Brand, regen, hunebedden, steunlijnen en kapen

Recreatierubriek

A.J. Goddijn
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

Acht branden

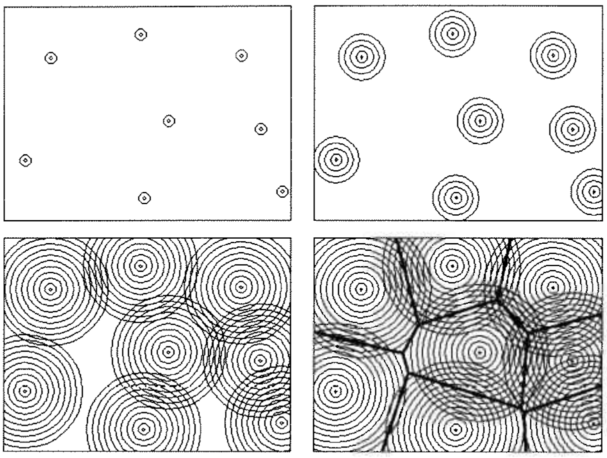


fig. 1 Acht branden breiden zich tegelijk uit

Wat gebeurt er als op acht plaatsen op de hei tegelijk brand uitbreekt, zoals linksboven in figuur 1?
De vuren breiden zich met constante snelheid uit (rechtsboven) en raken elkaar na enige tijd (linksonder). Rechtsonder tenslotte is zichtbaar gemaakt welk vuur een bepaalde plek in vlam zet: het vuur dat het meest nabij is.
De lijnen in de laatste figuur vormen een zogenaamd Voronoi-diagram. Ze zijn stukken van de middelloodlijnen van de puntenparen. Daaruit volgt meteen dat de 'drielandenpunten' middens van cirkels zijn, die door de drie betrokken punten gaan.
In figuur 2 zijn Voronoi-diagrammen bij vier punten getekend. Alleen als de punten op een cirkel liggen is er een vierlandenpunt. Dat is dus een uitzonderlijke situatie!
Komen vierlandenpunten in de aardse politieke werkelijkheid eigenlijk wel voor?
Ik vond er slechts één, tussen Utah, Colorado, Arizona en New Mexico in de USA. Zie figuur 3. Nu zijn die grenzen van de staten in de USA uitermate kunstmatig, maar een Voronoi-diagram vormen ze zeker niet.
Dat volgt uit de eerste opgave van deze rubriek.

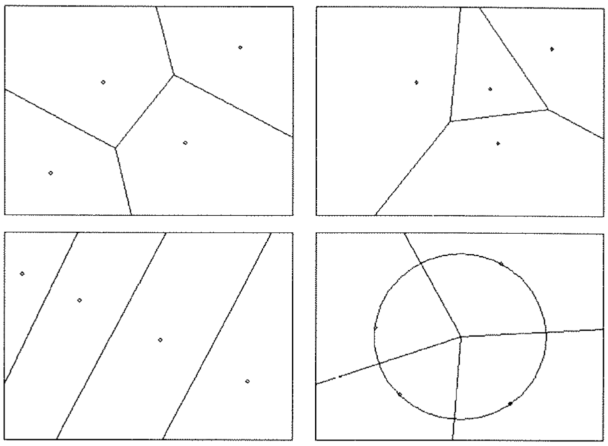


fig. 2 Verschillende Voronoi-diagrammen bij vier punten. Alleen als de punten op een cirkel liggen, is er een vierlandenpunt.

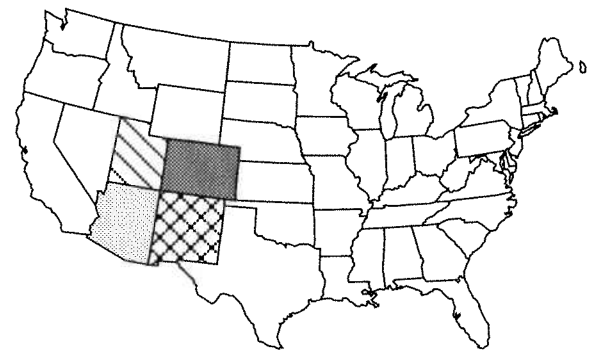
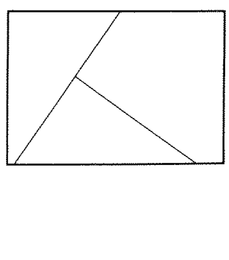


fig. 3 Een vierlandenpunt: Utah, Colorado, Arizona en New Mexico in de USA

Opgave 120
Waarom ziet in een Voronoi-diagram een drielandenpunt er nooit zo uit?



Tot slot van deze inleiding een herverdeling van Nederland, waarbij we de provinciehoofdsteden als centra van de Voronoi-indeling nemen.

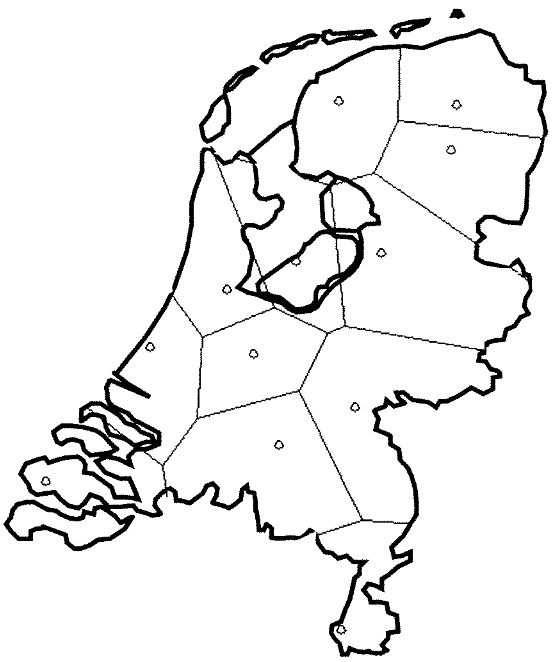


fig. 4 Nederland heringedeeld volgens Voronoi

Ik ben zo vrij geweest Amsterdam zonder referendum tot hoofdstad van Noord-Holland te bombarderen.
Het Voronoi-diagram levert nog een verbetering van de feitelijke situatie: de Wieringermeerpolder hoort nu echt bij de IJsselmeerpolders, al moet die provincie wel afstand doen van een andere polder!

Hunebedden

Waar geen grenzen zijn aangegeven en toch wordt gezocht naar een gebiedsindeling, ligt het maken van Voronoi-diagrammen voor de hand. In de archeologie komt die situatie herhaaldelijk voor. De centra zijn dan vindplaatsen van bepaalde voorwerpen, of de hunebedden in Drente, de Romeinse nederzettingen in Engeland, of de fabricageplaatsen van bepaalde types aardewerk. In al zulke gevallen is het een redelijk idee naar gebieden rond die centra te kijken op de zojuist aangegeven manier: de naastebuurgebieden.
In de archeologie wordt hier de term Thiessen-polygonen gebruikt. Zie figuur 5. Ik ontleen figuur 5 aan *Ian Hodder & Clive Orton* (1981). *Spatial analysis in archaeology*, en aan *J. H. F. Bloemers & T. van Dorp (1991). Pre- & protohistorie van de lage landen, Open Universiteit.*
Zulke indelingen zijn natuurlijk theoretisch, maar ze kunnen aanleiding vormen voor nader onderzoek; zie de aangegeven bronnen.

Wie met de sleutelwoorden *Voronoi* en *Thiessen* op bijvoorbeeld Internet zoekt waar nog meer van Voronoi diagrammen gebruik wordt gemaakt, vindt van alles: in de medische wetenschap, in de robotica, in de dunne laagjes kristallografie, in allerlei toepassingen van wat tegenwoordig Computational Geometry heet en bij het schatten van hoeveelheden regen in een gebied. Daarover meer!

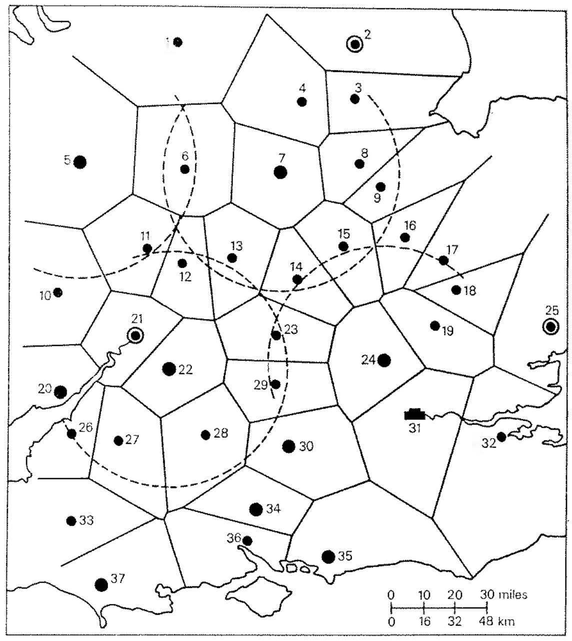


fig. 5 Thiessen-polygonen rond de Romeins-Britse nederzettingen. Plek 31 is het huidige Londen. De indeling kan worden vergeleken met de feitelijk verspreiding van aardewerk dat in de betrokken plaatsen is geproduceerd.

fig. 6 De opdeling van het oostelijk gedeelte van het Drents plateau in denkbeeldige territoria. Centra zijn hier groepjes hunebedden. Hunebedden waren soms 600 jaar aan één stuk door in gebruik als uiteindelijke bewaarplaats van beenderen en schedels

Regenval schatten

Het schatten van de totale hoeveelheid gevallen regen in een gebied kan van belang zijn, denk aan waterleidingbedrijven, bewakers van dijken, enzovoort. Geschat wordt op grond van metingen op bepaalde punten, waar regen-

meters staan. Daar wordt neerslaghoogte gemeten.
Een redelijke schatting wordt verkregen door een Voronoi-diagram te tekenen, de gemeten waarden met de oppervlaktes van de polygonen te vermenigvuldigen en op te tellen. Dat is vooral efficiënt omdat de polygonen vooraf bepaald kunnen worden, ze hangen niet af van de gemeten waarden.
Dit voorbeeld leidt mij naar het volgende interessante meetkunde vraagstuk.
Als er drie meetpunten in een rechthoekig gebied zijn, dan is het drielandenpunt van de indeling natuurlijk heel geschikt als plek voor een nieuwe regenmeter. Zou het ook helpen om een nieuw Voronoi-diagram te maken bij de vier punten, waarbij in het vierde punt wordt uitgegaan van de *gemiddelde* regenval in de drie ander punten? Zie figuur 7.

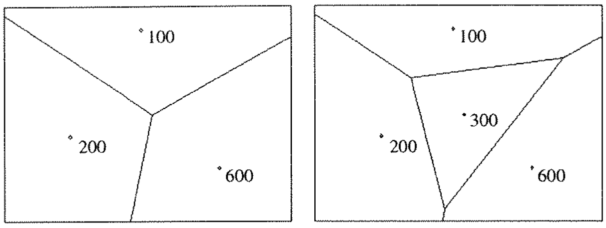


fig. 7 Rechts is het drielandenpunt van de eerste figuur als nieuw punt toegevoegd en is weer het Voronoi-diagram getekend. In het nieuwe punt gebruiken we het gemiddelde van de andere punten.

Een voor de hand liggend vermoeden is nu: dan krijg je dezelfde geschatte waarde. Maar dat is niet zo:

Opgave 121
Dat is alleen bij bijzondere ligging van de drie regenmeters het geval. Welke ligging is dat en waarom is dat zo?

Opgave 122
Bewijs: het vierde punt is middelpunt van de ingeschreven cirkel van de driehoek om dat punt.

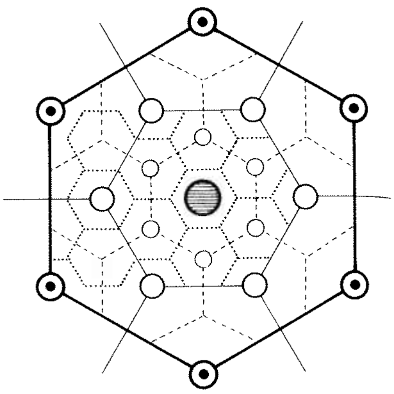


fig. 8 Model van het verzorgingsgebied van centrale plaatsen van verschillende rangorde; naar Kunow, J. (1988). 'Zentrale Orte in der Germania Inferior', in: Archäologisches Korrespondenzblatt, 18, 55-67

Het toevoegen van extra centra is een geliefde techniek in de archeologie. Eerst wordt bijvoorbeeld gewerkt met de belangrijkste handelscentra, daarna worden centra van 'lagere' orde toegevoegd, juist op de hoekpunten van de Thiessen-polygonen. Een modelpatroon geeft figuur 8.

Het Karoum zoutmeer

Een 'natuurlijk' Voronoi-diagram zien we in het Karoum zoutmeer.

fig. 9 Zoutrichels in het Karoum zoutmeer

Door indroging ontstaan kloven tussen harde droge stukken van zo'n 1 à $1\frac{1}{2}$ meter groot. Door de wind komt er een mengsel van gipskorrels, zand en zout in terecht. Als de harde stukken verder krimpen blijft dat als harde rand boven de vlakte uitsteken.
Om de meetkundige structuur van de richels te onderzoeken moeten we eerst van het perspectief van de foto af. Dat is gedaan door een trapezium op de foto te tekenen, waarvan we weten dat het in werkelijkheid een rechthoek van zo'n 6 bij 9 meter is. Dat kan door vakken tellen.
Via een rooster maken we een schets van de echte vormen. Zie figuur 10.

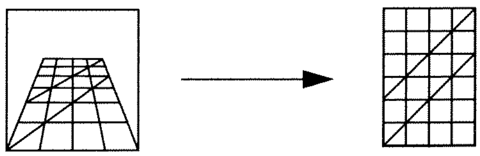


fig. 10 Reconstructie van de echte ligging van de zout richels

Met een computerprogramma is geprobeerd of de structuur een Voronoi-diagram is. Daartoe zijn 'plaatsen' aan-

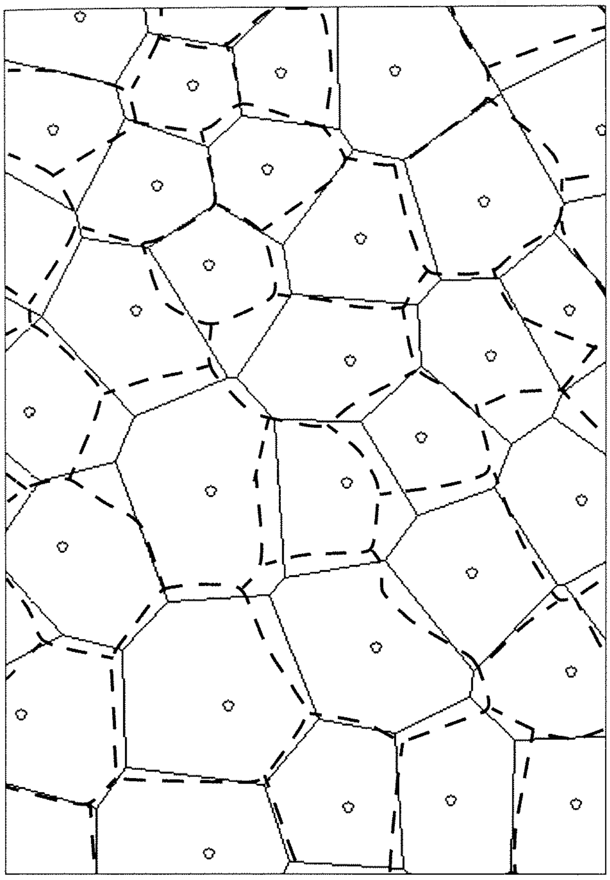
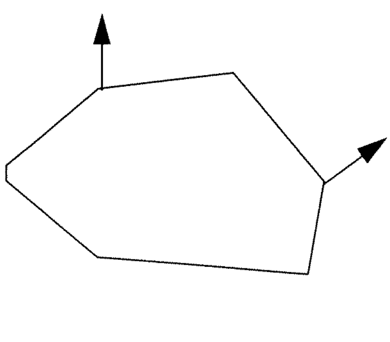


fig. 11 De werkelijke ligging van de richels en een Voronoi-diagram erover heen getekend

gegeven. In figuur 11 is het Voronoi-diagram over de schets getekend. Het klopt behoorlijk!
Nu is het typische van het aangeven van de centra in de polygonen, dat je niet erg veel keus hebt. Als er één is aangegeven, ligt alles verder vast. Immers de lijnen van het diagram moeten middelloodlijnen zijn!
Dit gebrek aan vrijheid uit zich ook in de volgende opgave.

Opgave 123
Gegeven is een polygoon dat een Voronoi-gebied is. De hoekpunten zijn allemaal drielandenpunten. Bij twee drielandenpunten zijn de richtingen van de derde grens gegeven. Construeer de richting van de derde grenzen bij de andere drielandenpunten ook.



Lastige opgaven over conflictlijnen

In het vorige nummer van de Nieuwe Wiskrant stond een artikel van Martin Kindt waarin onder andere conflictlijnen ter sprake kwamen. Daarbij gaat het om lijnen waarvan de punten gelijke afstand tot twee gebieden hebben. Bij Voronoi-diagrammen waren de gebieden losse punten. Ik ga er verder vanuit dat de lezer het artikel van Martin Kindt gezien heeft.

De parabool, ellips en hyperbool verschenen als conflictlijn. Mooie gladde krommen zijn dat. Zouden conflictlijnen altijd glad zijn?
Nee! De volgende opgave is nog niet echt lastig:

Opgave 124
Teken een gebied en een los punt, zodanig dat de conflictlijn tussen het gebied en het punt een vierkant is.

Onder wat voor omstandigheden is de conflictlijn zeker een gladde kromme?

Bewering:
Als A en B gesloten convexe gebieden zijn met positieve onderlinge afstand, dan is de conflictlijn een differentieerbare kromme.

Veel voorbeelden uit genoemd artikel vallen hieronder en daarom is het de moeite waard dit algemene resultaat te bewijzen.
Ik doe nu eerst voorstellen voor terminologie en geef daarmee wat gereedschappen aan.

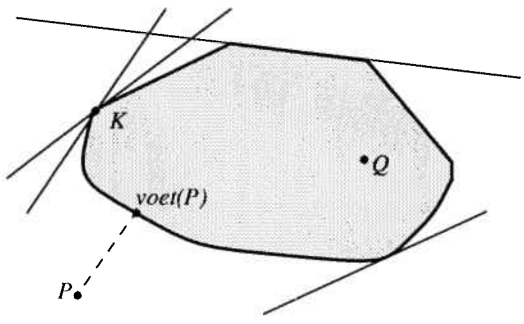


fig. 12 CG-gebied, inwendig punt Q, rand (zwart), diverse steunlijnen, kaap (K), punt P buiten gebied met voetpunt voet (P)

Een **CG-gebied** is een Convex Gesloten gebied.
Een **inwendig punt** van een gebied is een punt dat samen met een cirkeltje erom geheel in het gebied ligt.
De **rand** van een gebied is het gebied minus de inwendige punten. Een **randpunt** is een punt van de rand.
Een **steunlijn** aan een gebied is een lijn die alleen randpunten met het gebied gemeen heeft.
Een **kaap** is een punt waar meer dan één steunlijn doorgaat.

Een **voetpunt** *voet(P)* van een punt P buiten een gebied is een punt dat de kortste afstand van P tot het gebied realiseert.

Nu volgt een gestructureerde serie opgaven die tot het bewijs van de bewering leiden. Natuurlijk moet steeds de bewering bewezen worden. Het gaat eerst om één CG-gebied G.

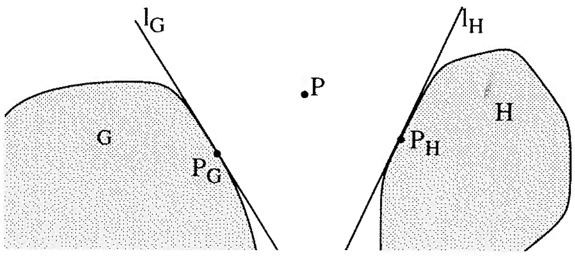
Opgave 124
Een CG-gebied heeft punten aan verschillende kanten van een steunlijn.

Opgave 125
Als P buiten G ligt dan is er slechts één voetpunt voet(P).

Opgave 126
Gegeven een punt P buiten G. De lijn door voet(P) loodrecht op de verbindingslijn met P is een steunlijn.

Opgave 127
Een CG-gebied heeft hoogstens aftelbaar veel kapen.

Op de laatste opgave na is dit alles nodig op weg naar het bewijs van de bewering over glad zijn van conflictlijnen. Nu nemen we twéé CG-gebieden, G en H.
P is een punt (buiten G en H) op de conflictfiguur. (Eigenlijk moeten we nog niet zomaar aan nemen dat die iets lijnachtigs is!). Dan zijn er twee voetpunten, P_G en P_H, op de randen van G en H.
Er zijn ook twee steunlijnen, l_G door P_G en loodrecht op PP_G en l_H door P_H en loodrecht op PP_H.



Opgave 127
De conflictlijn van P_H en l_G is een parabool. Zeg F_1.
De conflictlijn van P_G en l_H is een parabool. Zeg F_2.
F_1 en F_2 raken uitwendig elkaar in P. Inwendige punten van de paraboolgebieden horen zeker niet tot de conflictfiguur van G en H

We zijn nu heel ver. Als we P over de conflictfiguur laten bewegen, bewegen de parabolen mee en de conflictfiguur wordt ertussen gladgewalsd.

Opgave 128
Bewijs nu de hoofdbewering:
Als A en B gesloten convexe gebieden zijn met positieve onderlinge afstand, dan is de conflictlijn een differentieerbare kromme.

Opmerkelijk is dat de randen van de oorspronkelijke gebieden niet differentieerbaar hoeven te zijn. (Ze zijn wel continu). Conflictlijnvorming is een proces dat fraaiere krommen levert dan de uitgangskrommen.
Een voor de hand liggend vermoeden is dan ook: als de krommen die de gebieden begrenzen n keer differentieerbaar zijn, dan is de conflictlijn $n+1$ keer differentieerbaar. Succes, ik heb hier nog geen bewijs voor gezien.

De laatste opgave sluit aan bij de hyperbolen en hun asymptoten.

Opgave 129
Bewijs het volgende.
Als de twee gebieden convex, gesloten en begrensd zijn, en positieve onderlinge afstand hebben, dan heeft de conflictlijn twee asymptoten.

Merk op dat het geval van de hyperbool hieronder valt. In het artikel van Martin Kindt waren de gebieden cirkelvormig en kwamen gemeenschappelijke raaklijnen belangrijk naar voren. Voor de hand ligt hier te gaan werken met gemeenschappelijke steunlijnen in plaats van raaklijnen.
Meerwaarde van deze opgave: een bewijs dat de hyperbool asymptoten heeft dat geen gebruik maakt van de vergelijking van de hyperbool.

Opgave 130
Geef een voorbeeld waarbij de twee asymptoten parallel zijn.

Opgave 131
Laat zien dat de grafiek van $|x|^\alpha$, $a > 2$, niet de conflictlijn van twee convexe gebieden kan zijn.

Tot slot: Drs. P over π

Er kwam nog een late inzending binnen over de decimalen van π. De inzender is Drs. P, een van Nederlands taalvirtuozen. Opmerkelijk, maar bij Drs. P wel te verwachten, zijn de ritmische soepelheid en het rijmschema van het vers waarin de decimalen van π verstopt zitten in de lengte van de woorden:

Aha, u wilt een potje redeneren
En indruk maken met oraal verstand?
Onzakelijk! Nadelig! Nederland
Zal nu nog rabiater gaan ageren
"Te ideëel voor ons, die proviand...
Met pi orgasme! Zinnelijke brand!"

Deze bijdrage kwam voort uit de correspondentie van Marjolein Kool met Drs. P. Van Marjolein zelf vond u in de vorige Nieuwe Wiskrant een vers over Mijnheer van Dalen, in het artikel van Ed de Moor: 'Weg met van Dalen'. ❐