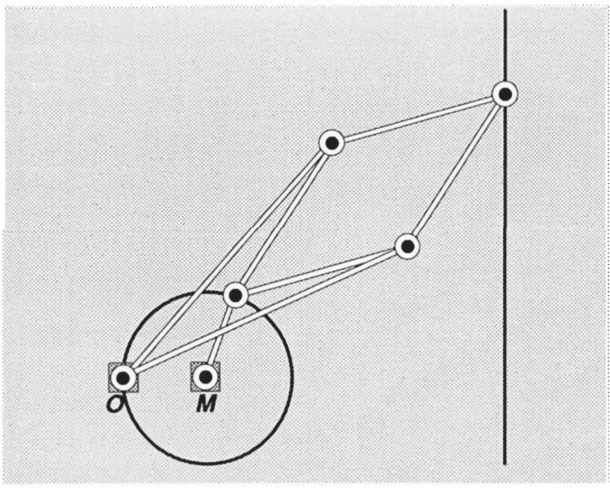
Rechte-lijnenpasser en anti-parallellogram

M. Kindt
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

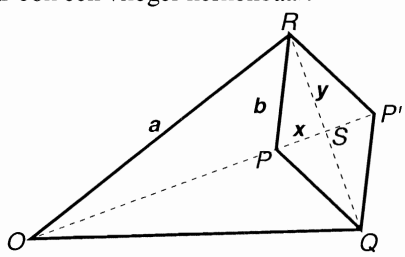
Passer en liniaal worden van oudsher in één adem genoemd. Zij zijn als mes en vork, tafel en bed, Romeo en Julia. Passer en liniaal: stond u wel eens stil bij het verschil in uitoefening van hun respectievelijke functies? Een rechte lijn trekken langs een liniaal is als het tekenen van een cirkel om een muntstuk. Dat zei Maria Bartolini, uit het land van Leonardo da Vinci, in haar voordracht 'Mathematical Machines in High School' op de Nationale Wiskunde Dagen 1996. Uit de reacties in het stampvolle auditorium bleek dat deze gedachte velen verraste.
In dit artikel zal ik niet ingaan op Maria's mooie lezing, hoewel de onderwerpen van haar verhaal 'geschiedenis van de wiskunde', '(kinetische) techniek', 'vlakke meetkunde', 'redeneren en bewijzen', in Nederland zeer actueel zijn met betrekking tot de nieuw te ontwikkelen wiskunde voor de β-profielen VWO. Mijn aandacht werd getrokken door één van de apparaten, meegekomen uit Modena, en te bewonderen in de expositieruimte van de NWD. Ik bedoel de zogeheten *inversor van Peaucellier,* uitgevonden zo omstreeks 1860. De uitvinder Charles Nicolas Peaucellier (1832-1913) was een Franse generaal met grote belangstelling voor toegepaste mechanica.
De clou van dit apparaat is dat het een cirkelvormige beweging omzet in een rechtlijnige.



In de originele versie bestaat het apparaat uit zeven in één vlak gelegen stangen en zes draaipunten, waarvan twee zijn vastgepind op een vlakke plaat. De afstand tussen de beide vaste punten (in de figuur O en M) is gelijk aan de stang die in M aangrijpt. Zo kan met het andere uiteinde van die stang, tevens hoekpunt van een ruit, een cirkel worden beschreven die precies door O gaat. Het tegenoverliggende hoekpunt van de ruit beschrijft dan automatisch een rechte lijn! Vandaar dat je zou kunnen spreken van een rechte-lijnenpasser.

Inversie

De werking van het apparaat is gebaseerd op een meetkundige transformatie die *inversie* heet en waarvan de ontdekking algemeen wordt toegeschreven aan de meetkundige Jakob Steiner (1796-1863). Ik wil hier kort uitleggen hoe de inversie werkt, uitgaande van Peaucellier's apparaat. Bekijk de kernfiguur. Daarin is niet alleen een ruit, maar ook een vlieger herkenbaar.

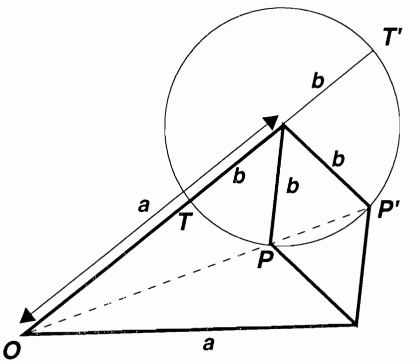


De symmetrie van vlieger en ruit garanderen dat O, P en P' bij iedere stand van de beweegbare stangen op één rechte lijn liggen. Ik let nu op de afstanden van P en P' tot O die ik hier zal noteren als $|OP|$ en $|OP'|$. Stel de lengte van de lange vliegerzijde a en van de zijde van de ruit b, dat zijn constanten. De variabele afstanden $|PS|$, $|RS|$ en $|OS|$ noem ik respectievelijk x, y en s. Dan geldt:

$$|OP| \times |OP'| = (s-x)(s+x) = s^2 - x^2 = s^2 - (b^2 - y^2) =$$
$$= s^2 + y^2 - b^2 = a^2 - b^2$$

Met andere woorden: het produkt van de afstanden van P en P' tot O is constant. Die constante noem ik verder c^2. Samen met de eigenschap dat P en P' op dezelfde lijn door O en aan dezelfde kant van O liggen, maakt dit de afbeelding $P \rightarrow P'$ tot een *inversie* met *centrum O*.

Een aanschouwelijk bewijs voor het constant zijn van $|OP| \times |OP'|$ vond ik in [2]:



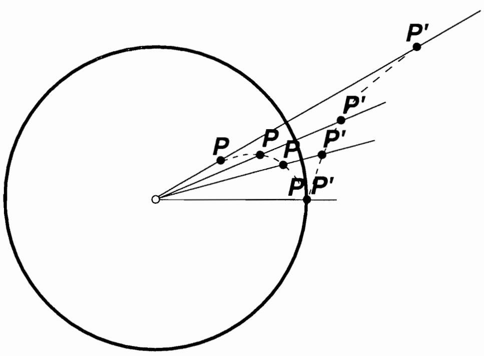
$$|OP| \times |OP'| = |OT| \times |OT'| = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Dit bewijs is schijnbaar eenvoudiger. Schijnbaar, want het vraagt meer voorkennis. Die kennis bestaat uit de stelling dat *voor alle lijnen door O die een zelfde cirkel snijden, het produkt van de afstanden van O tot de beide snijpunten constant* is. Dit kan worden bewezen met gelijkvormige driehoeken (hier *OPT'* en *OTP'*). Overigens bewees Euclides zelf deze eigenschap met behulp van de stelling van Pythagoras en dat komt dan zo'n beetje neer op het eerste bewijs.

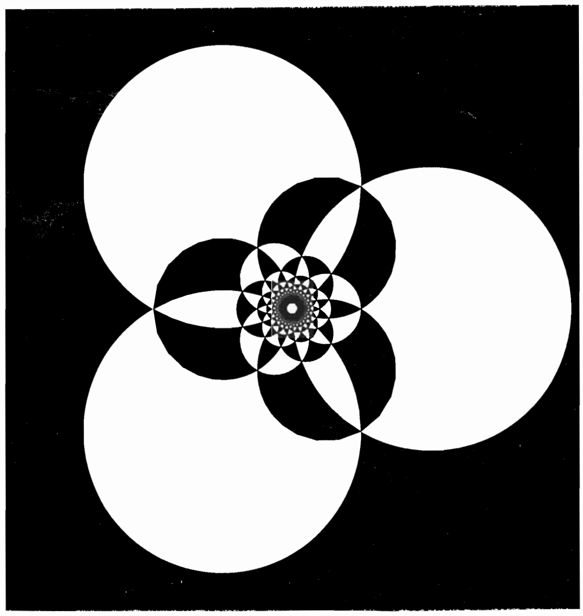
Wat doet nu zo'n inversie?
Neem een halve lijn ('straal') met beginpunt O en laat P over die straal bewegen richting O. Het corresponderende punt P' beweegt zich dan in tegenovergestelde richting. Als P heel dicht bij O ligt, dan ligt P' zeer ver weg.
P en P' kunnen ook samenvallen, namelijk als:

$$|OP| = |OP'| = c$$

Zo kan op elke straal door O een invariant punt worden gevonden. Die invariante punten vormen een cirkel om O met straal c. Deze cirkel noem ik de *inversiecirkel*.



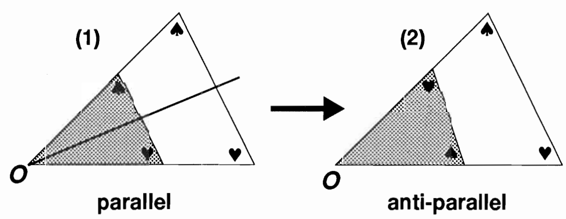
Laat nu P vanaf een punt op de inversiecirkel naar O bewegen, terwijl tegelijkertijd de straal die O met P verbindt om O draait. Je merkt dan dat als P een linksomgaande beweging maakt, de beweging van P' juist rechtsom is. Inversie verandert blijkbaar de oriëntatie in het vlak, zoals een spiegeling dat ook doet. Je kunt een inversie dan ook opvatten als een spiegeling in een cirkel. Figuren buiten de inversiecirkel worden naar het binnengebied gespiegeld en omgekeerd. Als ik een cilinder met een spiegelende mantel loodrecht op de inversiecirkel plaats, dan ontstaat zo'n inversie-effect. Dat effect kan heel spannend zijn, zoals onderstaande figuur waarin het inversie-beeld van een rooster van gelijkzijdige zwarte en witte driehoeken te zien is.



Terug naar de inversor van Peaucellier. Die berust op het feit dat de inversie cirkels door O (en rechte lijnen door O) in rechte lijnen transformeert. Anderzijds is het beeld van een cirkel (rechte lijn) die niet door O gaat, een cirkel. Ik beperk me in dit artikel tot het bewijzen van de eerste eigenschap.

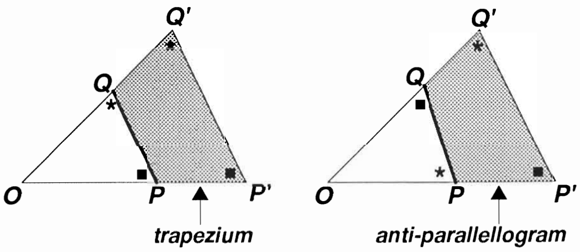
Anti-parallel

Heel bekend, ook aan de voor meetkunde 'verloren generaties' van na 1968, is de manier om twee gelijkvormige driehoeken te maken via een verbindingslijnstuk van twee zijden, dat parallel is met de derde zijde.
Spiegelen we nu één van beide driehoeken in de bissectrice van hun gemeenschappelijke hoek, dan ontstaat een nieuwe figuur met twee gelijkvormige driehoeken,



De twee zijden tegenover O in figuur (2) worden wel *anti-parallel* genoemd, vanwege de grappige verwisseling van de gelijke hoeken.
Merk op: alle verbindingslijnstukken van twee zijden in een driehoek, die anti-parallel zijn met de derde zijde, zijn onderling parallel.

Nog een opmerking: waar een parallel in een driehoek een trapezium van die driehoek afsnijdt, snijdt een anti-parallel een vierhoek af waarvan twee tegenover elkaar liggende hoeken samen 180° zijn. Zo'n vierhoek wordt in goed Nederlands een *koordenvierhoek* genoemd (omdat de zijden koorden zijn van dezelfde cirkel). Het zou ook een *anti-parallelogram* kunnen heten (beide paren overstaande zijden zijn anti-parallel).



Derde opmerking: in de driehoek met parallel geldt:

$$|OP|/|OP'| = |OQ|/|OQ'|$$

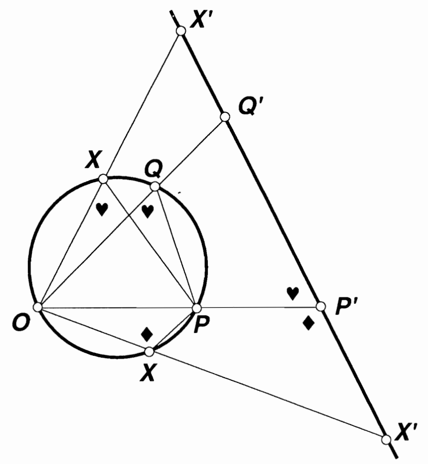
In de driehoek met anti-parallel daarentegen krijgen we:

$$|OP| \times |OP'| = |OQ| \times |OQ'|$$

Dit volgt meteen uit verwisseling van P en Q in de eerste gelijkheid. Omgekeerd volgt uit de gelijkheid van de produkten dat de lijnstukken PQ en $P'Q'$ antiparallel zijn
Dus als P en Q niet op dezelfde lijn door O liggen en P' en Q' zijn de bij een inversie corresponderende punten met P en Q, dan is lijnstuk $P'Q'$ anti-parallel met lijnstuk PQ. Waarschuwing: *lijnstuk $P'Q'$* is niet het beeld van *lijnstuk PQ*.

Van cirkel naar rechte

Rest nog het bewijs dat een cirkel, bepaald door drie punten O, P en Q, als inversie-beeld de rechte lijn $P'Q'$ heeft.



Stel $\angle OQP$ = ♥, dan ook $\angle OP'Q'$ = ♥ .
Als X over cirkel OPQ beweegt, geldt steeds:
$\angle OXP$ = ♥ óf $\angle OXP = 180° -$ ♥ (= ♦), al naar gelang X met Q aan dezelfde kant ligt van OP of aan de overkant.
Omdat XP steeds anti-parallel met $X'P'$ moet zijn, geldt:
$\angle OP'X'$ = ♥ óf $\angle OP'X' = 180° -$ ♥, al naar gelang enzovoorts.
Dus X' beweegt zich over de lijn $P'Q'$ en daarmee is Peaucellier's uitvinding gerechtvaardigd!

Criterium voor drie op één lijn

Drie willekeurige punten op één lijn, of deftig gezegd, *collineair*, dat is een wonder. Een criterium om dit wonder te bevestigen is gebaseerd op hoeken:

$$P, Q, R \text{ collineair} \Leftrightarrow \angle(PR, QR) = 0° \text{ of } 180°.$$

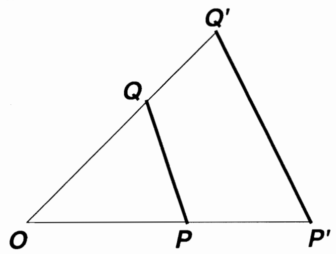
Dat is wat eigenlijk gebruikt is in het voorgaande bewijs. Behalve hoeken spelen ook afstanden een dominante rol in metrische meetkunde. Is er ook een criterium voor collineariteit van drie punten, gebaseerd op afstanden?
In de vlakke meetkunde voor wiskunde in het profiel N&T komt de driehoeksongelijkheid nadrukkelijk aan de orde (zie ook het artikel van Aad Goddijn in dit nummer):

$$|PQ| \le |PR| + |QR|$$

voor elk drietal punten P, Q, R.
Met dezelfde punten kun je nog twee van zulke ongelijkheden opschrijven, dat spreekt. Als in één van de drie ongelijkheden het =-teken geldt, dan liggen de drie punten op één lijn. Omgekeerd als drie punten collineair zijn, dan geldt één 'driehoeks*gelijkheid*'.
Had ik dit criterium ook kunnen gebruiken om de eigenschap van Peaucellier's inversor te bewijzen? Ja, maar dan had ik een groter beroep moeten doen op voorkennis van de lezer. De zaak kan ook worden omgedraaid. Het criterium van de driehoeksgelijkheid kan via inversie worden vertaald naar een criterium voor een ander groot wonder, namelijk het op één cirkel liggen van vier willekeurige punten. Ook hier is een mooie term voor bedacht: zo'n kwartet heet *concyclisch*.

De (on)gelijkheid van Ptolemeus

Voor de aangekondigde vertaling moet ik weten wat de inversie met afstanden doet.



Uit:

$$|P'Q'|/|PQ| = |OP'|/|OQ|$$

en:

$$|OP| \times |OP'| = c^2$$

volgt:

$$|P'Q'| = \frac{c^2|PQ|}{|OP| \times |OQ|}$$

De lezer met affiniteit voor dimensies ziet nu waarom het aardig is om de inversie-constante als kwadraat te nemen. Neem nu de driehoeksongelijkheid:

$$|P'Q'| \le |P'R'| + |Q'R'|$$

Substitutie van de vorige formule geeft:

$$\frac{c^2|PQ|}{|OP| \times |OQ|} \le \frac{c^2|PR|}{|OP| \times |OR|} + \frac{c^2|QR|}{|OQ| \times |OR|}$$

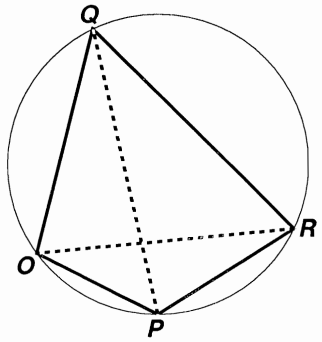
Vermenigvuldig links en rechts met $|OP| \times |OQ| \times |OR|$ en er komt:

$$|OR| \times |PQ| \le |OQ| \times |PR| + |OP| \times |QR|$$

Een soort 'vierhoeksongelijkheid'.
Zoals er drie versies van de driehoeksongelijkheid zijn bij P', Q', R', zo zijn er ook drie versies voor de vierhoeksongelijkheid bij O, P, Q en R. Nogal wiedes, elk produkt in de ongelijkheid wordt gevormd door de lengten van een paar 'overstaande zijden', dat wil zeggen van lijnstukken die geen punt gemeenschappelijk hebben. Bij vier punten zijn er drie van zulke paartjes.
Uit:

O, P, Q, R *concyclisch* $\Leftrightarrow P', Q', R'$ *collineair*

volgt nu direct dat willen O, P, Q en R de hoekpunten zijn van een anti-parallellogram (of koordenvierhoek), dan moet één keer een vierhoeks*gelijkheid* gelden.
Zo vinden we een stelling die bekend staat als de stelling van Ptolemeus:



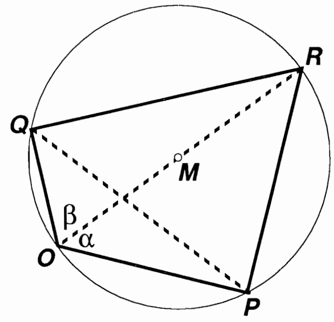
***OPRQ* is anti-parallellogram** $\Leftrightarrow$
$|OR| \times |PQ| = |OQ| \times |PR| + |OP| \times |QR|$

Anders gezegd: van een (convexe) vierhoek liggen de hoekpunten op een cirkel alleen dan als het produkt van de diagonalen gelijk is aan de som van de produkten van de overstaande zijden. De toevoeging van het woordje convex garandeert dat de diagonalen binnen de vierhoek liggen en dan is het zeker dat we van de drie mogelijkheden de goede te pakken hebben.
Ook zeker is nu dat in het geval de vier punten niet concyclisch zijn, er drie keer een ongelijkheid van het type

$$|OR| \times |PQ| < |OQ| \times |PR| + |OP| \times |QR|$$

geldt.

Tot slot wil ik een paar bijzondere gevallen bekijken.
Een rechthoek is een koordenvierhoek. De stelling van Ptolemeus blijkt in dat geval juist de stelling van Pythagoras te zijn. Het zoveelste bewijs van deze stelling.
Als slechts twee overstaande hoeken van de vierhoek recht zijn (in de figuur de hoeken bij P en Q), dan is dus precies één diagonaal tevens middellijn van de omgeschreven cirkel.



Stel $|OR| = 2r$ en laat α en β de hoeken zijn waarin de diagonaal OR hoek O verdeelt.
Dan volgt uit de rechthoekigheid van de driehoeken OPR en OQR dat:

$$|OP| = 2r\cos\alpha,\ |PR| = 2r\sin\alpha,$$
$$|QR| = 2r\sin\beta \text{ en } |OQ| = 2r\cos\beta.$$

In het algemeen geldt dat de lengte van een koorde in een cirkel met straal r gelijk is aan $2r$ maal de sinus van één van de omtrekshoeken die op de koorde staat (welke doet er niet toe: twee van zulke omtrekshoeken zijn gelijk of elkaars aanvulling tot 180°). Dus geldt in bovenstaande figuur ook nog: $|PQ| = \sin(\alpha + \beta)$.
Vullen we dit alles in de gelijkheid van Ptolemeus in, dan komt er na deling door $2r$ een oude bekende:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \times \cos\beta + \cos\alpha \times \sin\beta.$$

Vervolg

De driehoeksongelijkheid laat zich via inversie vertalen in de (uitgebreide) stelling van Ptolemeus.
De driehoeksongelijkheid kan een instrument zijn bij de oplossing van meetkundige optimaliseringsproblemen. De natuurlijke vraag is nu of je de vierhoeksongelijkheid op een zelfde manier kunt gebruiken. Dat is inderdaad het geval: je kunt met Ptolemeus de brekingswet van Snellius bewijzen! Maar daarover in een volgend nummer van dit tijdschrift.

Literatuur

[1] Bartolini Bussi, M. (1996). *Mathematical Machines in High School, lezing NWD 1996.*
[2] Hilbert D. en S. Cohn-Vossen (1990). *Geometry and the Imagination.* 2nd. ed. New York, Chelsea Publ.Cy.