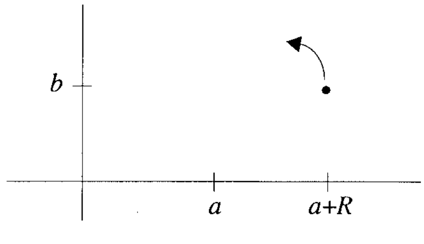
Uitdagende bewegingen

L.M. Doorman
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

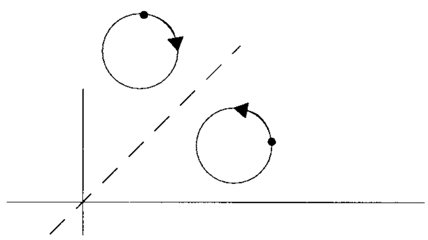
Concrete gonio, zo zou je het vierde analysepakket kunnen noemen dat ontwikkeld is binnen het PROFI-project[1]. In het nieuwe wiskundeprogramma voor de twee β-profielen voor het VWO worden contexten en gebruik van technologie geïntegreerd. Het zijn middelen om wiskunde concreter te maken en om leerlingen bij het bedrijven van wiskunde te betrekken (zie hiervoor ook het artikel van Kemme en Wijers in de vorige Nieuwe Wiskrant). Het PROFI-project heeft er inmiddels bijna een schooljaar opzitten. Op dit moment werken de leerlingen op de twee proefscholen met deel vier van differentiaal- en integraalrekening: periodieke bewegingen. De leerlingen zijn bezig met goniometrie in concrete situaties.
Een grafiekenprogramma is een middel om de bewegingen concreet te maken en te experimenteren met verschillende parameters. Hierbij is niet alleen het uiteindelijke plaatje belangrijk, maar ook het ontstaan daarvan met (mogelijk) variërende tekensnelheden. Dankzij de grafische rekenmachine zijn we op dit moment in staat om te experimenteren met leerstof waarbij dergelijke technologie geïntegreerd is. Hieronder volgt het verslag van een les op het Cals College te Nieuwegein. Opmerkelijk in deze les is, hoe leerlingen omgaan met hun grafische rekenmachine en hoe ze bij de wiskunde betrokken raken.

De les

Inmiddels weten de leerlingen dat de parametervoorstelling ($\cos t$, $\sin t$) een cirkelbeweging beschrijft. Paul Thiel, hun docent, schrijft nu de parametervoorstelling ($a + R\cos(\omega \cdot t)$, $b + R\sin(\omega \cdot t)$) op het bord en vraagt aan de klas: 'Hoe kun je erachter komen waar hij begint en wat de draairichting is?'
Na een korte discussie staat de volgende tekening op het bord:



Paul: 'We kunnen ook de sinus voor x gebruiken en kijken hoe dan de beweging verloopt. De y hoeft niet altijd de sinus te zijn en de x niet altijd de cosinus. Het is maar hoe je tegen de beweging aankijkt.'
Hij verwisselt sin en cos: 'Hoe zal de beweging nu gaan?'
Het verklaren vanuit de formule boeit de leerlingen. Het startpunt (a, $b+R$) wordt gevonden; nu de draairichting.
'Die zal wel hetzelfde zijn', zegt Paul alsof het vanzelfsprekend is, 'dat moeten we dan alleen nog even aantonen. Wat gebeurt er met x als t groter wordt?'
Ze beredeneren dat x groter wordt. 'Hé, maar dan gaat hij de andere kant op...' roept een leerling.
Paul: 'Hoe kunnen we dat verklaren, wat hebben we eigenlijk gedaan? We hebben x en y verwisseld, waar doet dat aan denken?'
Leerling: 'Inverse...'
Paul tekent op het bord:



Paul: 'Ja natuurlijk, dan begrijp ik ook waarom hij de andere kant op moet draaien.'
Leerling: 'Dit is allemaal wel leuk, maar wat moet je met die draairichting? Waarom doen we dit?'
Paul: 'Ga niet leren welke kant hij op draait als sinus bij de x staat en cosinus bij de y, of omgekeerd. Maar probeer het type redenering te beheersen, zodat je zelf kunt onderzoeken wat de beweging is die bij de formule hoort. Wat zou je bijvoorbeeld krijgen bij ($a + \cos(\omega \cdot t)$, $b + 2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$)?'
Dezelfde leerling: 'Chaos!'
Paul: 'Onderzoek het eens. Waar zou je beginnen?'
Leerling: 'Het startpunt.'
Paul: 'Ok, als op een repetitie de vraag komt: 'onderzoek...', dan zou je zo kunnen beginnen:

startpunt...'

Als drie punten van de kromme op het bord staan, roept een leerling: 'Dat wordt een ei man!'

Een andere aarzelend: 'Een kwart cirkel...'

Paul: 'Het heeft met een cirkel te maken.'

Leerling: 'Het is een ei!'

Paul: 'Maar wel een heel mooi ei, dat heet een ellips.'

Tussendoor

Merkwaardig, niemand tikt even op de grafische rekenmachine een vergelijking in om de beweging te bekijken. De vorige lessen is dat regelmatig gebeurd. Een waterrad was de context en met de grafische rekenmachine werden bewegingen en formules geëxploreerd. Kan iedereen zich nu al die bewegingen voorstellen?

Een ander punt is de sfeer in de klas. Het is een klas met dertig leerlingen, desondanks doet vrijwel iedereen mee. Dit is zeker niet altijd het geval. Het komt vaak voor dat een groot deel van de klas zelf verder werkt. Deze les echter niet, het gesprek blijft niet beperkt tot een paar geïnteresseerden. Het is een klassegesprek. Is dit toevallig of komt het door de opgaven die leerlingen motiveren of is het Paul die zijn klas uitdaagt tot het bedrijven van wiskunde?

Tot nu toe doet de hele klas mee, alleen gebeurt dit onder zijn leiding. Paul stelt zichzelf en zijn leerlingen de vragen. Maar dan gebeurt het volgende.

De les (vervolg)

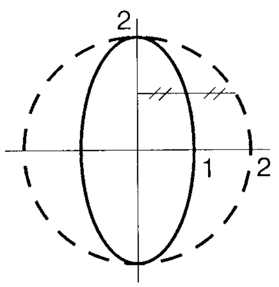
Een leerling vraagt: 'Mag je nu zeggen dat de oppervlakte van die ellips de helft is van de cirkel die eromheen ligt?'

Paul: 'De oppervlakte twee keer zo klein?'

Hij tekent:

$x(t) = a + \cos(\omega \cdot t)$

$y(t) = b + 2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$



'Ja, die ene streep is bij de cirkel precies twee keer zo lang. Al die horizontale streepjes bij elkaar vormen de oppervlakte, dus die is precies de helft. Nou...'

(Hier wordt even het principe van Cavalieri uitgevonden!)[2]

Paul en de leerlingen kijken naar het bord.

Hij zegt: 'Hier kunnen we beretrots op zijn. Wiskunde is doen.'

Leerling: 'Maar als je zelf op onderzoek uit bent, dan weet je niet of je wel goed bezig bent.'

Paul: 'Nu maakt dat niet uit. Op het examen misschien wel, maar wiskunde is niet rechtlijnig, het is zoeken en het gevoel hebben dat het goed gaat.'

Leerling: 'Maar thuis is er niemand die me kan zeggen dat het goed gaat.'

Paul: 'Bij mij thuis ook niet.'

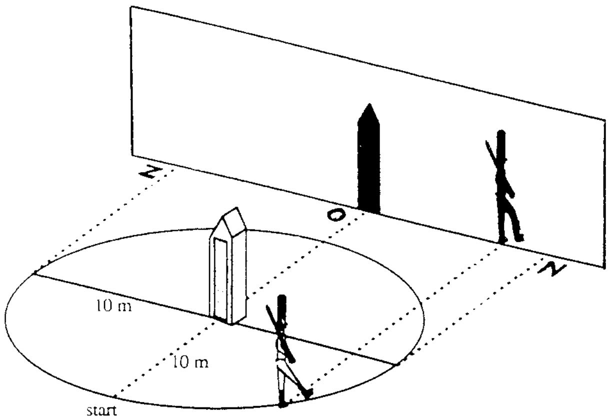
Andere leerling: 'Het is eigenlijk goed zolang het tegendeel niet bewezen is.'

Paul nuanceert: 'Nou, je moet er wel iets aan hebben.'

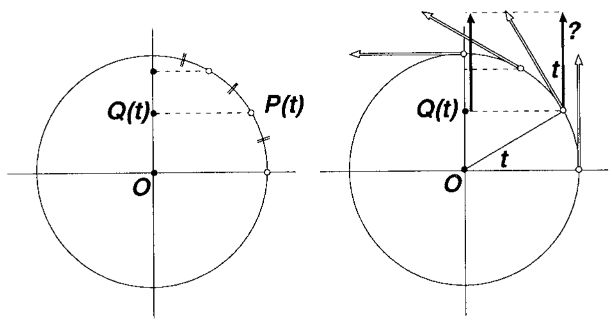
Onze les

Het is natuurlijk het verslag van maar één les. Desondanks motiveren dergelijke ervaringen ons bij het PROFI-project. Deze benadering van goniometrie lijkt hoopgevend. Inzichten en motivatie die in contexten met behulp van de grafische rekenmachine zijn opgedaan, lijken te functioneren. Leerlingen zijn niet afhankelijk van het apparaat geworden, ze willen graag de verschijnselen beredeneren.

Hoe gaat het verder? Hieronder volgen enkele voorbeelden die aangeven hoe de ingeslagen weg leidt tot de afgeleide van sinus.

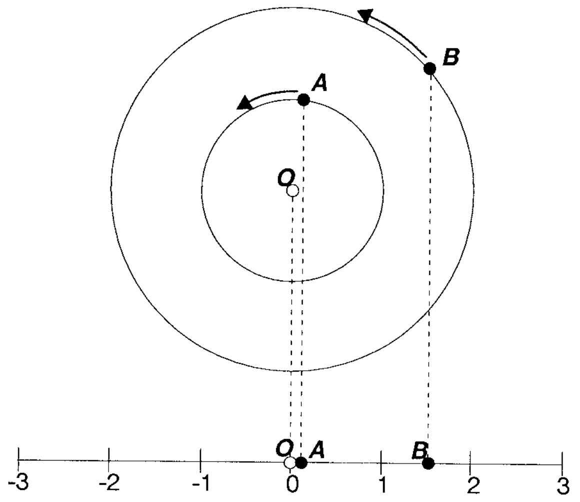


De situatie is een schildwacht die rondjes loopt. De zon staat laag en de schaduw van de schildwacht is op een muur te zien. In de plaatjes hieronder stelt de cirkelbeweging van P de lopende schildwacht voor en de heen-en-weer beweging van Q zijn schaduw.



De afstand van Q tot de oorsprong op tijdstip t is $\sin(t)$. De snelheid van P is constant; de snelheid van Q niet.

Met behulp van het rechter plaatje is in te zien dat de snelheid van punt Q op tijdstip t gelijk is aan $\cos(t)$.
Een heel andere situatie is de volgende. Voor een animatiefilm wordt de eenparige beweging van twee manen A en B rond een planeet O gesimuleerd. De banen worden als cirkels in één vlak gekozen. In de figuur zie je het bovenaanzicht en het zijaanzicht van een situatie op één bepaald moment. A en B bewegen in de richting van de pijlen.



In het vooraanzicht bewegen A en B zich over een rechte lijn volgens de formules:

$$x_A = \cos 2\pi t \qquad \text{en} \qquad x_B = 2\cos \pi t$$

Hierin geven x_A en x_B de plaats van A en B ten opzichte van O in het vooraanzicht.

a. Bewijs dat voor elk paar gelijktijdige posities van A en B geldt:

$$x_A = \tfrac{1}{2}x_B^2 - 1$$

b. Wat is het eerste moment na $t = 0$ waarop in het vooraanzicht slechts één planeet zichtbaar is?

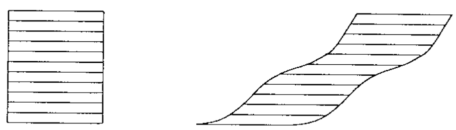
Tot slot

We hopen dat de aanpak vanuit bewegingen concreet is en tot de verbeelding spreekt, zodat de opgaven de leerlingen voldoende uitdagen om wiskunde te doen en zichzelf vragen te stellen. Kortom, opdat de leerlingen op een constructieve wijze met het vak wiskunde bezig zijn. Ervaringen bij de vlakke meetkunde zijn in dit opzicht geslaagd te noemen (Goddijn, 1996).
Tot slot nog een punt van zorg. Er is al gezegd dat het hier slechts een incidentele les betreft. Dergelijke lessen zijn van groot belang voor de leerlingen, maar moeilijk te plannen. Ze zijn niet alleen afhankelijk van de leerstof, maar ook van min of meer toevallige vragen en opmerkingen van leerlingen, van de sfeer in de klas en van de tijd die de docent hiervoor kan uittrekken. Met de invoering van de profielen in de tweede fase is sprake van een (relatieve) vermindering van het aantal contacturen. Dit dwingt docenten om heel efficiënt met die uren om te gaan, zodat het niet denkbeeldig is dat er minder ruimte blijft voor diepgaande klassegesprekken als hierboven. En wellicht hebben zulke klassegesprekken meer te maken met leren zelfstandig wiskunde te doen dan sommige beleidsmakers denken.

Noot

[1] Het PROFI-project heeft als opdracht een nadere invulling te geven en haalbaarheid te toetsen van het wiskundeprogramma in de profielen N&T en N&G voor het VWO. Uitgangspunt is het rapport van de vakontwikkelgroep wiskunde. Meer informatie over het PROFI-project vindt u in het artikel van Drijvers & Kindt (1995).

[2] Het principe van Cavalieri luidt als volgt. Als twee figuren even hoog zijn en lengtes van lijnen op gelijke hoogte hebben een vaste verhouding, dan verhouden zich de oppervlakten van die twee figuren volgens dezelfde verhouding. Zo hebben bijvoorbeeld de twee onderstaande figuren gelijke oppervlakte.



In de literatuur (zie bijvoorbeeld Boyer) wordt ook wel de driedimensionale variant genoemd.

Literatuur

Boyer, C.B. (1985). *A History of Mathematics.*

Drijvers, P. & M. Kindt (1995). 'Analyse in profiel', *Nieuwe Wiskrant, 15*(2), pp. 4-9.

Goddijn, A.J. (1996). 'De diepte van het platte vlak', *Nieuwe Wiskrant, 15*(3), pp. 6-12.

Kemme, S.L. & M. Wijers. (1996). 'Als jonge honden op een bak met lever', *Nieuwe Wiskrant, 15*(3), pp. 22-27.