen en een intrigerende grafiek. De intellectuele nieuwsgierigheid wordt er zeker door geprikkeld. Bij het onderzoek komen haast alle VWO-technieken uit de analyse om de hoek kijken. Machten, machtsfuncties, exponentiële functies, logaritmen, maxima, minima, limieten, differentiëren – het gehele repertoire speelt een rol. Computerprogramma's blijken een machtig hulpmiddel, maar soms vertonen ze kuren; ze kunnen zelfs op tilt slaan. Dat is allemaal heel leerzaam en ook heel goed te begrijpen als je je er voldoende in verdiept. En ook al zijn er misschien geen concrete toepassingen, als je zo'n project hebt gedaan, heb je heel veel geleerd van het wiskundige handwerk.

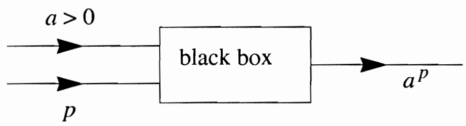
Wat is eigenlijk a^p?

Zo'n project raakt overigens wel aan een aantal fundamentele wiskundige kwesties die op school meestal onder tafel blijven. Misschien moeten ze daar in de klas ook maar blijven liggen, maar ik wil ze hier toch eens aan de orde stellen, juist omdat redeneren en deduceren in de schoolwiskunde weer een plaats moeten krijgen. Wat is daarbij dan aanbevelenswaardig en doenlijk?
De fundamentele kwesties waar ik op doel, hebben te ma-

ken met definities en existentievragen. We hebben het bijvoorbeeld gehad over uitdrukkingen als π^e en e^π, maar wat zijn dat eigenlijk voor getallen? Op de rekenmachine kun je slechts getallen intoetsen met een eindige precisie, en de uitkomsten zijn meestal ook slechts benaderingen. Benaderingen waarvan? Hoe is de 'machtsverheffing' a^p in het algemeen gedefinieerd?
Als de exponent p een natuurlijk getal is, is machtsverheffen gewoon herhaald vermenigvuldigen: a^5 is hetzelfde als $a \times a \times a \times a \times a$. Dat is dus geen probleem. Maar reeds bij worteltrekken, de inverse bewerking van kwadrateren, komen er wiskundige finesses om de hoek kijken. De verzameling van de rationale getallen blijkt dan te klein te zijn; er verschijnen wortels ten tonele die irrationaal zijn en iteratieve methoden om ze numeriek te benaderen. Toch blijft dit alles nog redelijk 'tastbaar': de meetkundige intuïtie geeft steun aan het idee dat zulke wortels corresponderen met punten op de getallenrechte. Bovendien geeft de grafiek van de functie x^2 je alle vertrouwen dat er bij elke $y \geq 0$ precies één $x \geq 0$ is met $y = x^2$. Langs dezelfde lijnen kunnen de n-de machtswortels worden ingevoerd en in het algemeen machten van de vorm a^p met p rationaal. Wel is het verstandig om steeds $a > 0$ te nemen, omdat je anders rationale getallen met even of oneven noemer moet onderscheiden. En zeker is het verstandig om $a > 0$ te nemen als je a^p wilt definiëren voor irrationale p. Dat gaat echter niet zo eenvoudig en elementair. Er zijn subtiele limietprocessen voor nodig, en daarmee betreden we eerst recht het terrein van de hogere wiskunde. Als je het goed wilt doen, moet je gebruik maken van monotonie-eigenschappen en op de hoogte zijn van de volledigheid van de reële getallen als een geordend getallenlichaam. Het is duidelijk dat die finesses thuishoren in de wiskundestudie op de universiteit en niet op school.
Maar toch kun je op school niet om de algemene machtsverheffing heen, al was het alleen maar omdat de exponentiële functies $x \rightarrow a^x$ en hun inverse functies, de logaritmische functies, voor alle analysetoepassingen van vitaal belang zijn. Ook de e-macht en de natuurlijke logaritme moeten op school behandeld worden. Daarbij gaat het natuurlijk niet alleen om hun definitie, maar vooral ook om hun eigenschappen.
Omdat een deductieve behandeling op school dus niet haalbaar is, moeten we daar een minder strenge opzet kiezen. Het is dan natuurlijk wel raadzaam zoveel mogelijk aansluiting te zoeken bij elementaire wiskundige voorkennis en misschien ook bij een aantal toepassingen. Zo kun je bijvoorbeeld exponentiële functies introduceren als wiskundige modellen van groeiprocessen. Over de didactische kanten van die zaak is al veel geschreven; ik wil daar thans niet op ingaan. Wel wil ik het hebben over het uiteindelijke doel dat het onderwijs hierbij bereiken moet, namelijk vertrouwdheid met machtsfuncties, exponentiële functies en logaritmische functies, en vaardigheid in het werken ermee. Die vaardigheid moet zo groot zijn, dat leerlingen projecten zoals ik die in het begin van dit artikel heb geschetst, zonder problemen kunnen uitvoeren. Het zal daarbij voor de leerlingen een grote steun zijn wanneer ze het bijbehorende wiskundige kennisdomein tegen het einde van hun schoolloopbaan in een overzichtelijk gestructureerde vorm paraat hebben. In het vervolg van dit artikel wil ik proberen daarvoor een aanzet te geven.

De black box benadering

De vraag hoe a^p precies gedefinieerd is, is dus weer onder het tapijt geveegd. Het is misschien het beste om er op school impliciet vanuit te gaan dat er een soort 'black box' is, een geïdealiseerde rekenmachine, die bij elk positief reëel getal a en elk reëel getal p een positief reëel getal a^p levert (het is een geïdealiseerde machine, want een echte rekenmachine of een computer levert alleen maar benaderingen). Dat computers en rekenmachines zulke benaderingen inderdaad zonder problemen geven, sterkt overigens natuurlijk wel het geloof in de 'wiskundige existentie' van zo'n ideale black box. Op de vraag hoe die black box in de hogere wiskunde nu echt gedefinieerd wordt, zal ik overigens verderop nog terugkomen.



Bij de gebruiksaanwijzing van de black box hoort een lijstje met eigenschappen. Hier is zo'n lijstje:

E1. Als $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, dan is $a^n = a \times a \times \ldots \times a$ (n maal)
E2. $a^0 = 1$
E3. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
E4. $(a^p)^q = a^{pq}$
E5. $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$
E6. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$
E7. $a^{-p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p = \frac{1}{a^p}$

Let wel: we hebben niet gepoogd een *minimaal* stel eigenschappen te geven. Als je wilt, kun je sommige van deze eigenschappen uit andere eigenschappen afleiden, maar de gebruikersvriendelijkheid neemt daardoor alleen maar af. Ook pretenderen we niet te zeggen dat deze lijst van eigenschappen de black box volledig karakteriseert. En evenmin zullen we proberen deze eigenschappen te *bewijzen*; dan zou immers eerst duidelijk moeten zijn van welke grondeigenschappen we uit kunnen gaan, en de problematiek die daarbij komt kijken, valt buiten het bestek van de schoolwiskunde. Het gaat dus uitsluitend om een 'werkinstrument', een overzicht van de eigenschappen die iedere gebruiker paraat moet hebben. Het bovenstaande lijstje voldoet aan die doelstelling.

Machtsfuncties

Als we het grondtal a variabel maken terwijl we de exponent p vasthouden, ontstaat de machtsfunctie

f_p: $x \rightarrow x^p$

met als domein de positieve reële getallen. In figuur 3 zijn de grafieken geschetst van de functies f_p voor $p = 0, 1, 2, 3, \frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$ en in figuur 4 staan de grafieken van f_p voor $p = -1, -2, -3, -\frac{1}{2}$ en $-\frac{1}{3}$.

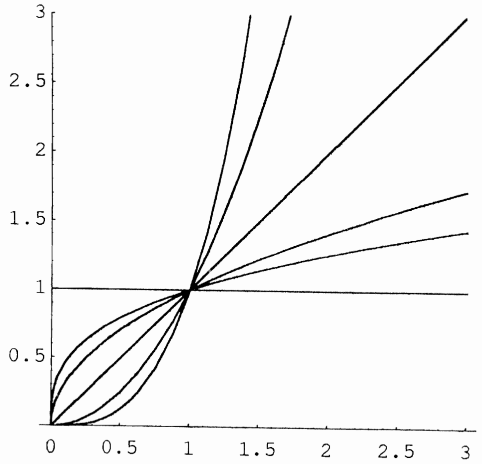


fig. 3 De functies $f_p(x) = x^p$ voor $p = 0, 1, 2, 3, \frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$

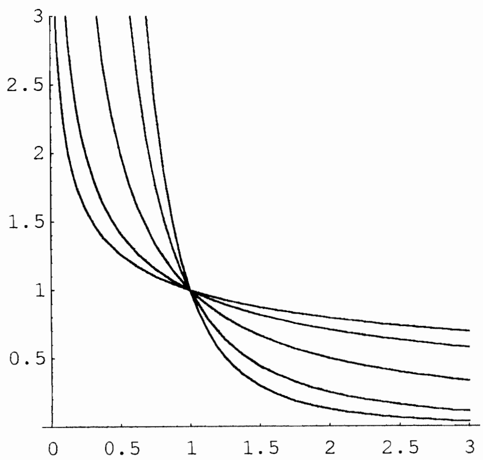


fig. 4 De functies $f_p(x) = x^p$ voor $p = -1, -2, -3, -\frac{1}{2}$ en $-\frac{1}{3}$

De grafieken illustreren dat het hier om differentieerbare functies gaat die monotoon stijgend zijn voor $p > 0$ en monotoon dalend voor $p < 0$. Een bewijs van deze eigenschappen voor willekeurige p valt overigens weer buiten de schoolpraktijk; je kunt het hoogstens aannemelijk maken.
Uit de grafieken blijkt verder dat de functies f_p en $f_{1/p}$ elkaars inverse zijn. Dit volgt ook direct uit eigenschap E4, maar het is toch nuttig om het nog een keer apart te vermelden in de volgende vorm:

E8. $y = x^p \Leftrightarrow x = y^{1/p}$.

Differentiëren van machtsfuncties gaat volgens de formule

E9. $(x^p)' = px^{p-1}$.

Exponentiële functies en logaritmen

Als we vervolgens juist de exponent variëren terwijl we het grondtal a vasthouden, krijgen we de exponentiële functie

g_a: $x \rightarrow a^x$.

In figuur 5 is de grafiek van g_a geschetst voor $a = 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, 1, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}$ en $\frac{1}{5}$.

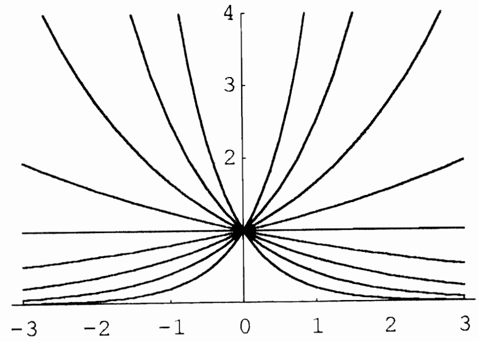


fig. 5 De functies a^x voor $a = 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, 1, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}$ en $\frac{1}{5}$

De grafieken illustreren dat het hier om differentieerbare functies gaat die monotoon stijgend zijn voor $a > 1$ en monotoon dalend voor $0 < a < 1$. Voor elke $a \neq 1$ is er dus een *inverse functie*, de *logaritme met grondtal a*. De bijbehorende grafieken staan in figuur 6.

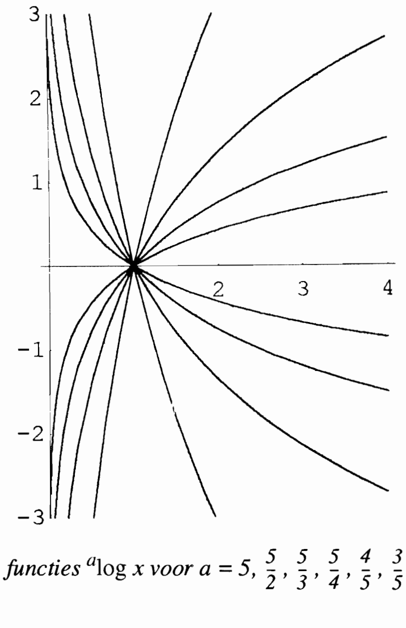


fig. 6 De functies ${}^a\log x$ voor $a = 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}$ en $\frac{1}{5}$

De belangrijkste eigenschappen van de logaritme zijn:

E10. $y = a^x \Leftrightarrow x = {}^a\log y$
E11. ${}^a\log uv = {}^a\log u + {}^a\log v$
E12. ${}^a\log u^v = v \cdot {}^a\log u$
E13. ${}^a\log u = \dfrac{{}^b\log u}{{}^b\log a}$
E14. ${}^a\log 1 = 0, {}^a\log a = 1$

De e-macht en de natuurlijke logaritme

Er zijn veel manieren om de functies e^x en $\ln x$ te definiëren. De ene functie is de inverse van de andere en het is dus voldoende om slechts één van beide functies 'netjes' in te voeren; de ander ligt dan ook volledig vast. Dat kan bijvoorbeeld door het getal e te definiëren met behulp van een limiet. De belangrijkste eigenschap van de functie e^x is echter het feit dat die functie gelijk is aan z'n eigen afgeleide, en het 'bewijzen' (of het aannemelijk maken) daarvan is dan nog een heel karwei. Een andere 'intuïtieve' manier gaat juist uit van die afgeleide-eigenschap, waarna aannemelijk gemaakt moet worden dat het echt een exponentiële functie is. Wiskundig bevredigend kan dat allemaal nooit zijn, juist omdat je op school de finesses niet kunt behandelen.
Trouwens, in de 'hogere wiskunde' gaat het heel anders. Daar wordt e^x niet gedefinieerd met behulp van de algemene macht a^x, maar juist andersom: de algemene macht wordt gedefinieerd in termen van de e-macht en de natuurlijke logaritme. Er zijn daarbij twee stromingen: de ene gaat uit van een machtreeksdefinitie van de e-macht (zie bijvoorbeeld Rudin (1976), p. 178 e.v.) en de andere begint juist met de natuurlijke logaritme, die dan gedefinieerd wordt met behulp van een integraal:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

(zie bijvoorbeeld Spivak (1980), p. 313 e.v.).
Wanneer op zo'n manier de e-macht en de natuurlijke logaritme eenmaal netjes zijn ingevoerd, compleet met hun belangrijkste eigenschappen (inclusief hun afgeleiden), is een nette definitie van de algemene macht a^p geen probleem meer. Men definieert eenvoudig:

$$a^p = e^{p \ln a}$$

waarna alle eigenschappen van machten en logaritmen die we hierboven hebben opgesomd, gemakkelijk kunnen worden bewezen. Dit is opnieuw een reden om niet te veel scrupules te hebben bij de intuïtieve invoering op school van deze twee standaardfuncties. Er zijn daarvoor tal van manieren in omloop, allemaal met hun eigen didactische kwaliteiten en moeilijkheden. Ook dat laat ik hier buiten beschouwing. Maar hoe je het ook aanpakt, op een gegeven moment moeten de volgende eigenschappen op papier verschijnen:

E15. $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$
E16. $(e^x)' = e^x$
E17. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
E18. $(a^x)' = a^x \ln a$
E19. $({}^a\log x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

De numerieke waarde van e speelt bij dit alles eigenlijk nauwelijks een rol; trouwens, iedere fatsoenlijke rekenmachine heeft aparte knoppen voor de e-macht en de natuurlijke logaritme, dus indien gewenst kunnen numerieke waarden op commando worden geproduceerd. De eigenschappen E16 en E17, daar draait het in de praktijk van de analyse en de toepassingen altijd om.

Toch redeneren en deduceren?

Een lijst van bijna twintig eigenschappen en vier plaatjes met grafieken. Dat zou de harde kern, de 'formulekaart', kunnen zijn van wat je als VWO-er moet weten van machten, machtsfuncties, exponentiële functies en logaritmen. Moet je ook inzicht hebben in de onderlinge relaties tussen en de bewijzen van die eigenschappen? Een leraar moet die kennis natuurlijk wel paraat hebben en het zal van zijn didactische kwaliteiten afhangen wat hij ervan in de klas laat zien. Maar een leerling hoeft zulke deductieve relaties en structuren niet te beheersen. Sterker nog, hij kan ze niet allemaal beheersen, want de fundamenten ervan vallen buiten de schoolwiskunde. Toch kan redeneren en deduceren wel degelijk een prominente plaats krijgen in het wiskundeonderwijs, ook in de analyse. De basiseigenschappen kunnen dan wel niet strikt bewezen worden, een leraar kan ze wel aannemelijk en aanvaardbaar maken, waarna ze als uitgangspunt kunnen dienen voor verder onderzoek. Dat kan vervolgens wèl deductieve elementen bevatten: uitgaande van de basiseigenschappen kunnen alle verdere resultaten echt bewezen worden.
Zo kan de leerling er toch van overtuigd worden dat het in de wiskunde niet gaat om door autoriteiten opgelegde dogma's, maar om onderzoeksresultaten die je zelf kunt afleiden en verantwoorden. De ideeën voor een schoolproject die we in het eerste deel van dit artikel hebben gepresenteerd, geven een indruk van hoe zoiets in de praktijk zou kunnen worden gerealiseerd.

Literatuur

Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis.* 3rd ed. McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo. ISBN 0-07-085613-3

Spivak, Michael (1980). *Calculus.* 2nd ed. Publish or Perish, Berkeley. ISBN 0-914098-77-2