

Het calculator concours

P. Drijvers

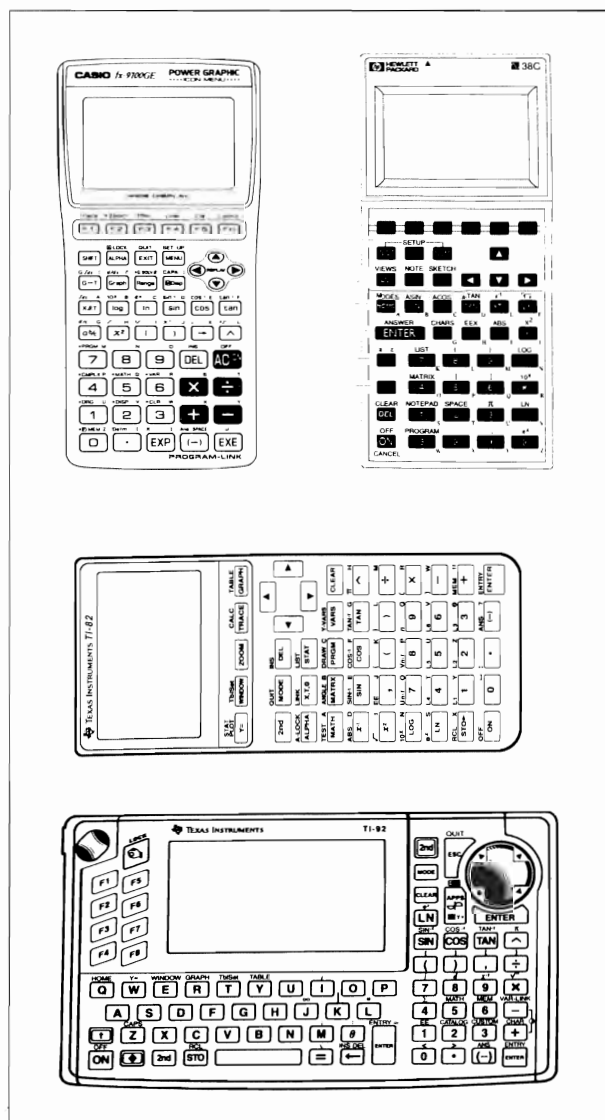
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

Inleiding

Zoals u ongetwijfeld weet, heeft de Vakontwikkelgroep Wiskunde in de loop van 1995 nieuwe examenprogramma's voor de geprofileerde tweede fase opgesteld. Onderdeel van deze plannen is het verplicht stellen van de grafische rekenmachine voor alle profielen van HAVO en vwo. Een citaat (zie [1], p. 10): 'Op het CE dient de leerling te beschikken over een grafische rekenmachine.' Hoewel niet geheel onomstreden (zie [2] en [3]), ziet het er naar uit dat dit voorstel werkelijkheid gaat worden. Aangenomen dat de profilering in 1998 in zal gaan, betekent dit voor de scholen, dat men zich over ruim een jaar over de praktische en organisatorische kant van deze kwestie zal moeten buigen. Dat roept een aantal vragen op. Bijvoorbeeld: zorgt de leerling zelf voor een grafische calculator, of doet de school dat middels centrale inkoop? Stelt de school één bepaald merk en type verplicht, of ligt de keuze hiervan bij de leerling? Is het een goed idee om de rekenmachine in het boekenfonds mee te nemen? In de klaspraktijk is het waarschijnlijk wel erg handig als alle leerlingen over een zelfde machine beschikken. De vraag is dan natuurlijk: welke machine wordt 'uitverkoren', en welke criteria spelen daarbij een rol?

Vooruitlopend op deze vragen zet ik in dit artikel drie verschillende grafische rekenmachines van de bekendste merken naast elkaar. Het doel van deze vergelijking is niet zozeer om te komen tot een uitverkiezing van de ideale machine. Evenmin gaat het om een waterdicht, objectief en volledig onderzoek. Daar komt bij dat de uitslag snel verouderd zou zijn, omdat nieuwe modellen elkaar in hoog tempo opvolgen. Nee, de bedoeling is veeleer dat de lezer door deze vergelijking een indruk krijgt van wat men van een grafische rekenmachine kan verwachten en hoe men een dergelijk apparaat zou kunnen beoordelen. Als invalshoek kies ik hierbij niet voor het onderzoeken van de meest geavanceerde mogelijkheden of de ingewikkeldste opties, maar voor de elementaire, meest gebruikte toepassingen zoals het gewone rekenwerk, het maken van grafieken en tabellen en het werken met matrices. De vraag, die in dit verhaal centraal staat, luidt:

hoe doeltreffend en eenvoudig kan een leerling deze basishandelingen met de verschillende machines uitvoeren? Hoewel er dus geen sprake is van een consumententest of een songfestival, kan ik het niet laten om toch wat spanning te suggereren. Vandaar de titel: het calculator concours.



De kandidaten

Ik stel de kandidaten even aan u voor. Op de vorige pagina ziet u de FX-9700GE van Casio, de HP38G van Hewlett Packard, de TI-82 van Texas Instruments en ten slotte, als buitenbeentje, de TI-92 van dezelfde fabrikant. De eerste twee van dit rijtje kort ik af tot 'de Casio', respectievelijk 'de HP'. Casio heeft nog een recentere machine, de CFX-9850G, die is uitgerust met een kleurenscherm. Omdat ik deze schermen niet in dit artikel kan opnemen, gebruik ik de FX-9700GE, die al wat langer op de markt is. De HP38G werkt, in tegenstelling tot andere machines die Hewlett Packard geproduceerd heeft, met de gewone invoervolgorde: $3+5$ en niet $3, 5, +$. Als derde machine bekijk ik de TI-83, de opvolger van de TI-81 en de TI-82, de machines die het Freudenthal instituut de afgelopen jaren bij schoolexperimenten heeft gebruikt (zie [4] en [5]). Omdat van het front van de TI-83 (vanaf nu 'de TI') nog geen afbeelding beschikbaar is, is de TI-82 afgebeeld.

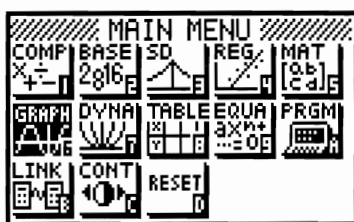
Op deze drie recent verschenen grafische rekenmachines, de Casio FX-9700GE, de HP38G en de TI-83, concentreert zich mijn vergelijking.

De TI-92 wordt verderop apart besproken.

Zoals u ziet, hebben de drie grafische rekenmachines veel van elkaar weg. De toetsenborden hebben een vergelijkbare opbouw. De schermpjes zijn ongeveer even groot, al is dat van de TI-83 wat vierkanter dan de andere en wordt het bovendien wat effectiever benut. Het scherm van de Casio spiegelt wat meer dan de andere twee.

Rekenen

Als ik de machines aanzet, springt meteen een verschil in het oog. De HP en de TI openen met het scherm dat in beeld was toen de machine de vorige keer werd uitgezet. De Casio echter geeft het onderstaande hoofdmenu, dat bestaat uit iconen die de belangrijkste toepassingen voorstellen. Ziet er mooi uit, al moet je natuurlijk wel eerst een optie kiezen voor je verder kunt.

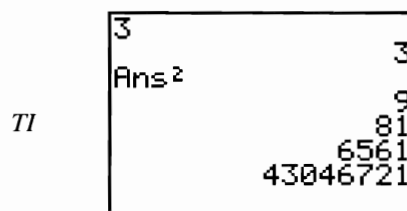
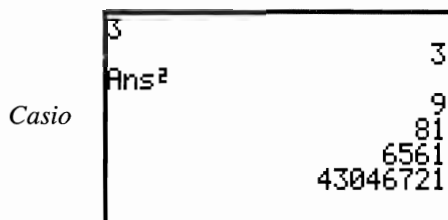


Op alle drie machines bereken ik $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$. Op de HP moet ik daartoe eerst de machine instellen op rekenen met breuken en dat vraagt toch al gauw een zevental extra toetsaanslagen. De Casio heeft een breukentoets op het toetsenbord en op de TI moet ik (met twee toetsaanslagen) een optie uit het MATH-menu kiezen.

Nu een gemeen sommetje: $10^{13} + 1 - 10^{13}$. De TI en de HP geven 0 als antwoord, terwijl de Casio terecht vindt dat er 1 uitkomt. Bij een exponent van 14 in plaats van 13

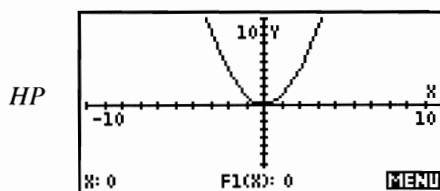
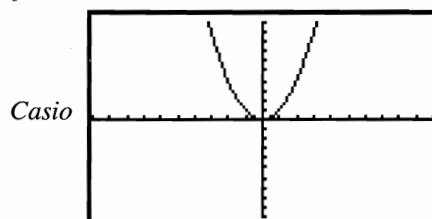
houdt het ook voor de Casio op. Kennelijk neemt deze machine in de berekeningen één decimaal meer mee dan de andere twee.

Een Ans-knop hebben alle drie apparaten. Daarmee wordt het antwoord van de laatste berekening opgeroepen en dat maakt het herhalen van een bewerking eenvoudig. Hieronder wordt steeds eerst het getal 3 ingevoerd en vervolgens met ENTER herhaald gekwadeerd. Zoals u ziet, bevat het rekenscherm van de HP minder regels dan de andere twee.

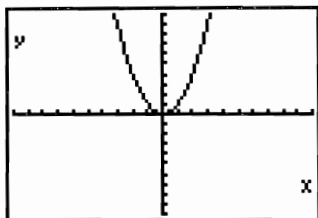


Grafieken

Elk van de drie machines beschikt over een lijstje, zeg maar een functiebestand, waarin functievoorschriften kunnen worden ingevoerd. Waarom weet ik niet, maar ik wil altijd eerst een parabool zien. Ik open het functiebestand en voer dus x^2 in (aantal toetsaanslagen: Casio 4, HP 4, TI 3) en laat in het standaardvenster van $[-10, 10]$ bij $[-10, 10]$ de grafieken tekenen. Dat geeft de volgende plaatjes.



TI

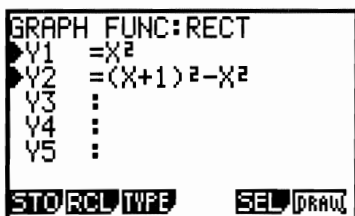


Ik zie niet veel verschil in de kwaliteit van de grafieken. De resolutie lijkt vergelijkbaar te zijn. De Casio zet geen labels bij de assen. Aardig is dat op de HP ook getallen bij de assen staan.

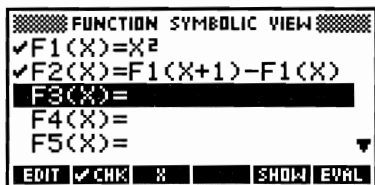
Generieke functies

Met het oog op het onderwerp Discrete Analyse in de toekomstige V4 wil ik nu graag de verschilfunctie invoeren. Op de Casio voer ik daartoe in: $(x + 1)^2 - x^2$. Dat vraagt 12 toetsaanslagen. Op de HP en de TI doe ik het iets ingewikkelder, wat ook meer werk is (HP 21 toetsaanslagen, TI 18).

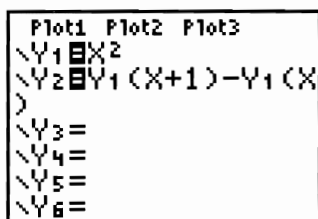
Casio



HP



TI

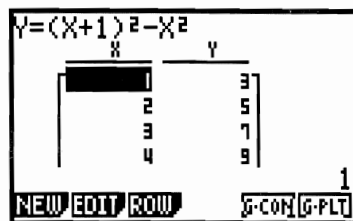


Op de HP en de TI verwijs ik in de definitie van de tweede functie naar de eerste. Dit heeft het voordeel, dat de tweede mee verandert op het moment dat ik de eerste wijzig. Op deze manier is de tweede functie *in het algemeen* de verschilfunctie van de eerste. Dat vereenvoudigt het onderzoeken van verschilfuncties van andere functies. Een dergelijke generieke definitie is vaak handig. Op de Casio werkt dit niet, omdat deze machine $Y1(X+1)$ opvat als het produkt van $Y1$ en $(X+1)$, en niet $(X+1)$ als argument van $Y1$ beschouwt. De HP biedt hier overigens een keuze: door met de optie EVAL de tweede functie te evalueren, wordt $F2(x)$ gelijk aan $(x + 1)^2 - x^2$ en is niet meer generiek. Een vorm van substitutie dus.

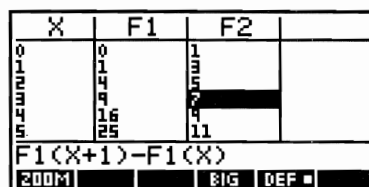
Tabellen

Nu zou ik weer grafieken kunnen laten tekenen, maar een tabel van de verschilfunctie is in dit verband wel zo aardig.

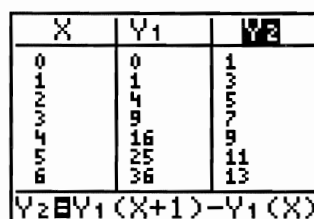
Casio



HP



TI



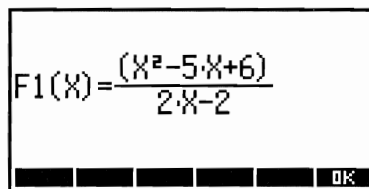
Op de Casio moet ik eerst in het TABLE-venster aangeven van welke functie ik een tabel wil. Verder krijg ik slechts twee kolommen en vier regels in beeld. Op de HP en de TI is de tabel iets eenvoudiger te genereren, en krijg ik bovendien meer kolommen. Wat opvalt, is dat de tabel van de TI-83 groter is dan de twee andere.

Functieonderzoek

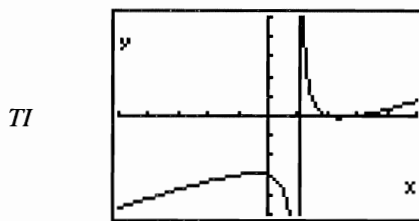
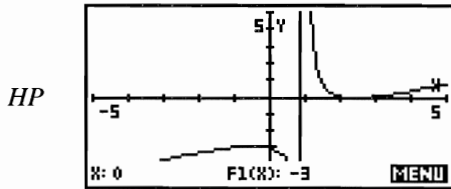
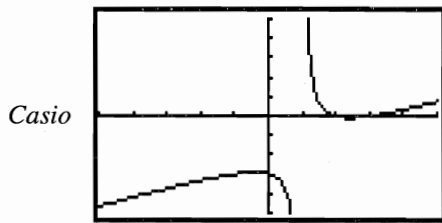
In hoeverre kan de grafische rekenmachine ondersteuning bieden bij het onderzoeken van een functie? Neem bijvoorbeeld de functie f op $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ gegeven door

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x - 2}$$

Eerst maar even het functievoorschrift invoeren. De HP biedt dan nog een aardige mogelijkheid: de formule kan 'tweedimensionaal' worden weergegeven:



Hieronder staan de drie grafieken, getekend op een kijkvenster van $[-5, 5]$ bij $[-5, 5]$. Wat opvalt, is dat de teken snelheid verschilt: de Casio tekent sneller dan de TI, die op zijn beurt weer de HP in tempo verslaat. In het algemeen vind ik de HP wat langzaam.



De Casio tekent, zoals u ziet, geen verticale asymptoot waar de twee andere dat wel doen. Bij de Casio en de TI hangt dat overigens af van de instelling van het kijkvenster; bij een andere keuze kan het gebeuren dat de verticale asymptoot weer wel of juist niet verschijnt. De HP tekent deze altijd, tenzij de machine wordt ingesteld op 'puntsgewijs' in plaats van 'verbonden' tekenen. Eerder (zie [6]) heb ik beschreven hoe dat bij leerlingen aanleiding kan geven tot een verkeerd beeld van de grafiek. De HP schakelt meteen de TRACE-modus in, zodat de cursor over de grafiek loopt en de coördinaten af te lezen zijn. Bij de Casio en de TI gebeurt dat na een druk op de geschikte knop.

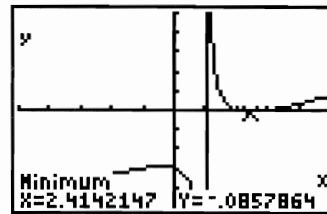
Hoe de grafiek zich gedraagt in de buurt van de nulpunten, is niet zo goed te zien. Natuurlijk zou ik nu kunnen uitvergroten, maar dat laat ik even voor wat het is.

In plaats daarvan ga ik op zoek naar de nulpunten. Op de drie machines zitten procedures om deze numeriek te benaderen. Op de Casio gaat dat met slechts 3 toetsaanslagen heel mooi: de cursor loopt over de grafiek tot een nulpunt (in dit geval (2, 0)) bereikt wordt, en loopt desgewenst daarna weer verder naar een eventueel volgend nulpunt (hier (2.9999999, 0) in plaats van (3, 0)). De TI vraagt wat meer (8) toetsaanslagen, omdat eerst aangegeven moet worden op welk interval het nulpunt gezocht dient te worden. Het resultaat wordt hier wel op een geheel getal afgerond. De HP doet iets vreemds. Op het moment dat het zoeken naar nulpunten gestart wordt, bevindt de TRACE-cursor zich links van de verticale asymptoot. Daarom vindt de machine (na 3 toetsaanslagen) geen nulpunt, maar geeft de coördinaten van het punt het dichtst bij de x-as, dus van het maximum. Als eerst de

cursor naar de andere tak van de grafiek wordt verplaatst, gaat het wel goed.

Extremen

Bij een functieonderzoek hoort traditioneel het bepalen van extremen. Net als de nulpunten kunnen die benaderd worden. Als ik bijvoorbeeld het minimum zoek, geeft de TI na 8 toetsaanslagen:



Bij de HP speelt weer hetzelfde als bij de nulpunten: afhankelijk van de positie van de cursor wordt het minimum of het maximum gevonden. De Casio werkt ongeveer zoals de TI, al kan weer met minder (3) toetsaanslagen volstaan worden.

De resultaten op de drie machines:

Casio:	2.4142135892	-0.0857864376
HP:	2.4142135	-0.085786
TI:	2.4142123	-0.0857864

De Casio geeft de meeste decimalen. Verderop kom ik nog op deze waarden terug.

De HP heeft nog een extraatje in dit verband: de machine kan ook 'echt' differentiëren. Het vereist wat typewerk (17 aanslagen!), maar het resultaat in tweedimensionale voorstelling ser ook naar:

$$\frac{(2x-5)(x^2-5x+6) \cdot 2}{2x-2} \cdot \frac{1}{(2x-2)^2}$$

Dit stijgt uit boven numerieke rekenwerk en het tekenen van grafieken; dit is het begin van computeralgebra. De TI-92 heeft in dit opzicht nog meer te bieden, zoals u verderop kunt lezen.

Matrices

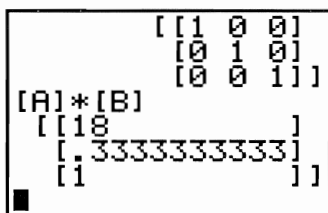
Laat ik ook aan de toekomstige leerlingen van de maatschappij-profielen denken en als laatste naar matrices kijken. Het werken met matrices heeft het gevaar in zich, om te ontaarden in grote rekenpartijen. Wat hebben de grafische rekenmachines op dit terrein te bieden?

Neem bijvoorbeeld de populatie-voorspellingsmatrix

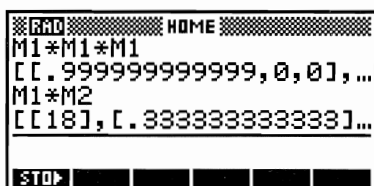
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \text{ en de vector } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Van de matrix wil ik graag de derde macht berekenen en bovendien het produkt met de vector.

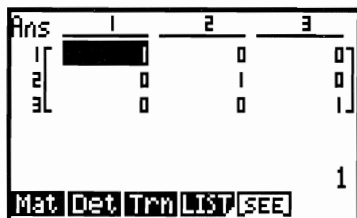
Op de TI-83 laat de matrix zich in een spreadsheet-achtige interface in zo'n 30 toetsaanslagen invoeren. Met 5 aanslagen krijg ik dan de derde macht, en dat blijkt de eenheidsmatrix te zijn. Na invoer van de vector kan ik het produkt berekenen. Desgewenst kan 0.3333333333 ook weer als breuk geschreven worden.



Op de HP verloopt het proces analoog. Na 18 toetsaanslagen is de matrix onder de naam M1 ingevoerd. Het berekenen van de derde macht valt wat tegen: ik moet M1*M1*M1 intypen in plaats van M1^3. Dat vereist 12 aanslagen. Zeker als de macht nog hoger zou zijn, is dit lastig, al biedt het werken met de kwadraattoets of met Ans nog wel binnenbochten. De uitkomst wordt niet tweedimensionaal weergegeven, maar in rij-vorm. Daar komt bij, dat het eerste getal eigenlijk niet 0.9999999999 is, maar 1. Bij het produkt van matrix en vector is de uitkomst eveneens slecht leesbaar.



Op de Casio heb ik 32 aanslagen nodig om de matrix in te voeren. Ook hier moet ik de derde macht invoeren als MatA*MatA*MatA. Dat vraagt 12 toetsaanslagen. De Casio maakt geen afrondfout.



Al met al kan de grafische rekenmachine het rekenen met matrices aanmerkelijk vereenvoudigen.

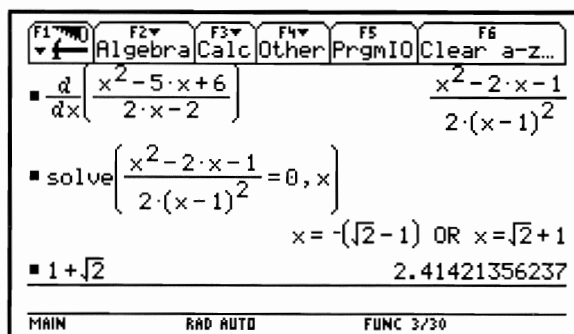
Intermezzo: de TI-92

De jury trekt zich nu terug voor haar beraadslagingen. Een geschikt moment voor de TI-92 om zich, bij wijze van intermezzo, 'hors concours' te presenteren.

De TI-92, in 1995 door Texas Instruments geïntroduceerd, is wat groter dan de tot zover besproken machines. Net als een grafische rekenmachine kan de TI-92 grafieken tekenen, tabellen maken en nulpunten, extremen, afgeleiden en oppervlakten benaderen.

Maar er is meer. De TI-92 kan ook symbolisch rekenen, omdat de kern van het computeralgebrapakket DERIVE is geïmplementeerd. Daarmee kan men onder andere vergelijkingen exact oplossen, afgeleide en primitieve functies bepalen en formules manipuleren.

Neem bijvoorbeeld het functieonderzoek, dat hierboven aan de orde kwam.



Zoals u ziet, geeft de TI-92 netjes $1 + \sqrt{2}$ en $1 - \sqrt{2}$ als nulpunten van de afgeleide. De machine is het niet helemaal eens met de Casio over de decimalen van de x -coördinaat van het minimum...

De algebraïsche mogelijkheden van de TI-92 zijn erg uitgebreid en ook erg gebruikersvriendelijk geïmplementeerd. Daarnaast is de TI-92 door de aanwezigheid van Cabri geschikt voor interactieve meetkunde. Cabri maakt meetkundige constructies van bijvoorbeeld loodlijnen, deellijnen en doorsneden mogelijk. Tevens kan de positie van een meetkundig object gevarieerd worden, waarbij alle hiervan afhankelijke objecten 'meelopen'. Dit maakt Cabri tot een krachtig hulpmiddel voor het onderzoeken van meetkundige wetmatigheden. De cursorbesturing vindt bij Cabri op de TI-92 plaats met een ronde knop, waarmee de cursor in acht richtingen bewogen kan worden. Op de meetkundige mogelijkheden van de TI-92 ga ik hier niet verder in.

Het feit dat een handzame, draagbare machine zo veel relevante mogelijkheden biedt, maakt de TI-92 tot een interessant fenomeen. In de praktijk lijkt de machine goed te bevallen (zie [7]). De trend voor de toekomst?

Conclusies

Dan nadert nu het 'uur der waarheid'. Hoe komen de Casio FX-9700GE, de HP38G en de TI-83 uit de onderlinge

vergelijking naar voren? Op dit moment hoor ik natuurlijk te zeggen, dat het alledrie goede machines zijn en dat de jury het erg moeilijk heeft gehad.

Onderstaande tabel geeft een overzicht van de bevindingen.

	Casio FX-9700GE	HP 38G	TI-83
Rekenen	+++	+	++
Grafieken	++	++	++
Tabellen	+	++	+++
Formules	+	+++	++
Matrices	++	+	+++

Op grafisch gebied zijn de verschillen minimaal en heffen de voor- en nadelen van de verschillende machines elkaar naar mijn mening op. Bij het rekenwerk heeft de Casio het voordeel van het eenvoudig rekenen met breuken en de grotere nauwkeurigheid. Bij tabellen en matrices geeft de duidelijke presentatie van de TI-83 in mijn ogen de doorslag. Op het gebied van formules biedt de HP de meeste mogelijkheden met onder meer de tweedimensionale representatie en de keuze tussen al dan niet generieke definities.

Ten aanzien van de gebruikersvriendelijkheid wil ik geen conclusie trekken. Het aantal toetsaanslagen wijst niet in de richting van één duidelijke winnaar. Verder ben ik zelf vooral vertrouwd met de TI-83, wat een eerlijke vergelijking waarschijnlijk in de weg staat. Oordeelt u zelf maar! Laat ik besluiten met het herhalen van het voorbehoud aan het begin van dit artikel: het gaat niet om een volledig onderzoek. Statistische mogelijkheden zijn er bijvoor-

beeld niet in betrokken. Een andere keuze van de voorbeelden had wellicht tot iets andere bevindingen geleid. Niettemin geeft dit verhaal hopelijk een handvat om te zijner tijd zelf een grafische rekenmachine aan een kritische beoordeling te onderwerpen.

Literatuur

- [1] Vakontwikkelgroep Wiskunde (1995). *Advies Examenprogramma's havo/vwo*. SLO, Enschede.
- [2] Giessen, C.J. van de (1996). 'Bezwaren tegen de invoering van de grafische rekenmachine.' *Euclides*, 71(3), pp. 85-86.
- [3] Drijvers, P. (1996). 'IT = GR + PC.' *Euclides*, 71(5), pp. 162-163.
- [4] Drijvers, P. en M. Kindt (1995). 'Analyse in profiel.' *Nieuwe Wiskrant*, 15(2), pp. 4-9.
- [5] Doorman, L.M., P. Drijvers en M. Kindt (1994). *De grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs*. Freudenthal instituut, Utrecht.
- [6] Drijvers, P. (1995). 'Neem de grafiek over ...' *Nieuwe Wiskrant*, 14(4), pp. 29-35.
- [7] Drijvers, P. (1996). *Oude liefde roest niet*. In druk.

Adressen

- Importeur Casio:
Rotring Benelux, Postbus 50076
1305 AB Almere-Haven, tel. 036-5471777
- Leverancier Hewlett Packard:
Midas Adviesbureau, Zeven Bosjes 17
7609 BJ Almelo, tel. 0546-827948
- Importeur Texas Instruments:
Texas Instruments Benelux, Postbus 74781
1070 BT Amsterdam, tel. 020-5469820

Reactie

Jammer dat P. Drijvers niet op mijn verzoek inging om eventueel onder zijn supervisie de machines te laten vergelijken door specialisten van ieder merk, hetgeen een objectiever beeld zou hebben gegeven dan we nu krijgen ('Verder ben ik zelf vertrouwd met de TI-83, wat een eerlijker vergelijking waarschijnlijk in de weg staat').

Verder schrijft hij 'Het gaat erom dat men een indruk krijgt van wat men van een grafische rekenmachine kan verwachten...' en 'Als invalshoek kies ik hierbij niet voor het onderzoeken van de meest geavanceerde mogelijkheden of de ingewikkeldste opties...'

Door het weglaten van ApLets uit zijn verhaal kiest hij juist voor de ingewikkeldste weg. (ApLet betekent Ani-

mated Personal Learning Tool). ApLets zijn ontwikkeld in samenwerking met vele wiskundedocenten die behoefte hadden aan gebruikersvriendelijkheid en gemak. Door het weglaten van de ApLets heeft hij feitelijk de HP38G helemaal niet vergeleken met de andere machines en in dat licht bezien doet zijn opmerking 'Oordeelt u zelf maar' nogal vreemd aan.

Toch vind ik dat u inderdaad maar zelf moet oordelen. U kunt hiertoe twee weken lang experimenteren met een koffer HP38G's. Inlichtingen kunt u hierover inwinnen bij ondergetekende.

Joost van 't Spijker, tel. 0546-827 948