Wiskunde en de begraafplaats te Malmok

M. van Kuilenburg / M. Staring
FEO HKL, Tilburg

'Aruba, 'one happy island' zoals de nummerborden van de auto's melden, kent een behoorlijk aantal attracties voor de verwende toerist: vriendelijke mensen, een heerlijk klimaat, uitstekende hotels, casino's, restaurants met lokale gerechten waar je nog jaren van droomt en prachtige zandstranden aan de zuidkust met veel mogelijkheden tot watersport. De noordkust is ruw en moeilijk bereikbaar en herbergt een ruïne, de fameuze 'natural bridge', een enkele baai en een aantal grotten waar in het verleden Indianen bijeen kwamen en waar zij hun schilderingen op de wanden achterlieten.'

Dit zal zo'n beetje het verhaal zijn waar mensen na hun tropische vakantie mee thuiskomen, en dit verhaal is waar. Maar er is meer.
In een vrij klein gebouw in Oranjestad is de archeologische collectie van het eiland verzameld en voor een deel toegankelijk gemaakt voor het publiek. Een rondgang door dit kleine, maar fraaie museum leert dat in de afgelopen tweeduizend jaar het eiland regelmatig bezocht is door Indianen die vanaf het vasteland van Zuid-Amerika overstaken. Nu en dan hebben groepen mensen zich op Aruba gevestigd en de plaatsen waar zij en hun nakomelingen gewoond hebben, zijn met een klein beetje moeite vandaag nog te herkennen: daar treft men op de grond grote schelpen, stenen werktuigen en potscherven aan. In de grond bevindt zich op zulke plaatsen een schat aan archeologische informatie.

De Rijksuniversiteit Leiden verricht samen met het archeologisch museum op Aruba opgravingen met het doel deze bodemschatten te redden voordat ze verloren gaan door de noodzakelijk geachte uitbreidingen van de infrastructuur op Aruba. In dit kader is in 1989 een oude begraafplaats te Malmok blootgelegd.

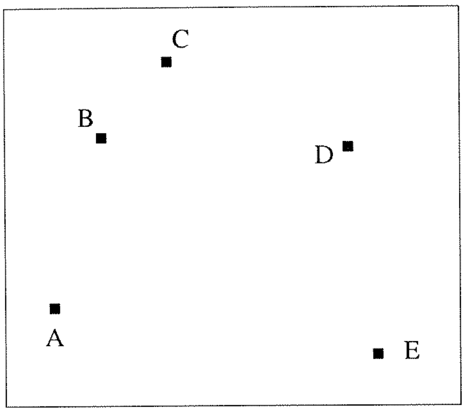
Versteeg, Tacoma, Croes, Wernet en anderen wisten de overblijfselen van veertig individuen op te graven en te onderzoeken; het verslag van hun bevindingen, aangevuld met hetgeen nog te achterhalen was over een twintigtal eerder opgegraven skeletten, is in 1990[1] bij het Arubaanse archeologische museum verschenen.

De mensen van Malmok

In het rapport treft men tal van gedetailleerde analyses aan. Voor zover mogelijk is het geslacht van de doden vastgesteld. De vermoedelijke leeftijd bij het overlijden is bepaald. Anatomisch onderzoek leverde gegevens over de grootte van de mensen en over de kwaal waar een enkeling aan leed. De geschenken aan de doden zijn geïnventariseerd, de grenzen en de oriëntatie van de begraafplaats zijn in kaart gebracht De ouderdom van de vondsten is gemeten en alle resultaten van dit onderzoek zijn door de auteurs vergeleken met hetgeen uit andere onderzoeken in de regio naar voren is gekomen.

De begraafplaats van Malmok

De vraag 'Wie waren deze mensen, waar kwamen ze vandaan, hoe zagen ze er uit, waar leefden ze van en waardoor gingen ze dood?' wordt zo voor een deel beantwoord. Maar er blijven nog vragen over, vragen die te maken hebben met de manier waarop deze mensen met elkaar omgingen. Kenden zij bijvoorbeeld duurzame man-vrouw-verbintenissen? Als dat zo was, dan zijn mogelijk de echtelieden dicht in elkaars buurt begraven, dichter bij elkaar dan bij anderen. In het volgende voorbeeld vormen B en C zo'n paar: dichter bij elkaar dan bij alle andere punten. A en B vormen daarentegen geen paar, alhoewel B toch het dichtst van alle punten bij A ligt.



In welke mate laat de begraafplaats van Malmok zo'n clustering van graven zien? Een ruimtelijke analyse van de posities van de graven dient ertoe op deze vraag (en andere) een antwoord te vinden. In het rapport is zo'n analyse in het tweede hoofdstuk te vinden. Onder andere blijkt dat van de 58 graven waarvan de precieze locatie bekend is, er 34 in paren voorkomen. De twee graven van zo'n paar liggen dus dichter bij elkaar dan bij elk van de andere graven. Maar ja, dat zou ook toeval kunnen zijn: als je 58 munten op tafel gooit, dan blijkt er ook altijd wel een aantal paren voor te komen. In welke mate wordt dus de hypothese dat er graven doelbewust in elkaars buurt gemaakt zijn, ondersteund door het gegeven dat er 17 paren op een totaal van 58 graven voorkomen? Op dit punt aanbeland kom je zonder wiskunde niet veel verder.

Wiskundige modelvorming

Om de problematiek toegankelijk te maken voor een wiskundige analyse, wordt allereerst een aantal vereenvoudigingen aangebracht in de situatie. In plaats van een begraafplaats stellen we ons een plat vlak voor. De contouren van de begraafplaats worden in eerste instantie niet in de beschouwing betrokken: er wordt verondersteld dat de begraafplaats zo groot is 'als je zelf wilt'. In plaats van graven van mensen stellen we ons stipjes op het platte vlak voor, die daar met een zekere dichtheid (zoveel stipjes gemiddeld per oppervlakte-eenheid) voorkomen.
Het plaatsen van de graven kan, onder de veronderstelling dat de graven op willekeurige wijze zijn verdeeld over het oppervlak, worden opgevat als een kansexperiment. Van de Velde (in [1], p. 44) merkt nu over de waarschijnlijkheid van het optreden van paren op:

> '(...) when 58 graves are positioned 'at random', without regard to the others, the probability of one being mutual neighbour is nearly 1 in 58, additional pairs reducing the total probability considerably. The occurrence of 17 pairs by chance alone is zero.'

Echter, zo zit de vork niet helemaal in de steel. Te berekenen is immers niet de kans dat een willekeurig punt B zich dichter dan de andere in de buurt van punt A bevindt (die kans is inderdaad 'ongeveer' $\frac{1}{58}$, namelijk $\frac{1}{57}$ zoals de auteur terecht concludeert (p. 66)), maar de kans dat B zich dichter dan de andere bij A bevindt onder het gegeven dat A zich dichter dan de rest bij B bevindt: een voorwaardelijke kans, dus. De juiste wijze om de kans op paren vast te stellen ontlenen we aan Pielou[2], die overigens bij haar berekening opmerkt:

> 'Situations in which such a hypothesis (that individuals tend to occur as isolated couples, MS&MvK) would be worth postulating and in need of testing are hard to think of.' (p. 122).

We gaan ervan uit dat de kans p dat een stip op een aangewezen vierkante centimeter terecht komt, erg klein is. Bovendien veronderstellen we dat de kans dat er op één vierkante centimeter twee of meer stippen terecht komen, gelijk is aan nul. Nemen we ook nog aan dat de stippen volstrekt willekeurig, en dus onderling onafhankelijk, gestrooid worden over het oppervlak, dan zal het aantal stippen per vierkante meter binomiaal verdeeld zijn, met parameters: *aantal* = 10000 en *kans* = p, dus met verwachtingswaarde $10000 \cdot p$. Deze verwachtingswaarde stellen we gelijk aan μ: het aangetroffen gemiddelde aantal graven per vierkante meter.
In de situatie van Malmok is μ bij benadering gelijk aan

$$\frac{58}{50 \cdot 200} = 0{,}0058$$

want de begraafplaats is ongeveer 50 bij 200 meter groot. Dat houdt in dat het aantal stippen per vierkante meter Bin(10000, 0,00000058)-verdeeld is. Volgens de theorie over kansverdelingen is deze verdeling (groot *aantal* herhalingen van een tweewaardig experiment met *kleine* succeskans per herhaling) bij benadering gelijk aan een Poisson-verdeling met verwachtingswaarde μ.

Dus

$$\text{P(aantal graven op 1 m}^2\text{ is } k) = \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$$

Ook geldt:

$$\text{P(aantal graven op } a \text{ m}^2\text{ is } k) = \frac{(a\mu)^k}{k!}e^{-a\mu} \qquad (1)$$

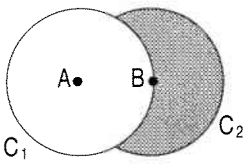
Berekening

We berekenen nu de kans dat twee punten A en B op afstand tussen r en $r + dr$ deel uitmaken van een paar.

Deze kans is gelijk aan:

P(A ligt het dichtst bij B | B ligt het dichtst bij A)
= P(A dichtst bij B | B dichtst bij A) · P(B dichtst bij A)
= $P_1 \cdot P_2$.

Om de kansen P_1 en P_2 te berekenen denken we het punt A geplaatst in de oorsprong van een rechthoekig assenstelsel en B op afstand tussen r en $r + dr$ van A (zie de figuur).



De kans P_2 dat B het dichtst ligt bij A is gelijk aan de kans dat er zich binnen cirkel C_1 géén andere stippen dan A bevinden, $a = \pi r^2$ en $k = 0$ in formule (1), vermenigvuldigd met de kans dat er precies één stip ligt op afstand tussen r en $r + dr$ van A, $a = 2\pi r dr$ en $k = 1$ in formule (1).

Dus

$P_2 = e^{-\pi r^2 \mu} \cdot 2\pi r dr \mu \cdot e^{-2\pi r dr \mu}$

Omdat voor kleine dr geldt $e^{-2\pi r dr} \approx 1$

is bij benadering $P_2 = 2\pi r \mu e^{-\pi r^2 \mu} dr$.

Om de voorwaardelijke kans P_1 te berekenen, redeneren we als volgt. Het feit dat B het dichtst bij A ligt betekent dat alle stippen (behalve A) buiten cirkel C_1 liggen. Als nu van alle stippen A het dichtst bij B ligt, betekent dit dat in het gearceerde gebied géén stippen mogen liggen. De oppervlakte van dit gebied is gelijk aan

$$\iint_{C_2 \setminus C_1} 1\, dxdy = \lambda \pi r^2 \text{ waarin } \lambda \approx 0.61.$$

Dus

$a = \lambda \pi r^2$ en $k = 0$ in formule (1), $P_1 = e^{-\lambda \pi r^2 \mu}$.

Conclusie:

De gevraagde kans is gelijk aan

$$P_1 \cdot P_2 = 2\pi r \mu e^{-\pi r^2 \mu} e^{-\lambda \pi r^2 \mu} dr.$$

Door nu deze kans te sommeren over alle (positieve) r vinden we de kans P dat een willekeurig punt A deel uitmaakt van een puntenpaar:

$$P = \int_0^\infty 2\pi r \mu e^{-(\lambda + 1)\pi r^2 \mu} dr = \frac{1}{\lambda + 1} \approx 0.62$$

Toegepast op de begraafplaats van Malmok: wanneer de 58 graven op willekeurige wijze verdeeld zijn over de begraafplaats, dan zijn er zo'n 18 paren te verwachten (immers 62% van 58 is iets minder dan 36 en dan zijn er $\frac{36}{2}$ = 18 paren). Omdat te Malmok 17 paren zijn aangetroffen, is er dus vooralsnog geen reden om te veronderstellen dat die graven doelbewust zo geplaatst zijn, althans: geen wiskundige reden. De veronderstelling dat de mensen van Malmok hun doden dicht in de buurt van de eventuele partner van die dode begroeven, lijkt dus niet door deze berekening ondersteund te worden.

Verfijning van het model

Het is echter nog te vroeg om definitieve conclusies te trekken. We dienen nog na te gaan of er sprake kan zijn van duidelijke randeffecten. Daar wordt het volgende mee bedoeld: in het wiskundige model is verondersteld dat de begraafplaats zo groot kon worden voorgesteld als je zelf wilde. Op die manier krijgt elke stip op den duur aan alle kanten wel buren, omdat we om die stip de begraafplaats in gedachten gewoon kunnen uitbreiden. Dat is natuurlijk niet realistisch: de begraafplaats te Malmok is niet oneindig groot maar wordt beperkt door een contour (van ongeveer 50 bij 200 meter) waarbinnen de Indianen hun doden begroeven. Worden binnen zo'n contour 58 stippen op willekeurige plaatsen gezet, dan heeft een centraal gelegen stip weliswaar een kans van ruim 60% om deel uit te maken van een paar, maar voor stippen aan de rand ligt het anders. Stippen aan de rand hebben minder naburige stippen dan centraal gelegen punten en dus mogelijk minder kans om tot een paar te behoren. Anderzijds hebben ze natuurlijk ook minder concurrenten. Een berekening als hierboven laat zelfs zien dat stippen die in een (erg scherpe) hoek van de begraafplaats zouden liggen, nog maar een kans van 0,25 hebben om tot een paar te behoren. Voor gewone randpunten zal de kans dus ergens tussen 0,25 en 0,62 in liggen. Als nu genoeg stippen eigenlijk de status van randpunt of hoekpunt verdienen, omdat hun kans om tot een paar te behoren beduidend kleiner is dan 0,62, dan dienen we mogelijk onze conclusie (dat de hypothese dat mensen doelbewust bij elkaar in de buurt werden begraven verworpen moest worden) te herzien.

Computersimulatie

Omdat berekeningen als hierboven voor stippen die niet centraal gelegen zijn èn ook niet precies op de rand liggen al snel leiden tot bijzonder lastig op te stellen integralen (het uitrekenen ervan is tegenwoordig niet meer zo'n kunst), nemen we op dit punt onze toevlucht tot een computersimulatie. Er is nog een reden om de resultaten van de berekeningen via een simulatie te testen: in de afleiding immers, is op een aantal plaatsen benaderd (een binomiale kansverdeling door een Poisson-verdeling, een e-macht door zijn eerste orde-benadering) en het is maar de vraag of zulke 'gestapelde' benaderingen niet al te zeer leiden tot onbetrouwbare berekeningsresultaten.
Zet dus de computer aan en definieer een rechthoekig gebied van 50 bij 200 en laat daar een aantal malen 58 stip-

{definieer het aantal simulaties:}

```
> poging:=15:
```

{definieer het aantal stippen dat geplaatst moet worden:}

```
> aantal:=58:
```

{het gewenste aantal stippen wordt random in een rechthoek van 50 bij 200 geplaatst:}

```
> for k from 1 to poging do
>       eerste:=rand(50): tweede:=rand(200):
>       for i from 1 to aantal do
>          x[i]:=eerste(): y[i]:=tweede()
>       od:
```

{de onderlinge afstanden van de punten worden bepaald en van elk punt wordt het "buurpunt" bepaald:}

```
>       for i from 1 to aantal do
>          minimum:=300.0:
>          for j from 1 to aantal do
>             d[i,j]:=evalf(sqrt((x[i]-x[j])^2+(y[i]-
              y[j])^2)):
>             if j<>i then if d[i,j]<minimum then
              minimum:=d[i,j]: buur[i]:=j fi:
>             fi:
>          od:
>       od:
```

{van elk punt wordt nagegaan of het de buur van het punt is dat er het dichtste bij ligt; het aantal van deze wederzijdse buren wordt geteld:}

```
>       buren[k]:=0:
>       for i from 1 to aantal do
>          b:=buur[i]:
>             if buur[b]=i then buren[k]:=buren[k]+1:
  fi:
>       od:i:='i': j:='j':
> od:
```

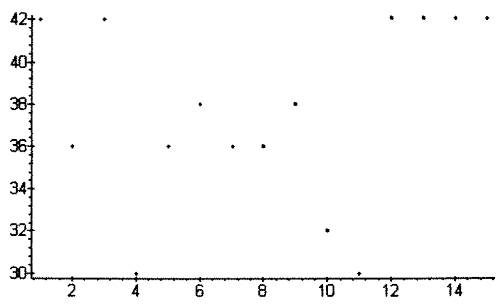
{een lijst van de pogingnummers en het daarbij aangetroffen aantal wederzijdse buren wordt samengesteld en de gemiddelde fraktie wederzijdse buren per poging wordt berekend; de resultaten worden grafisch weergegeven:}

```
> k:='k':
> punten:=[[k,buren[k]] $k=1..poging];k:='k':
> gemiddelde_fraktie:=evalf(sum(buren[k]/(po-
  ging*aantal),k=1..poging));k:='k':
> plot(punten,style=POINT);
```

De output:

punten := [[1, 42], [2, 36], [3, 42], [4, 30], [5, 36], [6, 38], [7, 36], [8, 36], [9, 38], [10, 32], [11, 30], [12, 42], [13, 42], [14, 42], [15, 42]]

gemiddelde_fraktie := .6482758621



Het Maple-programma met de gegenereerde output. Tussen accoladen staat enige toelichting bij het programma

pen *at random* plaatsen en tel telkens de stippen die behoren tot een paar. Het bovenstaande Mapleprogramma[3] genereerde de daarbij staande *output*. Daaruit blijkt dat de randeffecten verwaarloosd mogen worden en dat de benaderingen geen storende vervormingen in de uiteindelijke kans te zien geven (of compenseren beide invloeden elkaar?). Experimenten met langgerekter gebieden ('meer rand') en experimenten met een hogere stippendichtheid ('meer centrale punten') gaven dezelfde resultaten te zien.

Conclusie

De hypothese dat de mensen van Malmok doelbewust in tweetallen dicht bij elkaar begraven zijn, moeten we verwerpen: een puur toevallige strooiïng van punten leidt tot ongeveer hetzelfde aantal paren. De archeologische interpretatie hiervan is echter een zaak waar we ons niet graag aan wagen.

Noten

[1] A.H. Versteeg, J. Tacoma and P. van de Velde (1990). *Archaeological Investigations on Aruba: the Malmok Cemetery.* Publication of the Archaeological Museum Aruba and of the Foundation for Scientific Research in the Caribbean Region.

[2] Pielou, E.C. (1969). *An Introduction to Mathematical Ecology.* John Wiley & Sons, New York, p.121-122.

[3] MAPLE V-3 is een computeralgebrapakket voor het uitvoeren van numerieke en exacte berekeningen en het tekenen van 2D- en 3D-grafieken en -animaties. MAPLE V-3 is gecreëerd door Waterloo Maple Software, Waterloo, ON, Canada N2L 3G1.

Naschrift bij 'Wiskunde en de begraafplaats te Malmok'

Het is voor een archeoloog een eer dat een artikel van hem in een blad voor wiskundigen besproken wordt, zelfs al is die bespreking negatief, in dit geval zelfs terecht negatief. Het door Staring & Van Kuilenburg besproken punt, het al dan niet te verwachten zijn van gepaarde punten in een strooiing (i.c. graven in het grafveld van Malmok) berust op een slip of the pen mijnerzijds, en ik had het kunnen weten: het door hen gereproduceerde argument van Pielou is mij bekend. Die uitglijder is onderdeel van de redenering die ter interpretatie van de ruimtelijke verspreiding van de graven in dat oude Indiaanse grafveld opgezet is, en doet daar naar ik meen verder niet substantieel van af. Als toelichting geef ik in dit commentaar derhalve graag een samenvatting van mijn gehele argument.

Voorafgaand aan het gewraakte, had ik vastgesteld dat de 58 graven in Malmok nogal geklonterd over de ruimte gespreid zijn: bij een verwachte onderlinge gemiddelde naaste-buur afstand ('nba' in het vervolg) van 7m[1] bleek de gemeten gemiddelde afstand 4 m. Op die basis ben ik op de plattegrond op zoek gegaan naar grafgroepen (zeven in getal), en bemerkte en passant dat 34 graven wederzijds naaste buren waren. Daarna volgde mijn misser: 34 gepaarde individuen uit 58 leek mij een onverwacht groot aantal, maar met Pielou, Staring & Van Kuilenburg weet ik nu dat zo veel zelfs ongeveer te verwachten zijn. In de op stapel staande nieuwe, uitgebreidere uitgave van het Malmokboek zal de tekst uiteraard in deze zin gewijzigd worden.
Daarna volgt een nadere beschouwing van deze paren, waarbij opvalt dat van de naar geslacht herkenbare graven (tien vrouwelijke bijzettingen, zeven mannelijke), zes paar gemengd, en één paar gelijkgeslachtelijk (op grond van leeftijdsverschillen wellicht moeder en dochter) is samengesteld, en de overige hetzij een kind, hetzij een niet-determineerbare partner hebben. De binomiaal verdeelde kans op hooguit één ongemengd paar in zeven paren is te berekenen als 0,06, waarmee het voorkomen van een huwelijkse band in die samenleving van 1200 jaar geleden zo nodig nogmaals wordt bevestigd.
Aan het eind van mijn opstel ben ik ingegaan op de verdeling over het grafveld van de centrale graven van de zeven groepen, daartoe aangezet door de speciale markering van die graven middels een soort mini-hunebedden van koraalblokken. Hun nba-coëfficiënt bleek 1,9 (17 m waargenomen, 9 m verwacht), vrijwel gelijk aan de hoogst mogelijke waarde van die index 2,16, en daarmee wijzend op een bijna maximaal afliggend (hexagonaal) patroon.
Naar mijn inzicht worden deze punten niet aangetast door de gesignaleerde fout.

Noot

[1] De vorm- en randproblemen bij nba-simulatie – ook door Staring & Van Kuilenburg aangegeven – zijn althans technisch oplosbaar: de toolbox van de Apple Macintosh kent zowel polygons als regions, 2D datastructuren met respectievelijk rechtlijnige en vrije omtrek. Door van een waargenomen verdeling de omtrek vast te stellen, daarmee het oppervlak en een benadering van de verwachte nba te berekenen en vervolgens de grens van het simulatieveld één nba naar buiten te leggen en als region of polygon te definiëren, kan een goede benadering verkregen worden.

Pieter van de Velde
Archeologisch Centrum Rijksuniversiteit Leiden