Speltheorie, wiskunde van het strategisch handelen

Voordracht gehouden op de NWD

E. van Damme
CentER for Economic Research, Tilburg

Speltheorie

Speltheorie is een wiskundige theorie voor het modelleren en analyseren van sociale conflictsituaties. Dit zijn situaties waarin meerdere beslissers betrokken zijn die elk hun eigen doelstelling hebben en waarvan ieder probeert een resultaat te bereiken dat voor hem of haar zo gunstig mogelijk is. De theorie ontleent haar inspiratie aan gezelschapsspelletjes en in het bijzonder aan de vragen: bestaat er in elk spel een optimale manier van spelen, en hoe kan de optimale strategie in een concreet geval gevonden worden? De wiskundige basis voor de theorie werd gelegd door John von Neumann in 1928. In het boek *The Theory of Games and Economic Behavior* dat Von Neumann in 1944 samen met de econoom Oskar Morgenstern schreef, werd getoond hoe de theorie op economische en sociale problemen kon worden toegepast. In 1994 werd de Nobelprijs in de economie toegekend aan de speltheoretici John Nash, John Harsanyi en Reinhard Selten voor hun baanbrekende werk in de jaren vijftig en zestig, in het bijzonder voor het bewijs dat optimale (evenwichts)strategieën altijd bestaan en voor hun karakterisering daarvan in speciale situaties. In deze bijdrage illustreer ik met behulp van voorbeelden een aantal begrippen en ideeën uit de speltheorie.
Ik begin met simpele gezelschapsspelletjes waarin de optimale strategieën expliciet berekend kunnen worden. Daarna komen ingewikkelder spelen aan de orde waarvan we wel weten dat optimale strategieën bestaan, zonder dat die echter ook expliciet bepaald zijn. Vervolgens beschouwen we twee spelletjes waarin het geheimhouden van de strategie belangrijk is. Tenslotte bespreken we een aantal meer economische voorbeelden.

Vooruitzien en terugredeneren

Niet alle gezelschapsspelletjes vereisen analyse. Zo is ganzebord heel gezellig, maar men hoeft als speler geen beslissingen te nemen: de uitkomst wordt volledig door het lot bepaald. Bij andere spelen, zoals roulette, wordt de uitkomst (of men wint en hoeveel) bepaald door de beslissing van de speler (of men speelt op nummer, of op kleur, enzovoort) en het lot. Ook deze kansspelletjes zijn geen onderwerp van studie in de speltheorie. In de speltheorie gaat het om spelen waarin verschillende spelers met en tegen elkaar spelen. Denk, bijvoorbeeld, aan boter kaas en eieren, dammen, schaken, poker, bridge en risk. Elke speler probeert te winnen en ieder wil weten wat voor hem de beste strategie is. Om deze te bepalen moet de speler een inschatting maken van wat de andere spelers zullen doen: hij moet vooruitzien en terugredeneren. We illustreren die procedure aan de hand van een simpel spelletje Nim.
Op tafel ligt een stapeltje van twintig lucifers. Er zijn twee spelers die om beurten één, twee of drie lucifers moeten wegruimen. Degene die de laatste lucifer wegneemt verliest. Hoe moet een speler spelen om te winnen? Welke speler wint als beide spelers optimaal spelen?
De situatie met twintig lucifers is (ietwat) ingewikkeld. Echter, in het verloop van het spel wordt het aantal lucifers kleiner en de situatie inzichtelijker. Bovendien geldt dat, om te weten hoe men nu moet spelen, men eigenlijk moet weten hoe men zou spelen als er minder lucifers zijn. Het ligt dus voor de hand om terug te redeneren, om eerst de gemakkelijkste problemen op te lossen. Als er nog één lucifer over is, verliest diegene die begint, dat is duidelijk. Als er nog twee, drie of vier lucifers liggen, kan de eerste speler winnen omdat hij een situatie kan forceren die voor de ander verliezend is. Hij kan er namelijk voor zorgen dat er één lucifer overblijft. Er vanuit gaande dat mijn tegenstander even slim is als ik, doe ik er dus goed aan niet twee, drie of vier lucifers te laten liggen. Echter, als ik aan zet ben met vijf lucifers moet ik wel een gunstige situatie voor de ander overlaten: vijf is een verliezende positie. Maar nu geldt dat zes, zeven en acht winnende posities zijn. Terugredenerend zien we dat 9, 13, 17, 21... verliezend zijn. In het oorspronkelijke spel heeft de beginnende speler dus een winnende strategie: Reduceer het aantal lucifers achtereenvolgens tot 17, 13, 9, 5, 1.

Door terugredeneren kan ook de volgende puzzel opgelost worden. Een bende piraten heeft een kist met gouden munten gevonden. De kapitein stelt de volgende procedure voor om de buit te verdelen. In hiërarchische volgorde (de jongste matroos eerst, de kapitein laatst) mag ieder een voorstel doen over hoeveel ieder krijgt. Als de piraten het unaniem eens zijn over het voorstel van de jongste matroos, wordt de buit overeenkomstig verdeeld. Als minstens één piraat het niet met dit voorstel eens is, krijgt de jongste matroos niets en mag hij over de verdeling ook niet meer meestemmen. Vervolgens mag de op één na jongste matroos een voorstel doen. Als zijn voorstel unaniem aanvaard wordt, wordt het geïmplementeerd; anders krijgt ook hij niets, enzovoorts. Welk voorstel moet de jongste matroos doen en hoe wordt de buit uiteindelijk verdeeld? Is het verstandig voor de piraten om met het voorstel van de kapitein in te stemmen?

In principe kan ook schaken met 'achterwaartse inductie' worden opgelost. Er zijn slechts eindig veel mogelijke toestanden waarin het spel zich kan bevinden. Sommige toestanden zijn winnend voor wit (dat wil zeggen wit heeft een strategie die winst garandeert onafhankelijk van wat zwart doet), andere zijn winnend voor zwart en weer andere eindigen in remise als beide spelers optimaal spelen (elke speler heeft een strategie die minstens remise garandeert onafhankelijk van wat de ander doet). Door terugredeneren kan theoretisch bepaald worden tot welke klasse van toestanden de begintoestand behoort. Het enige probleem is dat het aantal toestanden nogal groot is: vooralsnog weten we dus niet welke strategieën optimaal zijn en wie in principe kan winnen.

Hex is een aardig voorbeeld van een spel dat ingewikkelder is dan Nim maar eenvoudiger dan schaken. We kunnen bewijzen dat de beginnende speler een winnende strategie heeft, maar deze is niet eenvoudig aan te geven. Hex wordt gespeeld op een bord van n^2 zeshoeken die in de vorm van een parallellogram gearrangeerd zijn. (Zie figuur 1 voor het n=7 geval.)

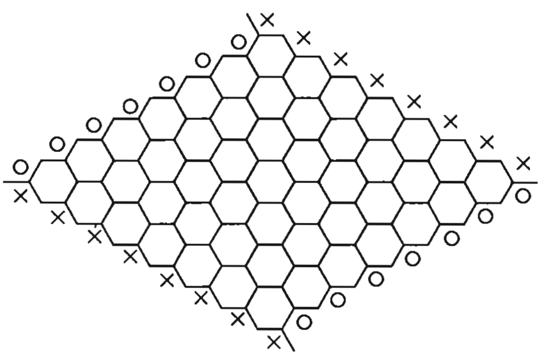

fig. 1

Speler I bezit de Noord-Oost en Zuid-West kant van het bord, aangegeven met ×. Speler II bezit de overige kanten, zoals aangegeven met o. De spelers moeten om de beurt een nog niet bezette zeshoek van hun merkteken (× of o) voorzien. Winnaar van het spel is diegene die het eerst in staat is zijn twee kanten te verbinden via een rij zeshoeken die alle zijn merkteken dragen. De bewering is nu dat speler I een winnende strategie heeft.

Het belangrijkste element in het bewijs is dat geen enkel partijtje Hex onbeslist kan eindigen. De intuïtie hiervoor is als volgt. Beschouw de kanten met × als zeeën en de kanten met o als land. Als alle zeshoeken 'gelabeled' zijn, dan geldt ofwel dat de zeeën door een rivier verbonden zijn (dan wint speler I) of dat een bergketen de oceanen scheidt (en dan wint II)[1]. Dit gegeven gebruikend is de rest van het bewijs eenvoudig. Stel dat de bewering dat I een winnende strategie heeft niet juist zou zijn. Dan zou, onafhankelijk van wat I doet, II altijd kunnen winnen. II zou dus een winnende strategie hebben. Beschouw nu de volgende strategie voor I. De eerste keer zet hij een × op een willekeurige plaats. Elke volgende keer pretendeert I dat hij het laatst geplaatste × nog niet gezet heeft, dat hij speler II is (maar spelend met ×) en hij plaatst een × daar waar de optimale strategie van II dit voorschrijft. (Tenzij hij daar al een × heeft staan, dan zet hij een × op een willekeurige plaats.) Deze strategie is winnend voor I. De tegenspraak met de aanname dat I niet kan winnen laat zien dat deze aanname onjuist is. I moet dus een optimale strategie hebben. (Helaas is bovenstaand bewijs niet constructief, het levert geen hint hoe de optimale strategie eruit ziet.)

Gemengde strategieën

In alle tot nu toe beschouwde voorbeelden kon beweerd worden dat een optimale strategie bestaat. Het volgende voorbeeld, dat ontleend is aan Sir Arthur Conan Doyle en dat ook behandeld wordt in het boek van Von Neumann en Morgenstern, laat zien dat de situatie niet altijd zo eenvoudig is.
Sherlock Holmes probeert aan zijn vijand Professor Moriarty te ontsnappen vanuit Londen en naar het Europese continent te ontkomen. Op het moment dat de trein naar Dover Waterloo Station verlaat, ziet Holmes Moriarty het station binnenkomen. Moriarty ziet Holmes in de trein en heeft meteen Holmes' plannen door. Holmes vreest dat Moriarty een snelle trein neemt die nog voor Holmes' trein in Dover aankomt. Holmes overweegt daarom in Canterbury – het enige tussenliggende station waar zijn trein stopt en waar de extra snelle trein niet stopt – uit te stappen. Echter, Moriarty zou ook dit plan kunnen doorzien en een langzame trein nemen. Als beiden in Canterbury uitstappen, ontsnapt Holmes met kans 1:2. Als Moriarty Holmes in Dover treft, ziet het er slechter voor Holmes uit; hij kan dan verwachten door Moriarty gedood te worden. Wat moet Holmes doen? Wat is de kans dat hij aan zijn belager kan ontsnappen?

De matrix in figuur 2 geeft het probleem wiskundig weer.

De rijen van de matrix corresponderen met de mogelijke strategieën van Holmes (C=Canterbury, D=Dover), de kolommen zijn de strategieën van zijn tegenstander (L=langzaam, S=snel). Het getal in de matrix is de kans dat Holmes ontsnapt.

	L	S
C	$\frac{1}{2}$	1
D	1	0

fig. 2

Als het voor Holmes optimaal zou zijn om onderweg uit te stappen, dan zou zijn slimme tegenspeler dit ook kunnen beredeneren. Deze zou bijgevolg de langzame trein kiezen. Holmes, op zijn beurt, kan dit dan weer voorzien en komt zo tot de conclusie dat het beter is om niet uit te stappen. Echter, de aanname dat doorrijden tot Dover optimaal is, leidt tot de conclusie dat stoppen beter is. De tegenspraak suggereert dat Holmes geen optimale strategie heeft. Deze conclusie is inderdaad juist. Tenminste, geen van beide (zogenaamde) zuivere strategieën is optimaal. We hebben echter niet alle mogelijke strategieën bekeken. Holmes kan zijn beslissing ook van het lot laten afhangen. Hij zou bijvoorbeeld een munt op kunnen gooien en bij 'kop' uit kunnen stappen en bij 'munt' door kunnen rijden. Het voordeel van zo'n gemengde strategie is dat Moriarty de uitkomst ervan niet precies kan voorspellen. (Moriarty is wel slim, maar niet helderziend.) Omdat Holmes het maken van een juiste voorspelling zo moeilijk mogelijk wil maken, ligt het gebruik van zo'n gemengde strategie voor de hand. De vraag is dus: Met welke kans moet Holmes uitstappen? Analoog: met welke kans moet Moriarty de snelle trein nemen?

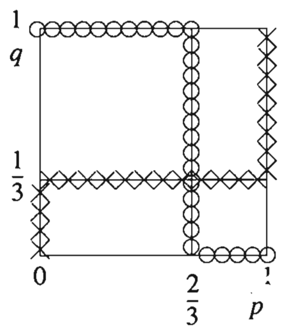

fig. 3

Het antwoord kan worden afgelezen in figuur 3. Langs de horizontale as staat p, de kans dat Holmes in Canterbury uitstapt, en langs de verticale as q, de kans dat Moriarty de snelle trein neemt. Als p en q gekozen worden, is de kans dat Holmes ontsnapt gelijk aan

$$pq + \frac{1}{2}p(1-q) + (1-p)(1-q) = 1 - \frac{1}{2}p - q + \frac{3}{2}pq$$

Moriarty wil deze kans minimaliseren (bij gegeven p), terwijl Holmes de kans wil maximaliseren (bij gegeven q). De grafiek die met o gelabeld is, geeft de (voor Moriarty) optimale q bij elke p.
Er geldt dat $q^0(p) = 1$ als $p < \frac{2}{3}$ en $q^0(p) = 0$ als $p > \frac{2}{3}$. Als Holmes met kleine (grote) kans uitstapt, dan wil Moriarty doorrijden (uitstappen). Analoog geeft de met × gelabelde grafiek die p die voor Holmes het beste is, gegeven q. Er geldt dat $p = 1$ als $q > \frac{1}{3}$ en $p = 0$ als $q < \frac{1}{3}$. Het snijpunt van de twee grafieken geeft de enige stabiele situatie, in technisch jargon: het enige Nash evenwicht. In dit geval wordt het snijpunt gegeven door $p = \frac{2}{3}$ en $q = \frac{1}{3}$. Holmes moet met kans $\frac{2}{3}$ uitstappen en Moriarty moet met kans $\frac{1}{3}$ de snelle trein nemen. De kans dat Holmes ontsnapt als beide spelers optimaal handelen, is gelijk aan $\frac{2}{3}$. De situatie ziet er voor Holmes dus niet zo slecht uit.

Het bovenstaande probleem heeft een vergelijkbare structuur als dat van een voetballer die een penalty moet nemen en die een uitstekende keeper tegenover zich weet. Veronderstel dat de speler *moet* kiezen tussen de linkerhoek (L) en de rechterhoek (R) en dat L zijn zwakke kant is. In het bijzonder, stel dat, als de keeper naar de verkeerde kant duikt, een schot naar rechts altijd doel treft, maar dat een schot naar links er in 25% van de gevallen naast gaat. Stel bovendien dat, als de keeper de goede hoek gekozen heeft, hij de bal ook houdt. Welke hoek moet de speler kiezen? De zwakke of de sterke? Wat moet de keeper doen?
Zoals in het bovenstaande voorbeeld is het ook hier weer belangrijk de ander in het onzekere te laten: de speler moet niet altijd hetzelfde doen, hij moet afwisselen. Maar hoe vaak moet hij dan zijn zwakke hoek kiezen? In meer of minder dan de helft van de gevallen? Het, in eerste instantie verrassende, antwoord is dat de speler vaker naar zijn slechte hoek moet schieten. Immers, als de speler L met een kans van hooguit 50% kiest, dan zal de keeper zich op de 'goede' hoek concentreren en naar R duiken, maar dan is het voor de speler beter om naar L te schieten. De optimale kansen kunnen op dezelfde manier als in het bovenstaande voorbeeld berekend worden. De speler schiet met kans $\frac{4}{7}$ naar links en de keeper duikt met $\frac{4}{7}$ naar rechts. Elk van hen kent dus meer gewicht toe aan die hoek waar hij relatief het slechtst staat. Als beiden optimaal spelen dan is de kans dat een doelpunt gescoord wordt gelijk aan $\frac{3}{7}$.

Tot besluit van deze sectie geef ik het algemene model waarin bovenstaande voorbeelden passen. Een spel is gedefinieerd door een spelerverzameling I, voor elke speler $i \in I$ een verzameling van strategieën s_i en tevens een uitbetalingsfunctie u_i. Deze laatste kent aan elke strategiecombinatie $s = (s_1, ..., s_n)$ met $s \in S_1 \times ... \times S_n$ een reëel getal $u_i(s)$ toe. $u_i(s)$ is de uitbetaling aan speler i als s gespeeld wordt, het is een maat voor hoe speler i de uitkomst waardeert die door s bepaald wordt. Een *Nash evenwicht in zuivere strategieën* is een strategievector s^* die de eigenschap heeft dat voor elke speler i en elke $s_i \in S_i$

$$u_i(s^*) \geq u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, ..., s_I^*)$$

dat wil zeggen, geen enkele speler kan door eenzijdig af te wijken een hogere uitbetaling bereiken. Alle in de vorige sectie gegeven voorbeelden bezitten zo'n zuiver evenwicht, maar de voorbeelden uit deze sectie niet. Deze laatste bezitten wel een evenwicht in gemengde strategieën. Een gemengde strategie van speler i is een kansverdeling over de verzameling van zuivere strategieën S_i.
De interpretatie is dat speler i met behulp van een toevalsmechanisme een zuivere strategie uitkiest. Een Nash evenwicht in gemengde strategieën is een I-tal van zulke kansverdelingen (één voor elke speler) die aan I ongelijkheden (vergelijkbaar met de bovenstaande) voldoen. Nash introduceerde dit concept in 1950 en hij bewees dat dit stelsel altijd minstens één oplossing heeft als de verzamelingen S_i alle eindig zijn en als de functies u_i zogenaamde Von Neumann-Morgenstern nutsfuncties zijn. Nash' bewijs van het bestaan van evenwichten berust op de al eerder genoemde dekpuntstelling van Brouwer. (Het is ook interessant om te vermelden dat Nash een van de uitvinders van het boven besproken spel Hex is.)

Het dilemma van de gevangenen

In deze sectie richten we onze aandacht op situaties waarin de belangen van de spelers niet volledig tegengesteld zijn. In zo'n situatie hoeft het individuele optimum niet met het sociale optimum samen te vallen, zoals in sterke vorm door het 'dilemma van de gevangenen' geïllustreerd wordt.

Twee personen worden ervan verdacht gezamenlijk een moord gepleegd te hebben en kunnen daarvoor elk een gevangenisstraf van tien jaar krijgen. Beiden zijn in voorlopige hechtenis genomen en gescheiden opgesloten, zodat ze niet met elkaar kunnen communiceren. De officier van justitie heeft echter (nog) geen sluitend bewijs en zonder aanvullend bewijs kan elke verdachte slechts voor een gering vergrijp (zoals verboden wapenbezit), met een maximale gevangenisstraf van één jaar, bestraft worden. Om het aanvullend bewijs te verkrijgen, probeert de officier de verdachten te laten bekennen. Hij biedt elke verdachte aan deze vrij te laten als hij bekent en als hij de enige is die bekent. Als beide verdachten bekennen, is geen van de bekentenissen onmisbaar. In dit geval biedt de officier elk van de verdachten een strafvermindering van twee jaar als beloning van de samenwerking met het gezag.
Wat moet elke verdachte doen als hij zo kort mogelijk in de cel wil verblijven?

De tabel in figuur 4 geeft een representatie van het probleem. De rijen corresponderen met de strategieën voor de ene verdachte en de kolommen met die voor de andere (B = bekennen, O = ontkennen). In elke cel is het eerste getal het aantal jaar gevangenisstraf voor de 'rij-speler', het tweede het aantal jaar cel voor de 'kolom-speler'.

	B	O
B	8, 8	0, 10
O	10, 0	1, 1

fig. 4

Omdat de gevangenen niet met elkaar kunnen communiceren, kan de een niet direct de beslissing van de ander beïnvloeden. Elk moet dus de beslissing van de ander als een gegeven beschouwen. Als de eerste denkt dat de ander bekent, is het optimaal voor hem om ook te bekennen: strafvermindering is beter dan tien jaar cel. Als de eerste denkt dat de ander daarentegen zal ontkennen, is het eveneens beter te bekennen, dan komt hij immers direct vrij.
De conclusie is dat het, onafhankelijk wat de ander doet, optimaal is te bekennen. Bijgevolg zullen de gevangenen, als ze verstandig zijn, beide bekennen en zullen ze elk acht jaar de cel in gaan. (B,B) is het enige Nash evenwicht van het spel. Deze uitkomst is echter niet de beste uitkomst voor de gevangenen gezamenlijk: als ze beiden zouden blijven ontkennen, zou elk slechts één jaar straf krijgen.
Het 'dilemma van de gevangenen' steekt in veel situaties de kop op. Men kan bijvoorbeeld denken aan de wapenwedloop en allerlei milieuproblemen. Steeds is het zo dat, als geen bindende contracten kunnen worden afgesloten, de oplossing die ontstaat als ieder voor zich (optimaal) handelt, niet in het 'algemeen belang' is. Een concreet voorbeeld kan ontleend worden aan de recente discussie over de verlenging van de openingstijden van winkels. Stel dat in een dorp twee winkels zijn die elk een marktaandeel van 50% hebben. Stel dat de nieuwe wet langere openingstijden toestaat en dat de kosten van het langer open blijven overeen komen met de winst die gemaakt wordt op een marktaandeel van 10%. Stel dat, als één winkel langer open blijft, deze een marktaandeel van 70% verwerft, maar dat, als beide langer open zijn, elk zijn marktaandeel van 50% behoudt. Elke winkelier probeert zijn netto winst te maximaliseren. Moet een winkelier zijn winkel langer open houden?

	L	N
L	40, 40	60, 30
N	30, 60	50, 50

fig. 5

De tabel in figuur 5 (L = langer, N = niet) laat zien dat ook hier sprake is van een 'gevangenendilemma': wat de ander ook doet, het is beter om langer open te blijven. Beide winkels zullen langer open blijven en elk zal zijn marktaandeel behouden. De winkeliers zullen erop achteruit gaan (dezelfde opbrengst bij langere openingstijden), maar de consumenten profiteren.

De vloek van de winnaar

Het recht om in een bepaald gebied naar olie te boren wordt in sommige landen (waaronder de Verenigde Staten) geveild: de hoogste bieder verkrijgt het recht en mag boren. In de jaren zestig kwamen de oliemaatschappijen tot de conclusie dat er eigenlijk steeds minder olie gevonden werd dan men, en in het bijzonder de winnaar van de veiling, gedacht had. Met behulp van speltheorie kan deze 'vloek van de winnaar', het feit dat de winnaar in elk gebied minder winst maakte dan hij gedacht had, verklaard worden. Hoewel de wiskunde die hiervoor nodig is het niveau van de middelbare school overstijgt, kan men de essentie van het probleem toch in een eenvoudig experiment duidelijk maken. De wiskundige structuur van het spel uit dit experiment is immers vergelijkbaar met de structuur van het spel dat de oliemaatschappijen spelen.

Neem een pot en vul deze bijvoorbeeld met knikkers. Spreek af dat elke knikker een bepaalde waarde vertegenwoordigt, zeg één dubbeltje. De totale pot heeft nu een bepaalde waarde. De deelnemers aan het experiment (de leerlingen in de klas) kunnen een inschatting maken van hoeveel de pot waard is. Men kan de deelnemer nu vragen onafhankelijk van elkaar op een briefje (met naam) twee getallen op te schrijven: (a) hoeveel men denkt dat de waarde van de pot is en (b) hoeveel men bereid is te bieden. Diegene die het experiment uitvoert (de leraar) zamelt alle briefjes in en kijkt wie het hoogst geboden heeft. Deze persoon krijgt een bedrag gelijk aan de waarde van de pot, maar betaalt daarvoor het bedrag dat hij geboden heeft.

Men mag verwachten dat het experiment tot het volgende resultaat leidt: De schattingen (bij (a)) van de waarde zijn zo ongeveer normaal (klokvormig) verdeeld rond de echte waarde van de pot. In het bijzonder geldt dat het gemiddelde van de schattingen dus niet zoveel van de echte waarde afwijkt. Het bod (b) van een deelnemer is meestal en logischerwijs lager dan de bij (a) aangegeven schatting. (Een speler maakt alleen winst als hij wint en als zijn bod lager is dan de waarde.) De winnaar van de veiling is diegene met het hoogste bod en dat is ook vaak diegene die bij (a) de hoogste schatting had. Zeker bij grote aantallen deelnemers is het dus erg waarschijnlijk dat deze persoon de waarde van de pot te hoog heeft ingeschat. Alle andere personen hebben dus lager ingeschat en het gemiddelde daarvan is zo ongeveer de waarde van de pot. Als het bod van de winnaar dus niet al te veel lager ligt dan zijn schatting, dan zal dit bod hoger zijn dan de echte waarde. In dit geval valt de winnaar ten prooi aan de vloek van de winnaar: hij betaalt meer voor de pot dan deze waard is. Tijdens de Nationale Wiskunde Dagen op 4 februari 1995 in Noordwijkerhout werd deze vloek inderdaad waargenomen.

De verklaring van het optreden van de vloek van de winnaar is dat een bieder zich niet altijd realiseert dat hij zijn bod moet conditioneren op het feit dat dit het hoogste is. Immers alleen in dat geval is het bod relevant. Echter, als ik hoor dat mijn bod het hoogste is, dan is dat slecht nieuws, alle andere bieders hebben minder geboden en denken dus waarschijnlijk dat het object minder waard is. Een verstandige bieder houdt hier van te voren al rekening mee. Wiskundige analyse heeft oliemaatschappijen in staat gesteld de vloek van de winnaar te begrijpen en te vermijden. Een soortgelijke analyse is recent door de regering van de Verenigde Staten gebruikt bij de beslissing hoe de rechten voor het gebruik van ether frequenties van telecommunicatie toe te wijzen. Speltheoretici adviseerden het gebruik van een speciale veiling en deze leverde 9 miljard dollar op. De regering was daarmee erg tevreden. Ook de deelnemende bedrijven waren tevreden omdat de veiling efficiënt werkte: hoewel ze veel moesten betalen, kwam elk recht terecht bij diegene die dit het best kan gebruiken.

Tot slot nog een voorbeeld van een experiment waarmee men escalatie (van geweld of van ongewenste handelingen) kan illustreren. De spelleider stelt één gulden beschikbaar die hij verkoopt aan diegene die het hoogst biedt. Echter, in tegenstelling tot de gewone veiling waarbij alleen de hoogste bieder betaalt, geldt nu dat zowel de hoogste als de een na hoogste bieder hun bod aan de spelleider moeten betalen. (De een na hoogste bieder raakt dus geld kwijt.) In dit spel kan de situatie ontstaan waarin het hoogste bod 90 cent is en het op één na hoogste 80 cent. Als diegene met het laagste bod zijn bod niet verhoogt, verliest hij zeker 80 cent. Hij zou echter ook zijn bod kunnen verhogen tot, bijvoorbeeld *f* 1,10. Als de ander dan niet verder biedt, verliest hij slechts een dubbeltje. Men kan terechtkomen in een situatie waarin beiden weten dat ze verliezen maar toch doorbieden om zo te pogen hun verlies zoveel mogelijk te beperken. (De optimale strategie kan met het principe van achterwaartste inductie bepaald worden. Het geval met twee spelers met een maximaal bod van *f* 2,50 en waarin biedingen een geheel veelvoud van een kwartje moeten zijn is relatief eenvoudig te analyseren.)

Conclusie

In het bovenstaande heb ik geprobeerd een aantal aspecten van de speltheorie te belichten. Ik heb me, vanwege de ruimte, moeten beperken tot de zogenaamde niet-coöperatieve speltheorie. In de zogenaamde coöperatieve theorie wordt aangenomen dat spelers bindende contracten kunnen afsluiten die dan altijd tot efficiënte uitkomsten leiden. Deze theorie wordt onder andere toegepast bij kosten allocatie problemen. Hoe moet bijvoorbeeld een boedel bij faillissement verdeeld worden? Wellicht kan in een volgende bijdrage aan deze tak van de theorie aandacht besteed worden. Ik hoop aangetoond te hebben dat speltheorie een veelzijdig en boeiend vak is. Wiskundig gezien is het geen moeilijk vak. Wel is het zo dat de uitkomsten die de speltheorie oplevert niet altijd overeenstemmen met wat het gezonde verstand suggereert. De formele wiskundige analyse helpt dan om dat verstand aan te scherpen.

In de Nederlandse taal zijn, voor zover mij bekend, geen elementaire verhandelingen over dit gebied beschikbaar. Het boek van Dixit en Nalebuff biedt een elementaire inleiding in het Engels. Het boek van Binmore is wiskundig wat geavanceerder, maar leuk om te lezen. Berlekamp et al. bespreken een groot aantal spelletjes, vooral met een combinatorische structuur. Het boek van Poundstore is een, snel weg lezende, biografie van een van de grondleggers van de speltheorie, dat ook op een aantal speltheoretische aspecten ingaat.

De auteur bedankt Peter Borm en Anne van den Nouweland voor hun commentaar op een eerdere versie.

Eric van Damme
CentER for Economic Research
Postbus 90153
5000 LE Tilburg

Noot

[1] Het formele bewijs is wat ingewikkelder, maar het resultaat is dan ook krachtig: het kan gebruikt worden om Brouwer's dekpuntstelling te bewijzen. Deze stelling zegt dat als $f:X \rightarrow X$ een continue functie is die een compacte, convexe deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ in zichzelf afbeeldt, er een element x in X bestaat dat vast blijft, dus $f(x) = x$.

Literatuur

Berlekamp, E., J. Corway en R. Guy. *Winning ways for your mathematical plays*, Academic Press, 1982.

Binmore, K. *Fun and games: A text on game theory*, D.C. Heath, Lexington MA, 1992.

Dixit, A. en B. Nalebuff. *Thinking Strategically*, New York, W.W. Norton, 1991.

Poundstore, W. *Prisoner's Dilemma; John von Neumann, Game Theory and the Puzzle of the Bomb*, Oxford, Oxford University Press, 1993.