

IJs, peper en platina

Recreatierubriek

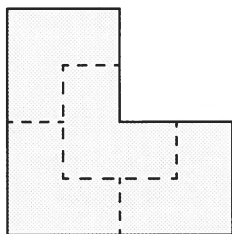
A.J. Goddijn

Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

Reptiles

Opgave 132, met oplossing

Verdeel deze figuur in vier gelijke delen die dezelfde vorm als de oorspronkelijke figuur hebben.



Opgave 132, inclusief oplossing, is vrij bekend. Een uitbreiding van het idee vindt u onderaan op deze bladzijde. In deze vorm is het goed kopieerbaar voor gebruik in de klas.

Deze figuren zijn allemaal zogenaamde 4-tiles. Er bestaan ook 2-tiles, 3-tiles, enzovoort.

Momenteel kijkt u naar een rechthoekige 2-tile.

Opgave 133

Hoezo? En zijn er nog andere 2-tiles?

De familienaam is reptiles. Het idee van opgave 133, dat in onze papierformaten is toegepast, kan uitgebreid worden tot het maken van rechthoekige n -tiles voor welke n dan ook.

Opgave 134

Wat is de zijde-verhouding van de rechthoekige n -tile?

Een kleine variatie is nog: parallellogram in plaats van rechthoek. Om het zoeken naar reptiles niet al te flauw te maken sluiten we nu rechthoeken, parallellogrammen en lijnstukken van verdere deelneming uit. We nemen ook meer vrijheid: het hoeven niet per se gesloten veelhoeken te zijn, van alles mag, ook figuren met merkwaardige randen, verzamelingen losse punten, enzovoort.

A collection of four irregular polygons and a dashed circle with a question mark, intended for a tiling exercise. The polygons are shaded and have various shapes, including one that is a 4-tile of the original figure. The dashed circle has a question mark inside it.

Een vierkant kun je gemakkelijk in vier gelijke kleinere vierkanten verdelen.

A square divided into four smaller squares by dashed lines.

Probeer de andere figuren ook in vier gelijke delen te verdelen die dezelfde vorm als de oorspronkelijke figuur hebben.

Maak er nog een figuur bij, waarmee het ook kan.

Opgave 135

Vind met deze restricties en vrijheden een 3-tile.

Een antwoord bij opgave 135 kan van deze vorm zijn: Zie Nieuwe Wiskrant, jrg. ..., nr. ..., pag. ... Ik ben benieuwd of de auteur van het betreffende artikel ook een antwoord inzendt.

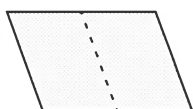
De redactie van de *Nieuwe Wiskrant* heeft gevraagd deze keer ook een paar betrekkelijk eenvoudige problemen op te nemen. Ik houd me tot nu toe aan dat advies, maar neem nu toch even de vrijheid twee nog door niemand opgeloste problemen te noemen.

Opgave 136

Bestaan er andere convexe 2-tiles dan deze twee typen:



gelijkbenige rechthoekige driehoek



parallelogram met zijdeverhouding $1:\sqrt{2}$

Opgave 137

Zijn er figuren die tegelijk 2-tile en 3-tile zijn?

Voor meer informatie zie Croft/Falconer/Guy (1991). [1]

Reacties Voronoi

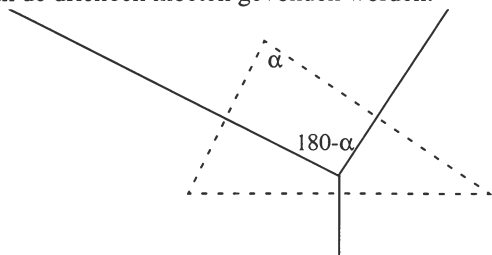
Deze puzzelrubriek bestaat geheel uit onafhankelijk leesbare paragrafen. Deze paragraaf is gewijd aan reacties op de rubriek van juni 1995.

Frank Evers heeft van opgave 124 t/m 129 gebruik gemaakt voor een bijdrage aan het college Concrete Meetkunde, hier aan het Mathematisch Instituut in Utrecht.

Het onderwerp Voronoi-diagrammen draaide proef in enkele VWO-5 klassen in het kader van de ontwikkeling van de nieuwe Wiskunde-profielen.

Maurits Dienne heeft uitgebreid gereageerd op opgave 120 t/m 123.

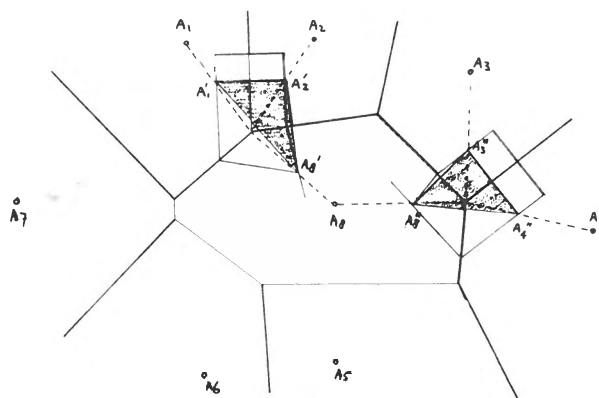
Het gaat bij deze opgaven om het terugvinden van de oorspronkelijke punten als alleen de grenzen van het Voronoi-diagram gegeven zijn. Hieronder is bijvoorbeeld een grensindeling van drie lijnen gegeven; de lijnen zijn dus de middelloodlijnen van een driehoek en de drie punten van de driehoek moeten gevonden worden.



De basis techniek van Maurits is aangegeven: de hoeken van de driehoek en de onderlinge hoeken van de middel-

loodlijnen hangen samen, en daardoor is gemakkelijk een driehoek van de juiste vorm te vinden, die dan alleen nog maar verschoven en gedraaid moet worden. Er is één vrijheidsgraad: de grootte van de driehoek.

De figuur hieronder neem ik over van Maurits Dienne.



Bij twee hoekpunten (snijpunten van middelloodlijnen dus) van een gegeven diagram zijn op de aangegeven manier driehoeken geconstrueerd: $A'_1A'_2A'_8$ en $A''_3A''_8A''_4$.

Door deze driehoeken op te blazen van uit de bijhorende snijpunten van middelloodlijnen wordt A_8 , centrum van het gegeven polygoon, gevonden. Merk op dat nu onmiddellijk de centra van de omliggende cellen bepaald zijn! Werkelijk gebruik van Voronoi-diagrammen gaat nauwelijks over dit soort reconstructies en ook omdat vanuit het genoemde VWO-project nog wel over Voronoidiagrammen zal worden geschreven, laat ik het hierbij.

Marco Polo en de peper van Kinsai

Marco Polo was onlangs nog in het nieuws. Deze Venetiaanse ontdekkingsreiziger uit de dertiende eeuw werd er van beschuldigd zijn reisverhalen verzonden te hebben. Ik geloof daar niets van. Zijn verhalen over de Kubelai Khan, over de stad Kinsai, over Tibet zijn zo schitterend dat ze niet verzonden kunnen zijn, dat moet de werkelijkheid zijn.

Uit de beschrijving van de stad Kinsai (het huidige Hang-Chau in de Chinese provincie Che-kiang) neem ik een aantal fragmenten over. [2]

De stad Kinsai

Als eerste dan, er wordt gezegd dat de stad Kinsai een omtrek van 100 mijl heeft, omdat de straten en waterlopen ervan wijd en talrijk zijn.

Volgens zeggen zijn er 12.000 bruggen, de meeste van steen, maar sommige zijn van hout.

Elk van deze 12.000 bruggen wordt bewaakt door 10 man, 5 overdag en 5 's nachts.

Er zijn markten, die groot en uitgestrekt zijn omdat er zoveel mensen op af komen.

Er zijn tien hoofdmarktpleinen, om maar niet te spreken van de talloze plaatselijke markten. Deze zijn vierkant, een hal-

ve mijl iedere kant uit. Langs deze loopt een grote hoofdweg van 40 passen breed, die van het ene eind van de stad naar het andere loopt. En om de vier mijl is daar een van die pleinen, die zoals gezegd een omtrek van 2 mijl hebben.

De hoeveelheid peper die in de stad dagelijks wordt gegeten is 43 karladingen van elk 223 pond.

De stad is georganiseerd in 12 gildes, één voor elk ambacht, om maar niet te spreken van de kleinere gilden. Elk van deze twaalf gildes heeft zo'n 12.000 werkplaatsen, en in iedere werkplaats werken minstens 10 mannen, in sommige echter wel 40.

Opgave 138

Hoe pittig aten de bewoners van Kinsai?

Opgave 139

Bedenk drie opgaven over Kinsai of ander fragmenten uit 'De wonderbaarlijke reizen van Marco Polo'.

Zee, zee!

De volgende opgave is ook op een oude tekst gebaseerd: De tocht van de tienduizend, van Xenophon. [3] Tienduizend Grieken zijn op weg terug naar huis, na slag geleverd te hebben tegen de Perzen. De datum: januari 400 (v. Chr.). Voor oudgymnasiasten roept dit herinneringen op aan de steeds terugkerende dagmarsen en afstanden die genoemd worden. Maar als je nú de vertaling leest, denk je dat je een script voor een spektakelfilm in handen hebt.

Zee, zee!

De Grieken bereikten een rivier van honderd meter breed, de Harpasos. Vervolgens voerde de tocht over vlak terrein door het gebied van de Skuthenen. Ze legden in vier dagmarsen honderd kilometer af. In de dorpen die ze toen bereikten, bleven ze drie dagen om te foerageren.

Daarna legden ze in vier dagmarsen honderd kilometer af tot Gumnias, een grote rijke stad. De heerser van de streek die daar woonde, stuurde de Grieken een gids mee om hen door een gebied te leiden waarmee hij zelf op voet van oorlog stond. De gids beloofde hen in vijf dagen naar een plaats te brengen waar ze de zee konden zien. Als hij dat niet deed, mochten ze hem doden. Toen ze onder zijn leiding het vijandelijk gebied binnenvielen, drong hij er aanhoudend op aan de streek te verbranden en te verwoesten, waaruit tegelijk bleek dat dit de reden van zijn komst was en niet sympathie voor de Grieken. Inderdaad bereikten ze de berg, de Theches, op de vijfde dag.

Toen de vorsten de top bereikt hadden, ging er een luid geschreeuw op. Xenophon en de soldaten van de achterhoede hoorden dit en kregen de indruk dat het leger ook vooraan een vijandelijke aanval te doorstaan had. In de rug werden ze namelijk gevolgd door mensen uit het verbrande gebied. De achterhoede had er een paar gedood en anderen door middel van een hinderlaag levend in handen gekregen. Bovendien hadden ze een twintigtal schilden buitgemaakt van ongelooide huiden waar het haar nog aanzat.

Toen het geroep sterker werd en dichterbij kwam, en afdeling na afdeling bij het naderen van de top ging rennen om, eenmaal boven, ook te gaan roepen, begreep Xenophon dat er iets zeer bijzonders aan de hand moest zijn. Hij steeg te paard en snelde met Lukios en de ruitrij te hulp en al gauw

hoorden ze de kreet: "Zee, zee!" door de rijen gaan. Ze begonnen allemaal hard te lopen, ook, de achterhoede; lastdieren en paarden draafden mee.

Toen ze allemaal op de top waren, omhelsden de soldaten elkaar en hun generaals en kapiteins, huilend.

Hierna duurt het nog vijf dagen voor ze de zee inderdaad bereiken. Het is de Zwarte Zee, waarlangs de Grieken kolonies hadden. Niet bekend is welke berg dat is, die Teches.

Opgave 140

Hoe hoog is de Teches minstens?

De winderige berg

Voor opgave 140 is inzicht nodig in het verband tussen stahoogte en horizonafstand. Misschien is het beter dat verband in een veel nauwkeuriger omschreven situatie te onderzoeken. We beklimmen daartoe de Mons Ventosus, de winderige berg, die we nu kennen als de Mont Ventoux, waar Tommy Simpson zijn einde vond in de Ronde van Frankrijk, 1967.

We gaan omhoog met de dichter Francesco Petrarca en diens broer, in 1343. Petrarca schreef na zijn beklimming een brief aan zijn biechtvader. Hij begint zijn brief met de mededeling dat hij de berg beklimt louter uit begeerte de hoogte ervan nader in ogenschouw te nemen. Natuurlijk gaat het in feite, zoals bij elke sportprestatie van enige omvang, om een gewetensonderzoek. Modern gezegd: hij komt zichzelf tegen bij die klim. Petrarca zelf:

Ik liet mijn geest opstijgen, naar het voorbeeld van mijn lichaam.

Op de top gebeurt dit [4]:

Ik draaide mij om en keek naar het westen. De grenswal tussen Frankrijk en Spanje, het Pyreneeëngebergte, is daarvandaan niet te zien, niet omdat er, voor zover ik weet iets tussen ligt wat het uitzicht belemmert, maar alleen omdat het zwakke menselijke oog niet zo ver reikt. Wel waren aan de rechterkant de bergen van de Lyonese provincie te zien, en aan de linkerkant was de zee die Marseilles en de muren van de Aigues-Mortes bespoelt duidelijk zichtbaar, hoewel er in beide gevallen toch een afstand van enkele dagreizen tussen ligt. De Rhône zelf was vlak onder ons zichtbaar.

Het menselijk oog reikt ook tot de sterren, dus daar kan het toch niet echt aan liggen.

Opgave 141

Zouden de Pyreneeën bij zeer helder weer wèl vanaf de Mont Ventoux zichtbaar kunnen zijn?

Ontwikkel om dit probleem op te lossen een eenvoudige formule die het verband tussen stahoogte en horizonafstand aangeeft. Pas de formule ook toe op de Teches.

De atlas vertelt nog: Mont Ventoux: 1912 meter hoog, Pic de Canigou (in de oostelijke Pyreneeën): 2785 meter hoog, afstand Canigou-Mont Ventoux: 300 kilometer.

Børge Ousland op het ijs

Op dit moment vindt ook een forse ontdekkingsreis plaats, tevens sportprestatie van de eerste orde.

Een Britse bergklimmer, Robert Mear, en een Noor, Børge Ousland, zijn beide begonnen aan een tocht over het Zuidpoolijs. Het bijzondere is dat ze het beide alleen doen, op ski's met een slede met voedsel achter zich aan. Roger Mear is op 1 november gestart vanaf de Weddell Zee en hoopt honderd dagen later aan de ander kant van Antarctica opgepikt te worden door de Russische ijsbreker Kaptain Khlebnikov. Børge Ousland is op 5 november gestart vanaf Patriot Hills bij Berkner Island. Hij trekt volgens de plannen ook in honderd dagen de zuidpool over om uit te komen bij McMurdo.

Ousland heeft intussen (het is nu 21 november) 232 kilometer afgelegd en Roger Mear, die aanvankelijk over moeilijker terrein ging, 168 km.

Onder op deze pagina is een kaartje te zien met de positie van Ousland op opeenvolgende dagen.

Opgave 142

Gaat hij het halen?

Voor meer informatie, zie [5].

Platina

Omdat we nu toch met vraagstukken vanuit de literatuur bezig zijn, omdat Seamus Heaney de Nobelprijs voor literatuur 1995 heeft gewonnen en omdat het in Engeland op 1 oktober 'metric day' was, nog het begin van een gedicht uit 'The Haw Lantern'. [6]

From the Land of the Unspoken

I have heard of a bar of platinum
kept by a logical and talkative nation
as their standard of measurement,
the throne room and the burial chamber
of every calculation and prediction.
I could feel at home inside that metal core
slumbering at the very hub of systems.

Geen opgave hier, tenzij deze: vind de bundel en lees de rest. Heaney is ook voor niet Engelstaligen redelijk toegankelijk.

Heaney staat met één been in de Ierse cultuur en een ander in de Engelse. Hij stelt zich niet extreem politiek op; juist daarom heeft de keuze van de Nobelprijsc commissie een licht politiek tintje.

Literatuur

- [1] Croft, H.T., K.J. Falconer & R.K. Guy (1991). *Unsolved Problems in Geometry*. Springer Verlag, New York etc.
- [2] Marco Polo (1958). *De Reizen van Marco Polo*. Hier naar de Engelse vertaling van Ronald Latham, Penguin Books, Middlesex.
- [3] Xenophon (1988). *De tocht van de tienduizend*. Vertaling Gerard Koolschijn en Nicolaas Matsier. Ambo, Baarn.
- [4] Francesco Petrarca (1990). *De top van de Ventoux*. Vertaling Chris Tazelaar. Ambo/Baarn.
- [5] Internet-locatie: <http://Nettvik.no/ousland>.
- [6] Heaney, Seamus (1987). *The Haw Lantern*. Faber and faber, London.

