Neem de grafiek over....

P. Drijvers
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

Inleiding

Al enkele jaren wordt bij het Freudenthal instituut onderzoek gedaan naar het gebruik van de grafische rekenmachine in de tweede fase van het voortgezet onderwijs. In het eerste project, dat plaatsvond in de periode '91-'94, zijn uitgebreide klasse-experimenten uitgevoerd, waarbij leerlingen met grafische rekenmachines aan het werk gingen. Het eindverslag van dit project (Doorman e.a., 1994) geeft een beeld van de resultaten hiervan.
In augustus '94 is als vervolg een examenexperiment van start gegaan. In dit artikel wordt eerst beschreven wat dit tweede project behelst.
Ondanks alle ervaringen uit het verleden komt het projectteam bij de huidige experimenten toch wel eens voor verrassingen te staan. Zo bleek onlangs bijvoorbeeld dat leerlingen niet zonder meer in staat zijn om een grafiek van het beeldscherm van de grafische rekenmachine op een zinvolle manier over te nemen op papier. Bij twee proefwerken kwam aan het licht dat een deel van de leerlingen geen oog had ontwikkeld voor specifieke kenmerken van de grafiek en zich de beperkingen van de grafische rekenmachine onvoldoende realiseerde.
Deze tegenvallende resultaten waren aanleiding tot het ontwikkelen van nieuw lesmateriaal. In dit artikel beschrijven we hoe de leerlingen met dit materiaal in de klas aan de slag geweest zijn en tot welke resultaten dit leidde bij het volgende proefwerk.

Het examenexperiment

In augustus '94 is begonnen met het project 'De grafische rekenmachines in de examenprogramma's HAVO en VWO'. Op twee scholen hebben alle leerlingen van V5, die wiskunde A en/of wiskunde B in het pakket hebben, de beschikking gekregen over een grafische rekenmachine, de TI-81. Ze kunnen de machines mee naar huis nemen en ook bij andere vakken gebruiken, als de betreffende docent dat tenminste toestaat. De leerlingen gebruiken hun gewone schoolboek, aangevuld met materiaal dat in het kader van dit project is ontwikkeld.
Nieuw in dit project is dat de leerlingen de grafische rekenmachine ook bij proefwerken, schoolonderzoeken en bij het centraal eindexamen kunnen gebruiken. Het eindexamen voor deze proefscholen zal dan ook afwijken van het reguliere examen. De eerste experimentele examens voor het VWO zullen in '96 plaatsvinden en voor het HAVO (wiskunde A en wiskunde B) volgens plan in '97.
Eén van de twee proefscholen van het project is het Liemers College in Zevenaar. De leerlingen hebben aan het begin van het schooljaar enkele introductielessen in het gebruik van de grafische rekenmachine gehad. Afhankelijk van het onderwerp heeft de machine vervolgens in meer of mindere mate een rol gespeeld bij het doorwerken van de hoofdstukken uit het boek, in dit geval *De Wageningse Methode*. De hoofdstukken zijn aangevuld met werkbladen waarin de grafische rekenmachine een meer nadrukkelijke plaats heeft. De meeste leerlingen zijn inmiddels redelijk vertrouwd met 'hun' machine en het experiment lijkt voorspoedig te verlopen.

Teleurstellende proefwerkresultaten bij wiskunde A

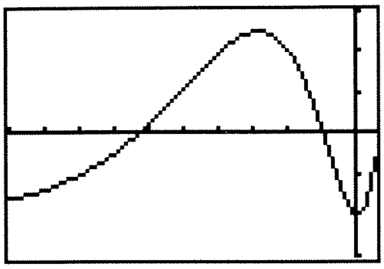
In het najaar werden op het Liemers College vrijwel gelijktijdig zowel bij wiskunde A als bij wiskunde B enkele onderdelen van een proefwerk matig gemaakt. Dat verraste ons. Zowel bij wiskunde A als bij wiskunde B was de vraag om een grafiek die met de grafische rekenmachine getekend was, op papier over te nemen. Simpel toch?

Bij het proefwerk wiskunde A over differentiëren ging het om de volgende opgave.

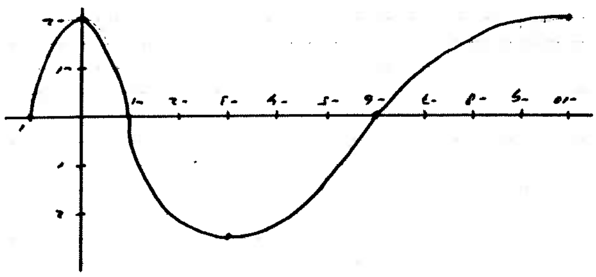
1. $f(x) = 2^2 \cdot x^2 \cdot 2^x - 2$
   a. Voer deze functie in op je rekenmachientje met range -10 tot $\frac{1}{2}$ en schets de grafiek van f op je antwoordenblad. Kies als eenheid één centimeter.
   b. Behalve in (-1,0) snijdt de grafiek van f de x-as nog in een tweede punt.
   Bepaal de eerste coördinaat van dat tweede snijpunt met de x-as, nauwkeurig in drie cijfers na de komma. Schrijf precies op hoe je je antwoord gevonden hebt.

c. Benader, zo mogelijk in twee cijfers na de komma nauwkeurig, de helling van de grafiek in het punt (-1,0) met behulp van de grafiek op je scherm.

Bij de voorgestelde instelling van de range ziet de grafiek op de grafische rekenmachine er zó uit:



De leerlingen tekenden grafieken die hier in sommige opzichten behoorlijk van afweken. Neem bijvoorbeeld de grafiek van Ronald:



Zowel het linker nulpunt als de top liggen niet op de goede plaats. Verder snijdt de grafiek de horizontale asymptoot en loopt de grafiek aan de rechter kant te ver door. Slechts ongeveer de helft van de leerlingen nam de grafiek goed over. De volgende fouten kwamen regelmatig voor:

- De grafiek snijdt de x-as in x=-6 in plaats van x=-6.3.
- De top ligt niet op de juiste plaats.
- Het domein klopt niet. Het loopt te ver naar rechts door, of niet ver genoeg naar links.
- De linkertak van de grafiek komt onder de lijn y=-2, of blijft er juist veel te ver boven.

Misschien zouden de resultaten beter geweest zijn als er in plaats van 'schets de grafiek...' had gestaan: 'teken de grafiek nauwkeurig...'. In elk geval weet een deel van deze leerlingen kennelijk niet wat er verwacht wordt bij het overnemen van een grafiek op papier. Ze hebben nog geen oog voor 'karakteristieke kenmerken' zoals de ligging van de nulpunten en asymptoten. Dat behoorde overigens ook niet tot de stof van het hoofdstuk, dus achteraf waren deze resultaten wellicht te voorspellen geweest. Bij de vragen b. en c. ging ook het een en ander mis, maar niet zo veel als bij a. Deze onderdelen blijven hier verder buiten beschouwing.

Idem bij wiskunde B

De volgende opgave maakte deel uit van een proefwerk wiskunde B over de rekenregels voor differentiëren.

2. Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x-1}$.

   a. Toon aan dat $x+2+\dfrac{1}{x-1} = f(x)$.

   b. In welke punten op de grafiek van f is de raaklijn aan de grafiek horizontaal?

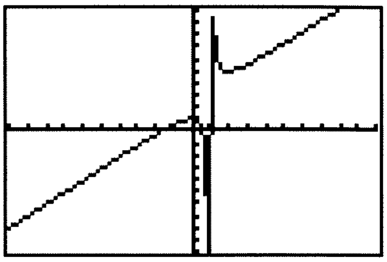
   c. Bereken de hoek waaronder de grafiek van f de lijn x=3 snijdt in graden nauwkeurig.

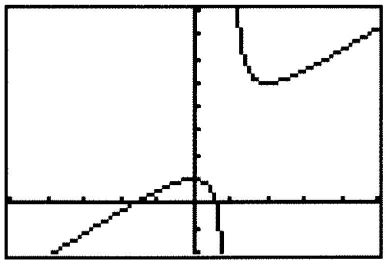
   d. Teken de grafiek van f. Gebruik je GR.

   e. De grafiek van f heeft een verticale en een scheve asymptoot. Welke zijn dat?

   f. Bewijs: $\dfrac{f(1+a)+f(1-a)}{2} = 3$.

   g. Wat betekent de vorige vraag voor de grafiek van f?

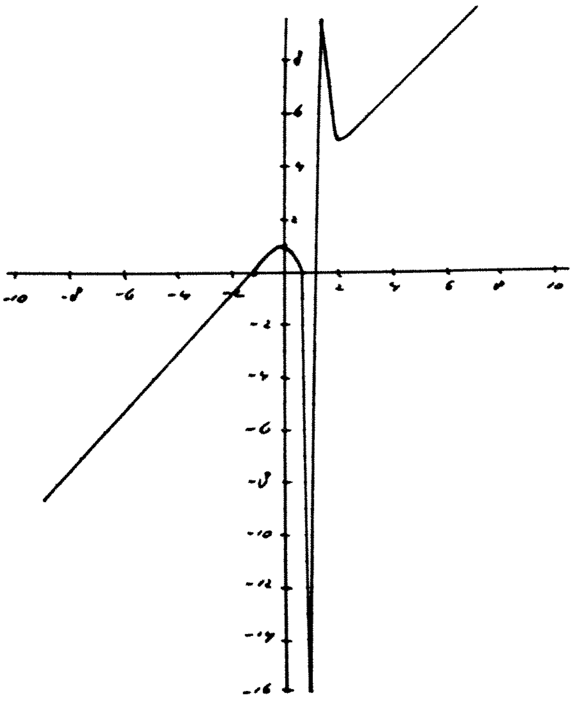




De grafische rekenmachine speelt bij onderdeel d. een rol. De standaardinstelling van de range geeft de bovenste grafiek. Een geschiktere keuze van de afmetingen van het tekenvenster leidt tot de onderste grafiek.

Ook hier kwamen enkele opvallende fouten aan het licht, die we niet voorzien hadden. Het meeste ging er mis met de asymptoten. Karin (zie volgende bladzijde) had bijvoorbeeld niet in de gaten dat de grafische rekenmachine de twee takken van de grafiek verbindt. Ze dacht dat de functie een maximum en een minimum heeft.

Net als bij wiskunde A valt op dat veel leerlingen niet goed weten waar ze op moeten letten bij het overnemen van de grafiek op papier. Ook hier heeft ongeveer de helft de grafiek niet goed overgenomen.



Grafiek van Karin

De volgende fouten waren het meest frequent:

- Bij enkele leerlingen gebeurt er iets vreemds met de verticale asymptoot. De grafiek loopt eroverheen of loopt er juist vandaan, of de functie lijkt daar extremen te hebben.
- Vrij veel leerlingen hebben problemen met de scheve asymptoot. Ook hier valt de grafiek er mee samen, of snijdt de grafiek de asymptoot of blijft de grafiek er juist ver van verwijderd.

Asymptoten zijn in de klas nog niet behandeld, dus ook dit was misschien te voorzien. Niettemin hadden we gehoopt dat leerlingen door bijvoorbeeld te vergroten of te verkleinen de details beter zouden onderzoeken. Eén plaatje op het beeldscherm van de grafische rekenmachine maakt niet alles duidelijk.
Vraag g. komt niet goed uit de verf. De puntsymmetrie waarop gedoeld wordt, is in de grafiek op papier niet altijd terug te zien. Dit doet vermoeden dat de leerlingen niet goed in staat zijn om algebraïsche resultaten in verband te brengen met eigenschappen van de grafiek.

Interpretatie van de resultaten

We moeten concluderen dat het overnemen van een grafiek van het beeldscherm van de grafische rekenmachine niet zo eenvoudig is als we dachten. Een drietal verklaringen voor de matige proefwerkresultaten is denkbaar.
Ten eerste ontbrak bij de leerlingen de benodigde wiskundige voorkennis. Met name hebben de A-leerlingen nog onvoldoende geleerd hoe ze globaal naar functies en grafieken kunnen kijken. De B-leerlingen missen met name kennis van asymptoten. Ook mét de grafische rekenmachine gebeuren wonderen helaas zelden vanzelf.
Ten tweede ontbreekt het bij een deel van de leerlingen aan vaardigheid om met de machine om te gaan. Dit speelt bij wiskunde A sterker dan bij B. Dit houdt verband met de opbouw van het boek van wiskunde A, waarin in het begin van het schooljaar onderwerpen als de binomiale verdeling aan de orde komen, waarbij de grafische rekenmachine geen rol speelt.
Een derde verklaring is dat de leerlingen nog niet hebben geleerd om met de beperkingen van de grafische rekenmachine om te gaan. Ze hebben nog nauwelijks een kritische blik ontwikkeld en realiseren zich de onvolkomenheden van de grafiek op het beeldscherm nog niet.
Waarom is dit bij eerdere experimenten niet aan het licht gekomen? Juist door de aanwezigheid van de grafische rekenmachine lag het voor de hand om bij een proefwerk het tekenen van grafieken niet meer te toetsen. De leerlingen zien de grafiek al voor zich, was de redenering. Daar zit natuurlijk wel wat in, maar dat betekent dus niet dat aandacht voor het handmatig tekenen van grafieken overbodig is.

Materiaalontwikkeling

Deze ervaringen vormden de aanleiding voor het ontwikkelen van een mini-pakketje *Grafieken tekenen.* Het doel van dit lesmateriaal is dat leerlingen

- beter met de grafische rekenmachine leren omgaan meer inzicht krijgen in de beperkingen van de machine en kritisch leren kijken naar de uitvoer op het beeldscherm
- verbanden leren leggen tussen algebraïsche resultaten en eigenschappen van de grafiek
- oog krijgen voor specifieke kenmerken van functies zoals nulpunten, domeinbeperkingen, en (met name bij wiskunde B) perforaties en asymptoten.

Er is een variant gemaakt voor wiskunde A en een voor wiskunde B. Het doorwerken van het materiaal kost ongeveer vier lesuren.

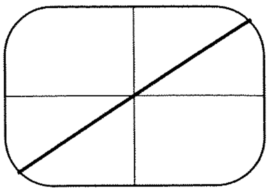
De opgaven op de volgende pagina geven een indruk van de inhoud van het pakketje. Als u een grafische rekenmachine bij de hand heeft, kunt u de opgaven zelf proberen. Opgave 3 komt uit het pakketje voor wiskunde A, de opgaven 4, 5 en 6 staan in de B-versie.
In werkelijkheid staat er tussen opgave 5 en 6 nog een hele serie van vragen, waarin de functies van opgave 4 nader onderzocht worden. Ziet u welke gebreken de tekeningen in het venster van de grafische rekenmachine vertonen?

Het nieuwe materiaal in de klas

In de wiskunde-A groepen gaat het doorwerken van het pakketje niet zo snel. Veel leerlingen blijken er behoefte aan te hebben dat bij allerlei vrij elementaire zaken rustig stil gestaan wordt. De volgende observatie geeft hiervan een voorbeeld.

3. In de vorige opgave heb je gezien dat je met één formule verschillende grafieken op het scherm kunt krijgen door de RANGE te veranderen. Zo is het ook mogelijk om met verschillende formules dezelfde grafiek te maken.

   Hiernaast is de grafiek een diagonaal van het scherm.
   a. Maak de grafiek na op je grafische rekenmachine.
   b. Zoek nu een tweede formule, die dezelfde diagonaal geeft bij een andere RANGE.



4. Maak met de grafische rekenmachine in ZOOM STANDARD grafieken van de volgende functies. Neem die grafieken over op papier.

   a. $x \rightarrow \dfrac{x^2-9}{x-3}$
   b. $x \rightarrow 3\sqrt{9-x^2}$
   c. $x \rightarrow \sqrt{x^2+0.05}$
   d. $x \rightarrow \dfrac{x^3}{10}+\sqrt[3]{x}$
   e. $x \rightarrow \dfrac{x^2-x-5}{x-3}$
   f. $x \rightarrow \dfrac{x^2-16x+1}{16-x}$

In de volgende opgaven ga je deze grafieken nader onderzoeken.

5. Gegeven is de functie van opgave 4b:

   $x \rightarrow 3\sqrt{9-x^2}$.

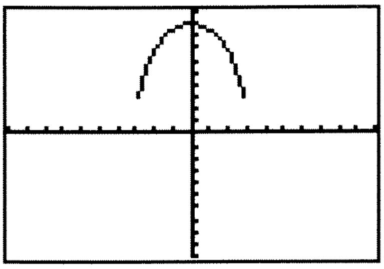
   a. Bepaal het domein en het bereik van de functie. Klopt dit met de grafiek die in ZOOM STANDARD op het scherm verschijnt? Kun je dat verklaren?
   b. Probeer de grafische rekenmachine een betere grafiek te laten tekenen.
   c. Welke helling heeft de grafiek in de eindpunten van het domein?

6. a. Maak een lijstje van kenmerken van grafieken waar je op kunt letten bij het overtekenen van een grafiek van het scherm op papier.
   b. Vergelijk je lijstje met dat van enkele medeleerlingen.

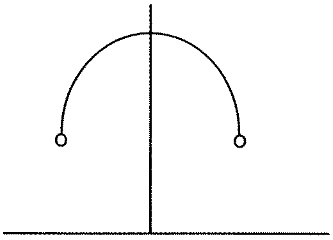
Een leerling is bezig met opgave 3 (zie boven) en roept de hulp van de observator in voor onderdeel b.
Obs: Wat heb je bij a. gedaan?
Zij: Nou, Y1=X en dan ZOOM STANDARD.
Obs: Welke range krijg je dan?
Zij: Voor X [-10,10] en voor Y ook.
Obs: Kun je nu een andere formule voor Y1 kiezen?
Zij: Y1=2X.
Ze voert dit in en drukt op GRAPH. De grafiek loopt nu steiler dan de beoogde diagonaal. Ze heeft nog geen idee hoe ze hiervan een diagonaal kan maken.
Obs: Hoe groot is de functiewaarde voor X=10?
Zij: ????
Obs: Hoe groot is de Y als X=10?
Zij: 20.
Obs: Hoe moet je dus de range voor Y kiezen?
Zij: [-20,20].
Ze voert dit in met het gewenste effect. Ze is nog niet helemaal tevreden.
Zij: Kan het ook met een andere formule?
Obs: Welke dan?
Zij: Bijvoorbeeld 5X?
Zij voert de functie in en laat de grafiek tekenen in ZOOM STANDARD. Veel te steil!
Obs: Wacht even, nu doen we het anders. Nu laten we de range voor Y gelijk zijn aan [-10,10]. Hoe moet je nu die voor X kiezen?
Ze leest af uit de grafiek: [-2,2]. Dat blijkt inderdaad goed te zijn.
Obs: Had je dat ook kunnen berekenen in plaats van aflezen?
Zij: Ja, 5 maal iets is 10, dus iets is 2.

Het pakketje voorziet bij wiskunde A in een behoefte en de leerlingen lijken er veel van op te steken. Wel zijn dat voor een deel zaken die al eerder behandeld waren, maar die kennelijk nog herhaling nodig hadden. Bij wiskunde B wordt meer dan bij A aan nieuwe onderwerpen toegekomen. De beperkingen van de grafische rekenmachine worden expliciet gemaakt, wat in eerste instantie wel eens voor verwarring zorgt, zoals blijkt uit de volgende observatie.

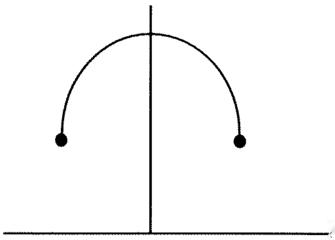
De grafische rekenmachine tekent de grafiek van de functie van opgave 4b en 5 (zie boven) in de standaard-instelling als volgt.



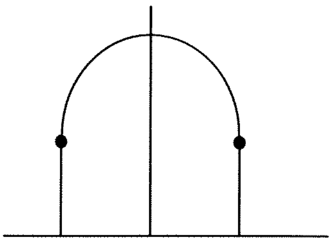
Een leerling heeft niet in de gaten dat de grafiek in werkelijkheid doorloopt tot de x-as.
Hij tekent in zijn schrift:



De open punten zijn (-3,3) en (3,3).
Obs: *Wat is het domein van deze functie?*
Hij: *[-3,3]*
Hij maakt snel de open punten dicht.



Obs: *Hoe groot is de functiewaarde in x = 3?*
Hij: *0.*
Hij verbindt de eindpunten verticaal met de x-as.



Obs: *Welke functiewaarde heeft nu x = 3?*
Hij: *0.*
Hij snapt dat er een probleem is en uiteindelijk begint het te dagen. Het gebruik van de grafische rekenmachine kan in eerste instantie leiden tot misconcepties!

De bedoeling van opgave 6 is dat de leerlingen voor zichzelf op een rij zetten wat er zoal mis kan gaan bij het tekenen van grafieken met de grafische rekenmachine. Bij een aanzienlijk deel van de leerlingen leidt dat tot aardige resultaten, zoals bijvoorbeeld bij Mariëlle:

- asymptoten (horizontaal, verticaal, scheef)
- één of meerdere "gaten" in de grafiek
- extreme waarden
  (→ horizontale raaklijn)
- inzoomen en uitzoomen of range een keer groot en een keer klein nemen, zodat je de hele grafiek kunt zien en niet de helft vergeet.
- eerst ZOOM STANDARD
- opletten of de RM alles tekent en niet een paar punten niet verbindt.

In het algemeen kwam bij wiskunde B goed uit de verf in welke opzichten de grafieken van de grafische rekenmachine misschien niet betrouwbaar zijn.

Eigen produkties

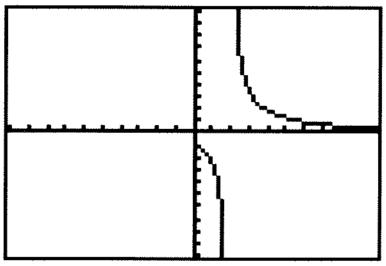
De laatste les voor het proefwerk speelde zich in één van de B-klassen nog iets aardigs af. De docent vroeg of de leerlingen gedurende het laatste kwartier een geschikte proefwerkopgave zouden willen bedenken. Binnen de kortste keren kwam er een keur aan geniepige functies ter tafel, die met elkaar gemeen hadden dat de grafische rekenmachine in de standaardinstelling bepaalde kenmerken van de grafiek niet juist weergaf. Een selectie uit de resultaten:

De grafiek van

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2} - \frac{\sqrt{x}}{3}$$

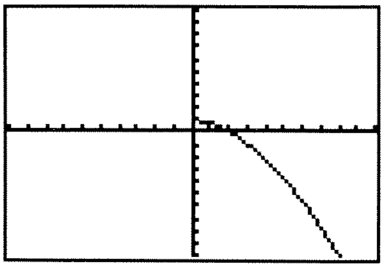
in ZOOM STANDARD.

Wie niet beter weet zou zweren dat de x-as asymptoot is.

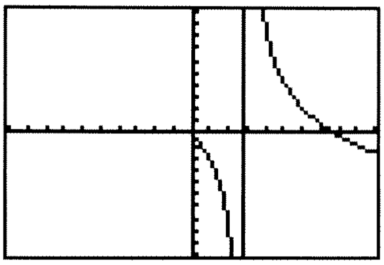


De grafiek van

$$f(x) = x \cdot \frac{x-6}{3-x} + \frac{x}{4 - \frac{\sqrt{x}}{2}}$$



in ZOOM STANDARD suggereert dat er één verticale asymptoot is. De tweede, bij $x = 64$, blijft buiten beeld.



In de standaardinstelling valt in de grafiek van

$$f(x) = 1 - x^2\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$$

de perforatie in $x = 9$ weg.

De grafische rekenmachine blijkt de leerlingen hier aan te zetten tot inventief en onderzoekend gedrag. Dat is één van de waardevolle aspecten van dergelijke apparaten.

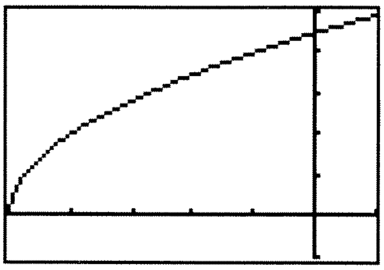
En weer proefwerken

Bij de stof voor het volgende proefwerk wiskunde A hoort ook het pakketje *Grafieken tekenen*. De volgende opgave sluit daarop aan.

3. $f(x) = \sqrt{(4x+20)}$ is een functie die je met de regels uit hoofdstuk 3 niet kunt differentiëren.
   a. Reset je rekenmachine en voer de functie in als Y1. Wat gebeurt er als je de haakjes vergeet? Geef een verklaring.
   b. Voer in:
      Y2 = (√(4X+20.004)-√(4X+20))/0.001.
      Beschrijf precies wat Y2 voorstelt.
   c. Bepaal in twee decimalen nauwkeurig in welk punt van de grafiek van f de helling gelijk is aan 1. Schrijf precies op hoe je dat doet.

   Tom verwacht dat $f'(x)$ wel gelijk zal zijn aan
   $$\frac{1}{2\sqrt{4x+20}}$$
   d. Voer op je rekenmachine in:
      Y3 = 1/(2 √(4X+20)).
      Ga hiermee na of Tom's verwachting uitkomt. Licht je antwoord toe.
   e. Voer op je rekenmachientje in:
      Y4 = Y2/Y3.
      Bekijk de grafiek van Y4 en bepaal wat – naar je mag verwachten – de formule voor $f'(x)$ zal zijn.

Het uiteindelijke plaatje op de grafische rekenmachine zal er bij een geschikt tekenvenster zó uitzien:



Vraag a. is door de leerlingen goed beantwoord. De kwestie van de haakjes wordt vaak netjes geformuleerd, zoals bijvoorbeeld door Josanne:

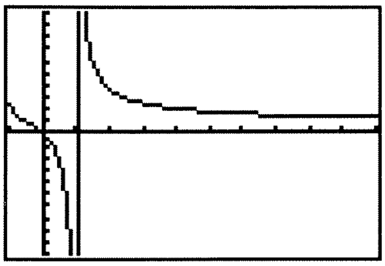
Dan neemt hij de wortel van 4x en daar telt hij 20 bij op, dan krijg je dus veel grotere getallen. Als je de haakjes er wel bij doet neemt hij de wortel van het gehele 4x + 20.

Bij vraag b. ontstaan echter de problemen. Een aantal leerlingen denkt niet aan het verband met de afgeleide en vat de vraag niet goed op. Ze denken dat het de bedoeling is dat ze de bijzonderheden van de grafiek van Y2 beschrijven, wat in het licht van het lesmateriaal geen vreemde gedachte is. Het missen van de link naar de afgeleide heeft grote gevolgen voor de onderdelen d. en e., want de zin hiervan is dan niet duidelijk.
Ook onderdeel c. heeft te lijden onder de misverstanden van b. De leerlingen gebruiken verschillende strategieën. Sommigen lopen met TRACE over de grafiek van Y2 en onderzoeken waar de functiewaarde 1 is. Anderen gaan juist uit van de grafiek van Y1. Uit de coördinaten van twee punten van deze grafiek berekenen ze een benadering van $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Ze zoeken nu waar deze benadering ongeveer 1 is. Daarbij komt het voor dat Δx gelijk aan 1 genomen wordt, wat leidt tot een grote onnauwkeurigheid.
Vraag d. is voor wie b. goed heeft niet moeilijk. Bij e. tenslotte herkennen veel van de leerlingen die zover gekomen zijn wel de factor 4. Dit resulteert echter maar zelden in de goede formule voor de afgeleide.
Het beeld van deze vraag is naar mijn idee wat vertroebeld doordat de leerlingen al enige tijd niet meer met de (numerieke) afgeleide bezig zijn geweest, waardoor met name vraag b. slecht beantwoord werd.

De volgende opgave maakte deel uit van het proefwerk wiskunde B.

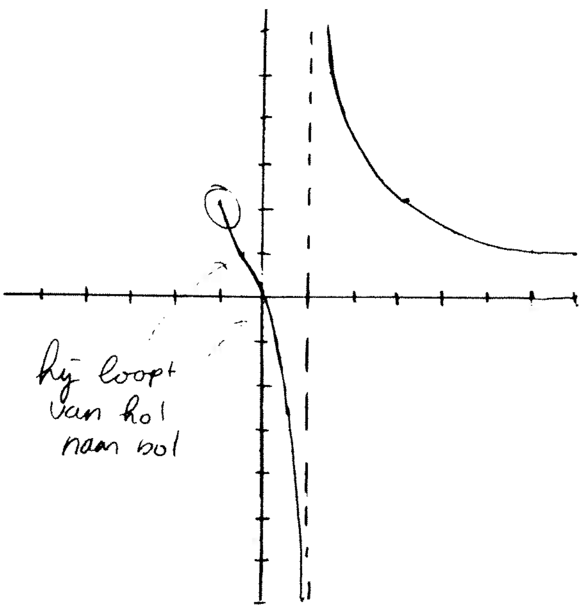
4. Gegeven is de functie f met $f(x) = 5 \cdot \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x-1}$.
   a. Teken de grafiek met de grafische rekenmachine. Welke instelling van RANGE geeft een goed beeld?
   b. De grafiek op het beeldscherm geeft in enkele opzichten de werkelijke grafiek niet goed weer. Welke beperkingen vertoont de weergave op het beeldscherm?
   c. Teken de grafiek van f nauwkeurig op papier; neem 1 cm als eenheid.

Hieronder staat de grafiek zoals die weergegeven wordt door de grafische rekenmachine als x van -1 tot 10 loopt en y van -10 tot 10. De meeste leerlingen vinden bij onderdeel a. een vergelijkbare instelling van het kijkvenster.



Onderdeel b. biedt een grotere variatie aan antwoorden. Een groot deel van de leerlingen vindt dat er met de verticale asymptoot iets mis is. De meesten hiervan merken op dat die eigenlijk geen deel van de grafiek uitmaakt, maar dat de Ti-81 deze lijn ten onrechte tekent door punten aan beide zijden met elkaar te verbinden. Een aantal leerlingen ziet dat het randextreem niet goed wordt weergegeven. Een enkeling wijst op het feit dat de grafiek aan de rechterkant al vlak lijkt te lopen, terwijl dat in werkelijkheid niet het geval is. Goed gezien!

De grafiek van Meindert hieronder is representatief voor de resultaten.



In het algemeen zijn de grafieken die op papier verschenen netter en duidelijker dan bij het vorige proefwerk het geval was. De verticale asymptoot komt goed naar voren, de horizontale iets minder omdat de grafiek daar maar langzaam op af kruipt. De meeste grafieken gaan netjes door (0,0). Wat tegenvalt is het feit dat een deel van de leerlingen het randextreem $(-1,\frac{5}{2})$ niet goed heeft. Kennelijk is dat toch weer aan hun aandacht ontsnapt en hebben ze de waarde van het beeldscherm afgelezen. Dat er een buigpunt is, ziet ongeveer een derde deel van de leerlingen. Dat is niet zo verbazend: buigpunten zijn nog niet aan de orde geweest.

Tenslotte

Al met al is het een heel verhaal geworden, van de eerste proefwerken via het nieuwe lesmateriaal naar het tweede proefwerk. Terugkijkend springen de volgende punten in het oog.
Ten eerste is het duidelijk dat het overnemen van een grafiek van het beeldscherm van de grafische rekenmachine op papier inzicht vereist in 'specifieke aspecten' van het gedrag van een functie. Dit inzicht komt niet vanzelf. Wel kan het werken met de grafische rekenmachine bijdragen aan het ontwikkelen daarvan.
Ten tweede is het voor een zinvol gebruik van de grafische rekenmachine nodig dat de leerlingen gevoel ontwikkelen voor de beperkingen van deze machines. Het vermogen om kritisch naar de uitvoer op het beeldscherm te kunnen kijken voorkomt dat foute suggesties overgenomen worden of dat misconcepties ontstaan.

De twee bovenstaande punten vormen een geschikte aanleiding om functies en grafieken nader te onderzoeken. Door aandacht te besteden aan 'interessante' kenmerken van een grafiek en door de beperkingen van de representatie van de grafische rekenmachine expliciet te maken, ontwikkelen leerlingen een globalere kijk op grafieken. Functieonderzoek komt zo in een ander licht te staan, omdat de grafiek het vertrekpunt is, waarvan de beschouwing leidt tot nadere punten van onderzoek.

Literatuur

Brink, J. van den, en M. Doorman (1994). Typisch graphic calculator. *Nieuwe Wiskrant* 14-2, 4-9.

Doorman, L.M., P. Drijvers en M. Kindt (1994). *De grafische rekenmachine in het wiskundeonderwijs.* Utrecht, Freudenthal instituut.

Drijvers, P. (1993). Grafieken classificeren met een grafische rekenmachine. *Nieuwe Wiskrant 12* (3), 33-37.

Kindt, M. (1993). James Bond, de wet van Snellius en wiskunde B. *Nieuwe Wiskrant 13* (1), 45-50.

Kindt, M. (1992[a]). Functie-onderzoek begint met de grafiek I. *Euclides 67* (7), 200-204.

Kindt, M. (1992[b]). Functie-onderzoek begint met de grafiek II. *Euclides 67* (8), 227-230. ❐