De Fis van Euler

Voordracht gehouden op de NWD

J. van de Craats
Oosterhout

In 1739 beschreef de wiskundige Leonhard Euler (1707-1783) in zijn boek *Tentamen novae musicae* (Proeve van een nieuwe muziektheorie) een nieuwe manier om toonsystemen te vormen. Eén van de aldus gevormde systemen komt vrijwel overeen met de traditionele C-groot toonsoort, het systeem dat per octaaf de zeven tonen bevat van de gewone C-grote-terts toonladder. Alleen voegt Euler er een extra toon aan toe, de Fis. We zullen Eulers ideeën presenteren en verder uitwerken. Zowel de grote-tertssystemen als de kleine-tertssystemen krijgen daarbij een plaats in een zogenaamd kwinten-tertsen rooster. Daarmee kunnen we verbanden tussen toonsoorten duidelijk maken en modulaties verklaren.

Tonen en boventonen

Aan een muzikale toon kan men drie aspecten onderscheiden: de *toonhoogte*, de *toonsterkte* (luidheid) en de *klankkleur* (het timbre). Sinds de zeventiende eeuw weet men dat geluid ons oor bereikt via trillingen in de lucht, en dat een muzikale toon correspondeert met een min of meer periodieke trilling. Maak je die trilling zichtbaar, dan zie je een regelmatig terugkerend golfpatroon (figuur 1). De toonhoogte wordt daarbij bepaald door de *frequentie*, het aantal trillingen per seconde. De toonsterkte hangt samen met de *amplitude* van de trilling, en de klankkleur ligt vast door de specifieke vorm van het trillingspatroon. Tonen met dezelfde toonhoogte die op verschillende instrumenten worden voortgebracht, corresponderen met trillingen van gelijke frequentie maar met een verschillende golfvorm.

De Fourieranalyse leert ons dat elke trilling beschouwd kan worden als de superpositie van sinusoïden met frequenties die gehele veelvouden zijn van de grondfrequentie. Een trillend voorwerp dat een muzikale toon voortbrengt, brengt dus eigenlijk een superpositie voort van afzonderlijke trillingen. Inderdaad kun je bij gespannen snaren of luchtkolommen in blaasinstrumenten door middel van wat kunstgrepen die samenstellende trillingen ook afzonderlijk tot klinken brengen: je kunt waarnemen dat ze bij al die frequenties gaan *resoneren*; de tonen die bij die frequenties behoren, noemt men *boventonen*, en elke muzikale toon is dus een superpositie van boventonen. De n-de boventoon heeft als frequentie het n-voud van de grondfrequentie. De bijdragen van de afzonderlijke boventonen in een toon bepalen de uiteindelijke trillingsvorm, dat wil zeggen de klankkleur van de toon.

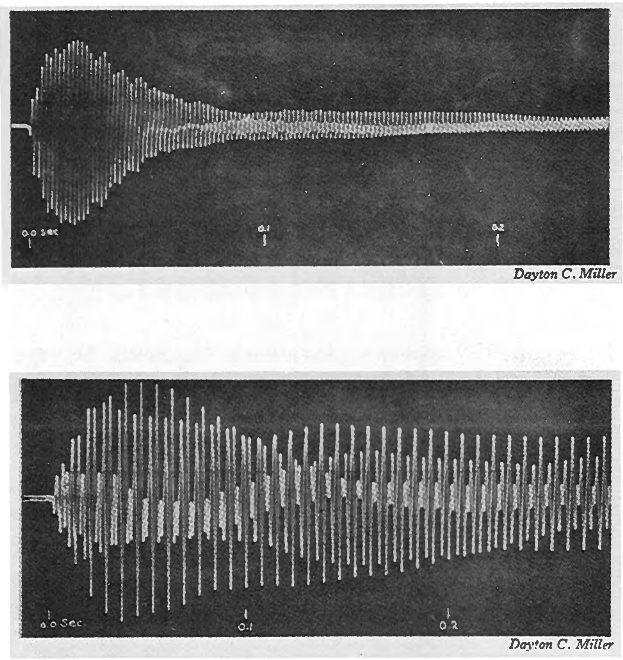

fig. 1 Twee klankgrafieken van pianotonen. De bovenste is een toon C met een frequentie van 516 Hz, de onderste een C met frequentie 129 Hz. De figuren zijn afkomstig uit Science and Music *van Sir James Jeans.*

Welluidende intervallen

Aan Pythagoras wordt wel de ontdekking toegeschreven dat welluidende muzikale intervallen iets te maken hebben met eenvoudige getalsverhoudingen. Verdeel je een gespannen snaar in twee delen, dan brengen de twee stukken samen een welluidend interval voort wanneer de verhouding van de lengten van de delen eenvoudig is. Zo correspondeert een verhouding 1 : 2 met het interval dat men een *octaaf* noemt. De twee tonen tezamen versmelten zozeer, dat het zelfs moeilijk is ze nog afzonderlijk te blijven horen. Dat is niet zo moeilijk te verklaren: het korte stuk van de snaar zal twee maal zo snel trillen als het lange: alle boventonen van het korte stuk zijn ook boventonen van het lange stuk, en je kunt de samenklank dus ook opvatten als één toon, de toon van het lange stuk, waarvan de even boventonen extra zijn versterkt. Tonen die een octaaf verschillen, zijn dus in zekere zin 'gelijk': een melodie die een octaaf hoger of lager wordt gespeeld, klinkt in wezen hetzelfde. Als mannen en vrouwen samen zingen, zullen de vrouwen een octaaf hoger zingen dan de mannen. Tonen die een octaaf verschillen, hebben ook dezelfde naam: zo worden de tonen met frequenties

..., 55, 110, 220, 440, 880, 1760, 3520, 7040, ... Hz

allemaal met de toonnaam A aangeduid.

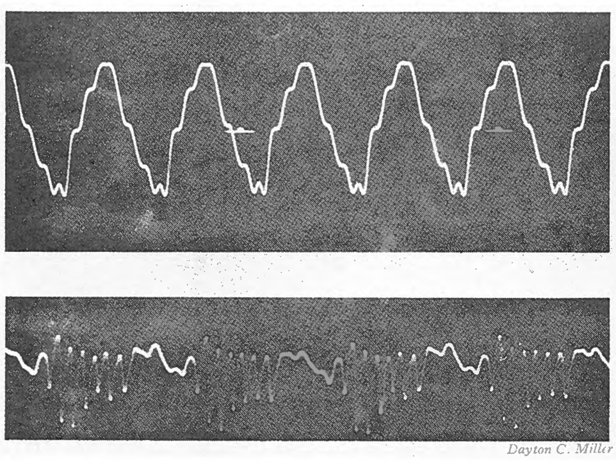

fig. 2 Klankgrafieken van dezelfde toon C gespeeld op twee verschillende klarinetten.

Hier past overigens een waarschuwende opmerking. We zouden op dit moment, los van alle muzikale tradities, een heel nieuw systeem van toonnamen kunnen gaan invoeren, gebaseerd op frequenties en hun verhoudingen. Dat zou wiskundig zeer bevredigend zijn, maar verwarrend voor muzikaal geschoolde lezers. We nemen daarom een hybride standpunt in, waarbij we wel aansluiten bij de gebruikelijke notaties voor toonnamen en muzikale intervallen, maar hele delen van de traditionele harmonieleer verwerpen of modificeren. In het bijzonder zullen de namen van de tonen en de intervallen (*octaaf* bijvoorbeeld) niet meer dan onverklaarde, traditioneel gangbare symbolen zijn.

We gaan nu verder met het verkennen van de welluidende intervallen. Ook het interval met frequentieverhouding 2 : 3 klinkt zeer welluidend: men noemt het een *kwint*. De welluidendheid correspondeert ook weer met het overeenstemmen van boventonen: de twee tonen hebben veel boventonen gemeen, maar ze zijn ook allebei boventoon van eenzelfde grondtoon: de toon die een octaaf lager klinkt dan de laagste van de twee.

De verhouding 3 : 4 (de *kwart*) levert in wezen niet veel nieuws: haal in de kwint de laagste toon maar een octaaf omhoog. Wél nieuw is de verhouding 4 : 5, de *grote terts*. De drieklank 4 : 5 : 6, die samengesteld is uit een grote terts 4 : 5 en een kwint 4 : 6 = 2 : 3, vormt in zekere zin de basis van de harmonie van de westerse muziek; in wezen is die drieklank, die bekend staat als de *grote-tertsdrieklank* (of kortweg *grote drieklank*) gewoon een stukje van de boventonenreeks van een twee octaven lager liggende grondtoon. Nogmaals vragen we de lezer niets te zoeken achter de verwarrende namen *kwint* en *terts*, die een verband suggereren met de getallen 5 (voor kwint) en 3 (voor terts), maar die nu juist te maken hebben met frequentieverhoudingen waarin de priemfactoren 3 en 5 precies andersom voorkomen! De naamgeving van de intervallen heeft dan ook een heel andere achtergrond; we moeten die hier buiten beschouwing laten.

De grote drieklank 4 : 5 : 6 bevat ook het interval 5 : 6 = 10 : 12, de *kleine terts*. Samen met de kwint 2 : 3 = 10 : 15 kan men er de *kleine drieklank* 10 : 12 : 15 mee vormen, maar het is duidelijk dat deze drieklank een veel mindere mate van welluidendheid bezit. De grondtoon ervan ligt meer dan drie octaven lager, en bovendien is die grondtoon niet een toon die in de drieklank zelf voorkomt.

Toonsystemen

De oude Grieken vormden al toonsystemen door combinaties van de fundamentele intervallen octaaf, kwint en grote terts. Het zogenaamde Pythagoras-systeem maakte zelfs alleen maar gebruik van octaven en kwinten. Zes geschakelde kwinten leveren zeven tonen. Begint men met een toon F, dan krijg je in de traditionele naamgeving de volgende rij tonen:

F – C – G – D – A – E – B

waarbij de frequentieverhouding tussen twee opvolgende tonen dus telkens 2 : 3 is. Breng je al die tonen door octaaftransposities binnen één octaaf, bijvoorbeeld het octaaf tussen twee C's, dan ontstaat de zogenaamde *Pythagoras-toonladder*:

C – D – E – F – G – A – B – C

de toonladder die je ook op de witte toetsen van de piano vindt (alleen wijkt de stemming van de tonen op de piano een heel klein beetje van de zuivere kwinten af, maar daarover later).

Men kan natuurlijk de kwintenreeks naar beide zijden onbeperkt voortzetten, en zo een in principe onbegrensde rij van nieuwe tonen vormen. Binnen het octaaf komen er dan ook steeds meer tonen in het systeem. In de gebruikelijke naamgeving:

... – Ges – Des – As – Es – Bes – F – C – G – D –
– A – E – B – Fis – Cis – Gis – Dis – Ais – Eis – ...

In zekere zin is het aantal van zeven tonen per octaaf van de Pythagoras-toonladder nogal willekeurig. Het is meer een kwestie van traditie dan van muzikale noodzaak. Euler trok zich van dit traditionele aantal van zeven tonen dan ook niets aan toen hij voorstelde toonsystemen te vormen met als basis niet alleen het octaaf en de kwint, maar ook de grote terts. Net als boven worden octaaftransposities niet expliciet opgeschreven, en dus krijg je dan een tweedimensionaal schema met als bouwstenen kwinten en grote tertsen. Euler stelde voor om die schema's altijd *rechthoekig* te maken, en hij had daar zowel rekenkundige als muzikale argumenten voor. In mijn boek *De Fis van Euler* is daarover meer te vinden; hier moeten we die kwestie laten rusten.

Het eenvoudigste Euler-schema krijg je met één kwint en één grote terts als bouwstenen: vier tonen per octaaf, bijvoorbeeld

A – E
| |
F – C

Horizontaal vinden we hierin de kwintverhouding 2 : 3, en verticaal (van beneden naar boven) de grote terts 4 : 5. Natuurlijk is dit simpele schema muzikaal gesproken nauwelijks interessant. Het volgende systeem is dat echter wel:

A – E – B – Fis
| | | |
F – **C** – G – D

Euler noemde dit systeem C-Durus, en hij merkte op dat het, afgezien van de Fis, overeenkomt met het traditionele C-groot systeem. Eulers systeem bevat de drie grote drieklanken C–E–G, G–B–D en F–A–C, die door Rameau als basis genomen waren van de harmonie: de centrale drieklank C–E–G op de *tonica* C (vet gedrukt in het schema), een kwint hoger de grote drieklank G–B–D op de dominant G, en een kwint lager de drieklank F–A–C op de subdominant F. Elke drieklank is ook voorzien van zijn leidtoon: B als leidtoon naar de tonica C, Fis als leidtoon naar de dominant G, en E als leidtoon naar de subdominant F. Ook Rameau sprak van leidtonen, maar in zijn C-majeur systeem nam hij de leidtoon Fis naar de dominant G niet op, waarschijnlijk omdat hij de traditie van zeven tonen per octaaf niet wilde doorbreken. Het merkwaardige is echter dat je, wanneer je in de muziek van de grote componisten kijkt, die leidtoon naar de dominant (de 'Fis van Euler') veelvuldig tegenkomt. Niet als een 'vreemd' element, maar als een volkomen natuurlijk onderdeel van het grote-tertssysteem. Zie bijvoorbeeld figuur 3; de muzikale praktijk geeft Euler gelijk!

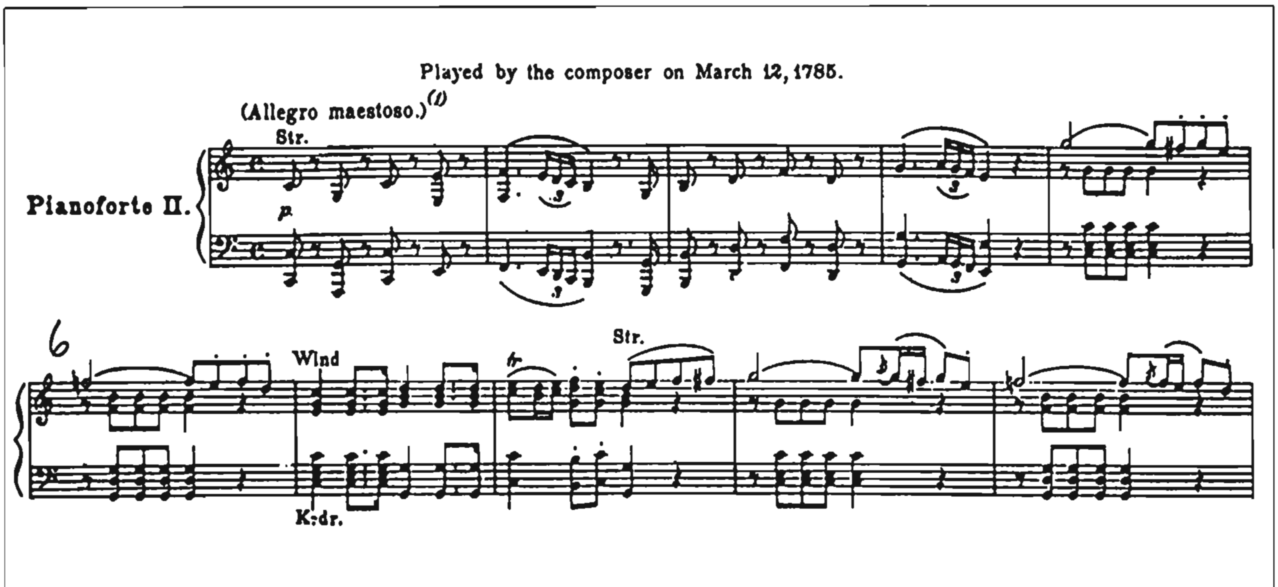

fig. 3 Het begin van Mozarts pianoconcert in C groot, KV 467, met daarin in de maten 5, 8 en 9 een 'Fis van Euler' (voor de duidelijkheid is de orkestpartij tot twee notenbalken gereduceerd).

Kleine-tertssystemen

Euler beschouwde ook andere systemen; veel aandacht besteedde hij aan het volgende systeem van twaalf tonen per octaaf:

```
 A  –  E  –  B  – Fis
 |     |     |     |
 F  –  C  –  G  –  D
 |     |     |     |
Des – As  – Es  – Bes
```

Dit systeem bevat twee grote-terts deelsystemen: C-groot en As-groot. Maar het bevat ook de *kleine drieklanken* C–Es–G op de tonica C, G–Bes–D op de dominant G, en F–As–C op de subdominant F, samen met de leidtonen B, Fis en E. Als je de muziekliteratuur onderzoekt, zie je dat zo'n 4–bij–3 schema een uitstekende theoretische grondslag vormt voor de beschrijving van kleine-tertstoonsoorten. Bach, Mozart en Beethoven blijken in hun kleine-tertscomposities juist deze twaalf tonen te gebruiken, en bijna steeds is ook de harmonische functie van die twaalf tonen uit het schema verklaarbaar. Bovendien wordt hierdoor duidelijk wat de relatie is tussen een kleine-tertssysteem en het bijbehorende grote-tertssysteem: het eerste is een *uitbreiding* van het tweede: het tooncentrum (de tonica) is hetzelfde, maar de harmonische mogelijkheden zijn uitgebreid. Het is uitermate verrassend om te constateren hoe goed dit theoretische model aansluit bij de muzikale praktijk. In figuur 4 staat een fragment in G-klein uit hetzelfde pianoconcert van Mozart waaraan ook figuur 3 ontleend is. Overigens, waarom de tonica daar G is en niet C, zullen we hieronder verklaren.

Modulaties

In principe kan men Eulers schema natuurlijk onbeperkt naar alle kanten uitbreiden. Dan ontstaat een onbegrensd tweedimensionaal tableau van de vorm

```
     |      |       |      |      |      |
–  Fis  –  Cis  –  Gis  – Dis  – Ais  – Eis  –
     |      |       |      |      |      |
–   D   –   A   –   E   –  B   – Fis  – Cis  –
     |      |       |      |      |      |
–  Bes  –   F   –   C   –  G   –  D   –  A   –
     |      |       |      |      |      |
–  Ges  –  Des  –  As   – Es   – Bes  –  F   –
     |      |       |      |      |      |
–  Eses – Beses –  Fes  – Ces  – Ges  – Des  –
     |      |       |      |      |      |
```

Horizontaal vindt men steeds kwintintervallen, en verticaal (van beneden naar boven) grote tertsen. In dat schema vinden alle grote- en kleine-tertssystemen hun plaats, want elke toon kan als tonica genomen worden, als centrum van een vier–bij–twee blok (voor de grote-tertssystemen) of een vier–bij–drie blok (voor de kleine-tertssystemen). Je kunt er ook *modulaties* mee verklaren. Een modulatie is de overgang binnen een muziekstuk van één toonsysteem naar een ander. Het tonale centrum, de tonica, verschuift dan van de ene toon naar de andere. Modulaties zijn in onze muziek nog maar van betrekkelijk recente datum: tot in de zeventiende eeuw kwamen ze eigenlijk nauwelijks voor: men koos zich in het begin van een stuk een bepaald tonaal centrum met de daarbij behorende tonenvoorraad, en bleef daar gedurende het gehele stuk mee werken. Vanaf de achttiende eeuw begonnen de componisten echter steeds meer modulaties toe te passen.

fig. 4 Fragment in G-klein uit het eerste deel van hetzelfde pianoconcert van Mozart. Hierin komen precies alle tonen uit het vier–bij–drie schema van G-klein voor.

Kwintmodulaties worden het meest gebruikt: ze verlopen vrijwel moeiteloos. Haast ongemerkt verschuift het tonale centrum een kwint omhoog of omlaag. In de klassieke sonatevorm wordt het tweede thema vrijwel altijd in de dominant gespeeld, dat wil zeggen dat er een modulatie over een kwint omhoog heeft plaatsgevonden. Maar eerst bij Mozart, later ook bij Beethoven, en vooral bij Schubert vind je ook modulaties over een *grote terts*. Uit het kwinten-tertsenschema zijn die modulaties gemakkelijk te verklaren: het tonale centrum schuift dan een plaats omhoog of omlaag. Ook de overgang van majeur naar mineur en omgekeerd is aan de hand van dit schema uitstekend te volgen. Het is fascinerend om de modulaties bij Mozart, Beethoven en Schubert op deze wijze te analyseren.

Stemmingsproblemen

Het tweedimensionale kwinten-tertsenrooster van hierboven bevat een onbeperkt aantal tonen per octaaf: alle tonen zijn verschillend, ook al komen dezelfde toonnamen meermalen voor (maar dat is weer een kwestie van muzikale traditie). De lezer van deze *Nieuwe Wiskrant* zal na kunnen gaan dat dit een direct gevolg is van het feit dat een positieve gehele macht van 2 nooit gelijk kan zijn aan een positieve gehele macht van 3 of van 5. Heb je echter een instrument met een beperkt aantal tonen per octaaf, zoals bijvoorbeeld een orgel of een piano, dan kun je in de problemen komen wanneer je modulaties wil toepassen. Het moderne klavier heeft slechts twaalf toetsen per octaaf, en de vraag is dus hoe je de bijbehorende tonen moet stemmen. Zelfs een simpele kwintmodulatie kan al moeilijkheden veroorzaken: de toon A in F-groot is een andere toon dan de A in G-groot die uit C-groot ontstaat door een kwint omhoog te moduleren. In de loop der tijden heeft men op allerlei manieren gepoogd oplossingen voor dit probleem te vinden. Een klavier met meer dan twaalf toetsen per octaaf is wel geprobeerd, doch dit stuitte op praktische bezwaren. Al in een vroeg stadium heeft men de *evenredige twaalftoonsstemming* voorgesteld, een methode waarbij men het octaaf in twaalf gelijke deelintervallen verdeelt. Zo'n verdeling maakt onbeperkt transponeren en moduleren mogelijk: alle toonsoorten zijn 'even vals'. De afwijking die je in dat systeem voor de kwint krijgt, is uitermate klein, maar de grote terts is hoorbaar vals. Het heeft tot in de vorige eeuw geduurd totdat men zich over dit bezwaar heenzette, en de evenredige stemming als stemmingswijze voor piano's accepteerde. Tot die tijd werkte men met allerlei compromisstemmingen die bepaalde toonsoorten bevoordeelden ten koste van andere. Onbeperkt moduleren stuitte daarbij dus op bezwaren: 'ver verwijderde' toonsoorten klonken storend vals.

Toen in de negentiende eeuw componisten steeds meer modulaties gingen toepassen, moesten die compromisstemmingen geleidelijk aan plaats maken voor de evenredige octaafverdeling. Het enorme succes van de piano als dominerend muziekinstrument sinds de tweede helft van de achttiende eeuw – vrijwel alle componisten waren goede pianisten, en veel componisten componeerden aan de piano – heeft ertoe bijgedragen dat velen de evenredige stemming thans niet meer ervaren als een compromissysteem dat alleen voor toetsinstrumenten noodzakelijk is, maar als een van de grondslagen van de muziek. Zij beschouwen de verdeling van het octaaf in twaalf gelijke deelintervallen als een soort muzikaal axioma. Daardoor worden echter alle harmonische wetmatigheden verduisterd, en men dringt ook de menselijke zang, het begin en het einde van alle muziek, in een keurslijf van valse intonaties en onzuivere intervallen. Het is niet verwonderlijk dat het axioma van de octaafverdeling in twaalf gelijke delen slechts tot doodlopende wegen heeft geleid. Het verloochent een van de belangrijkste wezenskenmerken van de muziek: de harmonie.

Literatuur

Het bovenstaande wordt veel uitgebreider behandeld in mijn boek *De Fis van Euler* (Aramith Uitgevers, Bloemendaal 1989, ISBN 90-6834-051-4), dat echter sinds kort uitverkocht is.
Wel verkrijgbaar zijn twee voortreffelijke 'klassieken':
Hermann L.F. Helmholtz: *On the Sensations of Tone* (Engelse vertaling en uitgebreide bewerking (1885) door Alexander J. Ellis van *Die Lehre von den Tonempfindungen*, Heidelberg, 1862, 1877), heruitgave Dover, New York, 1954, ISBN 0-486-60753-4
Sir James Jeans: *Science and Music*, Cambridge, 1937, heruitgave Dover, New York, 1968, ISBN 0-486-61964-8

VIERKANT wiskundeclubs

In het schooljaar 1995/96 zullen er drie VIERKANT wiskundeclubs zijn. Op de clubmiddagen worden interessante opdrachten van verschillende, in de school niet voorkomende, wiskundegebieden behandeld. De clubs zijn open voor alle middelbare scholieren. Leerlingen van andere scholen zijn ook welkom!

De lokaties en de clubleiders zijn:
Herman Wesselink College, Startbaan 3, Amstelveen
contactpersoon: Dhr. C. Buissant des Armorie
tel. 020-6459 751

Amsterdams Lyceum, Valeriusplein 15, Amsterdam
contactpersoon: Dhr. J. Colle
tel. 020-6627 790

Gymnasium Celeanum, Veerallee 30, Zwolle
contactpersoon: Mevr. G. de Vries-Lukkien
tel. 038-223722

Voor informatie over tijden en programma's op de verschillende lokaties kunt u de clubleiders bellen.
Mocht u ook een lokale club willen beginnen, of wilt u materiaal voor enkele leerlingen om schriftelijk mee te doen, dan kunt u contact opnemen met het VIERKANT kantoor:

Dr. Zsófia Ruttkay
p/a Fac. Wiskunde en Informatica Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam
tel. 020-444 7776