# Vlakke Meetkunde, waardevol voor wiskunde B?

**M. Kindt**
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

*(...) Helder redeneren vereist dat de leerling zich er voortdurend rekenschap van geeft dat de dingen die hij zegt of opschrijft een betekenis hebben en zich lenen voor begrip en niet slechts voor toepassing van een aangeleerd recept.*
Uit: Rapport Studiecommissie Wiskunde B vwo[1].

Wat is er zoal geschreven over wiskunde B?
Het vak:
- is aardig aan het roesten
- is te algoritmisch
- is niet realistisch
- is niet inspirerend (met als mogelijk gevolg dat er te weinig wiskundestudenten zijn)
- hoeft slechts een beetje gemoderniseerd te worden
- zal drastisch veranderen als de grafische rekenmachine (of een stap verder: computeralgebra) voor iedere leerling beschikbaar is
- doet haast niets aan datgene waar het in de wiskunde eigenlijk om gaat, namelijk redeneren en bewijzen
- geeft een vertekend beeld van wiskunde.

De discussie, breed gevoerd, is met de verschijning van het wiskunde B rapport nog niet verstomd. Maar veel tijd is er niet meer, want de vakontwikkelgroep voor wiskunde in de profielen heeft wat je noemt een spoedopdracht en zal nog voor het eind van dit cursusjaar haar denkbeelden moeten omzetten in leerplanvoorstellen. Dat dit, gelet op de vele randvoorwaarden, geen sinecure is, de lezer zal er niet aan twijfelen.
In dit artikel zal ik niet een globaal beeld geven van de ideeën van de vakontwikkelgroep – die zullen spoedig openbaar worden gemaakt – maar wil ik me beperken tot meetkunde. De tijdgeest lijkt rijp voor een herwaardering van wat ik in de kop van dit artikel 'vlakke meetkunde' heb genoemd. *Gegeven, te bewijzen, bewijs*: heeft de geschiedenis niet geleerd dat daarmee de deductie is begonnen? Daar waar de differentiaal- en integraalrekening zich niet leent voor een min of meer exacte behandeling op school (alle pogingen van de jaren zeventig ten spijt) en waar ruimtemeetkunde te complex is voor een rigide behandeling (ruimtelijk inzicht en de dwang tot bewijzen interfereren nogal eens met elkaar), lijkt de aloude planimetrie een goede kandidaat om de lacunes ten aanzien van redeneren en bewijzen in de wiskundige vorming op te vullen. Zij is niet de enige: getaltheorie en grafentheorie worden in dit opzicht ook veelvuldig genoemd.
De meetkunde heeft echter het voordeel dat zij aanschouwelijk is en dat de abstracte redenering steeds een min of meer concrete basis heeft.
De vraag is natuurlijk of je het kunt maken, zo tegen het jaar 2000, om Euclides uit het stof te bevrijden en de toch niet eenvoudige klassieke meetkunde in een modern programma op te nemen. Per slot was dit in het verleden nu ook weer niet zo'n succes-story, al denken vele (niet al te jonge) wiskundigen met weemoed terug aan die tijd.
In de vakontwikkelgroep leeft de gedachte dat de basisactiviteiten bij wiskunde in *elk* profiel zouden moeten zijn: *modelleren, abstraheren* en *redeneren* (bij de wiskunde voor Natuur en Techniek zou het laatste dan vooral *deductief* redeneren zijn). Als je nu de traditionele schoolboeken voor meetkunde uit zeg de jaren vijftig bekijkt, dan vind je van de eerste twee genoemde aspecten weinig terug. Zo willen we het dus niet. Maar hoe dan?

## Drie opties

Om te beginnen wil ik de mening uitspreken dat synthetische (vlakke) meetkunde wel degelijk een gebied kan zijn waarin de bovengenoemde drie aspecten van wiskunde aan hun trekken kunnen komen, mits... de band met de werkelijkheid die de ontstaansgeschiedenis van het vak kenmerkt, wordt aangehaald. Bovendien verschaft de beschikbaarheid van krachtige software-pakketten als 'Sketch-pad', 'Cabri-meetkunde' of 'Geometry Inventor', ons thans de mogelijkheid om dynamische aspecten van de meetkunde wat meer te belichten en om leerlingen te activeren tot verkenning en onderzoek. Zo kan onderwijs in klassieke onderwerpen onverwacht modern worden.
Meetkunde is dermate rijk aan vertakkingen en heeft zoveel moois te bieden, dat het moeilijk kiezen is. Ik wil hier een drietal opties noemen, alvorens reclame te maken voor een bepaalde keus.

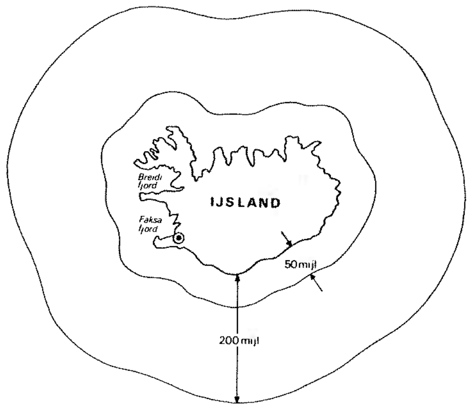
***Optie 1***
Men zou kunnen denken aan een soort mengsel van concrete projectieve meetkunde en klassieke incidentiemeetkunde met stellingen als die van Ceva, Menelaos, Pappos. De leer van het perspectief vormt hiertoe een overdadige bron, zodat inderdaad meetkundige modelvorming kan worden beoefend. Zo zou er een fraai vervolg kunnen ontstaan op de kijkmeetkunde van de onderbouw, hetgeen ik eerder in dit tijdschrift heb betoogd[2]. Het opereren met oneigenlijke punten en het hanteren van het dualiteitsbeginsel zijn mooie voorbeelden van wiskundige abstractie. Dat 'bewijzen' hierbij een serieuze activiteit is, behoef ik niet toe te lichten.
Deze optie is summier beschreven in het wiskunde B-rapport.

***Optie 2***
De meetkunde van translaties, rotaties en spiegelingen, kortom transformatiemeetkunde, was een belangrijk bestanddeel in bourbakistisch georiënteerd meetkundeonderwijs zoals dat in de jaren zestig wereldwijd werd gepropageerd. In Nederland is de transformatiemeetkunde spoedig na de invoering doodgebloed en gereduceerd tot een louter kennismaken met bovengenoemde afbeeldingen en eenvoudige symmetriebeschouwingen. De bewijscultuur met transformaties bleek voor jonge leerlingen te lastig en groepentheoretische aspecten hebben nog wel in sommige leerboeken gefigureerd, maar er zijn nauwelijks serieuze pogingen gedaan deze te onderwijzen. In het voormalige wiskunde II bleef de transformatiemeetkunde beperkt tot wat matrixrekening.
Misschien heeft een revival van synthetische transformatiemeetkunde kans van slagen bij een oudere (en bovendien geselecteerde) groep leerlingen. Ook hier liggen verbindingen met de beeldende kunst (ornamenten) voor de hand en een serieus toepassingsgebied is cristallografie. Er zijn verschillende niveaus van abstractie denkbaar: van het classificeren van patronen via meetkundige constructies en operaties naar een elementaire studie van enige transformatiegroepen.

***Optie 3***
Tenslotte denk ik aan metrische meetkunde met aan afstand, hoek of oppervlakte gekoppelde meetkundige plaatsen, waarbij kan worden doorgestoten naar een elementaire synthetische behandeling van de drie typen kegelsneden. Het modelleeraspect is hier gemakkelijk te accentueren: visserijzones en de verdeling van het continentaal plat, navigatie op zee, momenten en zwaartepunten, enzovoorts. Ook hier kunnen abstractie en bewijzen ruimschoots aan bod komen.
Die metrische meetkunde, waarvan ik in dit artikel nu een stukje zal schetsen, lijkt van de drie het meest nabij leerling en leraar. Verder is zij uitermate rijk en lijkt de vereiste bewijstechniek hier goed bereikbaar voor leerlingen van het VWO. Wat dit laatste betreft, kan men zijn twijfels hebben bij de andere twee opties. Toen mij onlangs bleek dat Aad Goddijn en Dirk Siersma bij een college 'concrete meetkunde' op het Mathematisch Instituut in dit spoor een aantal interessante zaken (zoals invloedsferen en conflictlijnen) hadden aangeroerd, kreeg ik het gevoel dat dit wel eens raak zou kunnen zijn...

## Iso-afstandslijnen

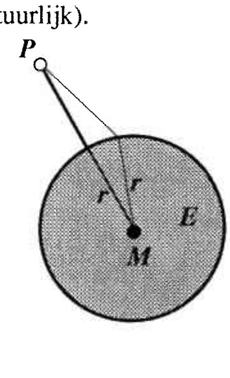
Denkend aan metrische meetkunde herinnerde ik mij een oud artikel van het tijdschrift Pythagoras[3], waarvan een collega onlangs opmerkte dat dit eigenlijk op de boekenlijst van de toekomstige leerling 'natuur en techniek' zou moeten staan, maar dit terzijde. Op de kaft van het nummer was de Noordzee verdeeld in 'territoriale wateren' en binnenin stond een aardig plaatje van IJsland, getooid met een 20- en een 50-mijlszone.



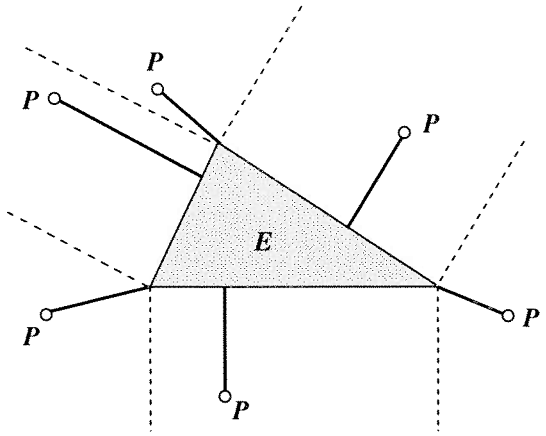

Hoe komt men aan zo'n zone en waarom is de grens zo gladjes in vergelijking tot de grillige kust van het eiland? Trouwens, hoe meet je de afstand van een punt in zee tot het eiland?
Om met dit laatste te beginnen: de afstand van een punt $P$ tot een gebied $E$ is per definitie het *minimum* van de afstanden van $P$ naar alle mogelijke punten van $E$.
Wat beknopter uitgedrukt:

$$d(P, E) = \min_{X \in E} d(P, X)$$

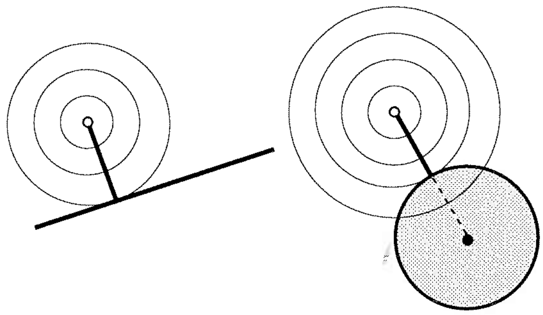
Tussen twee haakjes: een wat subtielere definitie krijg je als minimum door 'infimum' wordt vervangen, maar voor het VWO lijkt de eerste me voldoende.
Volgens het minimumbeginsel is de afstand van een punt tot een rechtlijnige kust gelijk aan de afstand van dat punt tot het voetpunt van de loodlijn op die kust. De afstand van een punt tot een cirkelschijf met middelpunt $M$ en straal $r$ is eenvoudige gelijk aan $d(P,M) - r$ (mits P buiten de cirkel ligt natuurlijk).



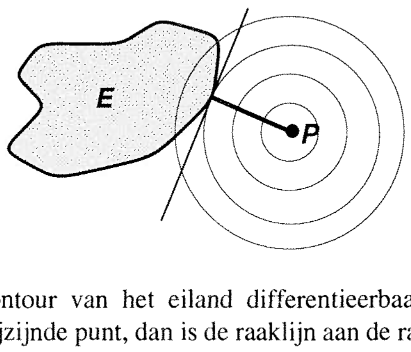
Dat laatste bewijs je gemakkelijk met de 'driehoeksongelijkheid', een van de grondregels van de metrische meetkunde.
Voor de afstand van een punt tot een veelhoekig eiland ligt het iets ingewikkelder. Afhankelijk van de positie van $P$ moet een loodlijn naar de kust of een verbindingslijn naar een hoekpunt ('kaap') worden getrokken.



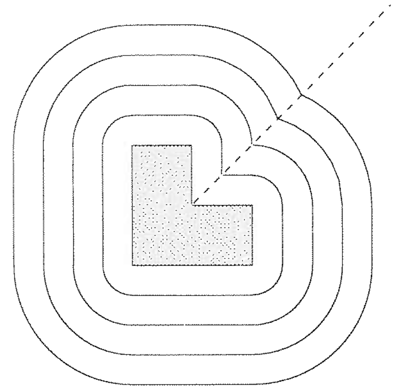

Er is nog een andere manier om naar de afstand van een punt tot een lijn of cirkel te kijken: $P$ is zojuist in het water geploft en genereert een golffront van concentrische cirkels. De eerste de beste die het gebied treft, levert de afstand tot dat gebied:



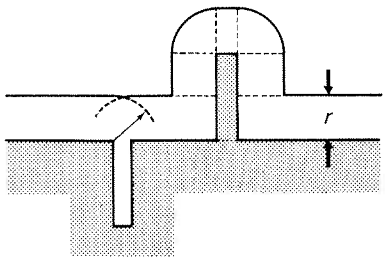
In combinatie met wat eerder is opgemerkt over de afstand van punt tot lijn en cirkel, geeft dit meteen criteria voor het raken van cirkel aan lijn en cirkel. Het grappige van de tweede zienswijze is dat zij toegepast kan worden op een min of meer willekeurig gebied:



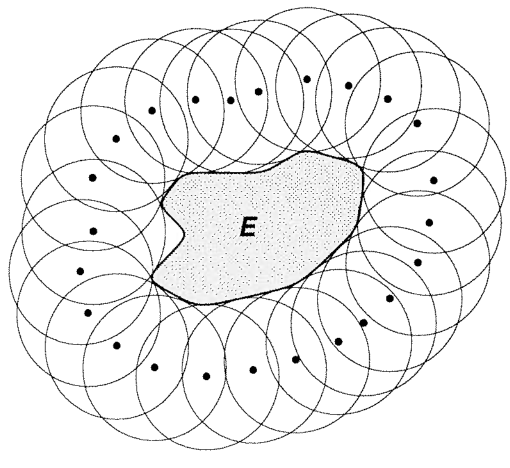

Is de contour van het eiland differentieerbaar in het dichtstbijzijnde punt, dan is de raaklijn aan de raakcirkel aldaar tevens raaklijn aan het eiland en staat het kortste verbindingslijnstuk dus loodrecht op het eiland!
Nu we weten wat de afstand van een punt tot een gebied is, kunnen patronen van zogenaamde iso-afstandslijnen worden bestudeerd.
Is het gebied een rechte lijn dan bestaat het patroon uit een stelsel evenwijdige rechten, bij een cirkelgebied hoort een stelsel concentrische cirkels, bij een vierkant gebied vind je een collectie gesloten krommen, bestaande uit lijnstukjes en cirkelbogen die 'ronder' ogen naarmate de afstand tot het gebied groter is. Bij een L-vormig gebied komt er dit:



Het deukje, aanvankelijk nog met een hoek van $90^o$, wordt flauwer, naarmate de zonebreedte toeneemt en dit geeft een indicatie voor een verklaring van het fenomeen van de gladder wordende krommen rond IJsland.
In het betreffende Pythagorasnummer stond, om dit uit te leggen, een zeer illustratief plaatje, waarin de invloed van fjorden en landtongen werd vergeleken:



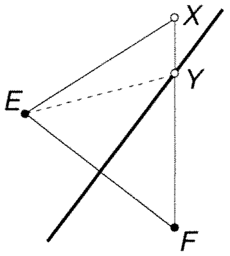

Een dynamische manier om zonegrenzen te vinden is met de methode van de rollende cirkel.



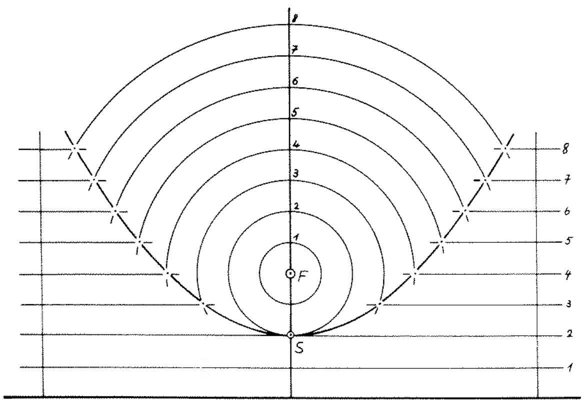

Dit kan worden uitgevoerd met concreet materiaal of op de computer.

## Conflictlijnen

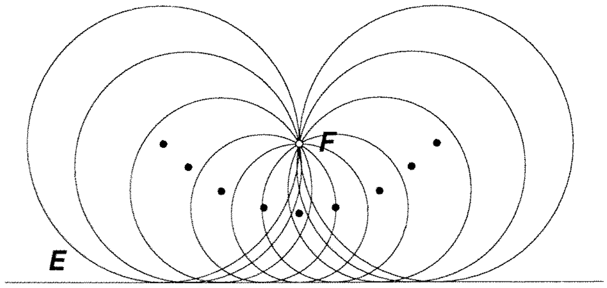
Bekijken we nu twee puntvormige eilanden $E$ en $F$ (in de wijde omgeving is geen ander gebied te bekennen).
We zeggen nu dat het punt $X$ tot de invloedsfeer van $E$ behoort als $X$ dichter bij $E$ dan bij $F$ ligt. Het wordt al gauw duidelijk dat de middelloodlijn van $EF$ de scheidingslijn tussen die sferen is: de *conflictlijn* van $E$ en $F$.



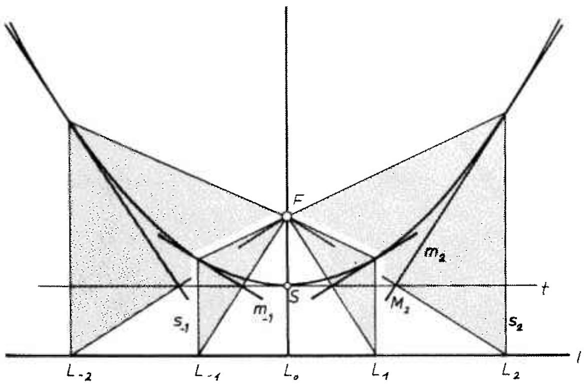

Bij twee evenwijdige rechten is de conflictlijn de middenparallel; bij twee niet-evenwijdige rechten $E$ en $F$ zijn er *twee* (onderling loodrechte) conflictlijnen, namelijk de bissectrices van de hoeken gevormd door $E$ en $F$. De lezer die vertrouwd is met klassieke meetkunde begrijpt dat hier een heel gebied kan worden aangeboord: constructies van cirkels die aan bepaalde eisen voldoen, in het bijzonder omgeschreven, ingeschreven en aangeschreven cirkels van een driehoek. Het redeneerpatroon hierbij is illustratief voor een stukje typisch wiskundig denken (Polya spreekt in [4] over 'the pattern of two locii'): iedere eis bepaalt een 'meetkundige plaats', snijpunten voldoen aan de gecombineerde eis en zo blijkt dan bijvoorbeeld dat de drie binnenbissectrices van een driehoek door één punt gaan.
Maar goed, ik keer terug naar de conflictlijnen. Hoe zit het als $F$ een punt is en $E$ een rechte lijn (niet door $F$)? Een manier om dit te onderzoeken is: teken een serie isoafstandslijnen rond $F$ en $E$ en bepaal de snijpunten van corresponderende exemplaren.



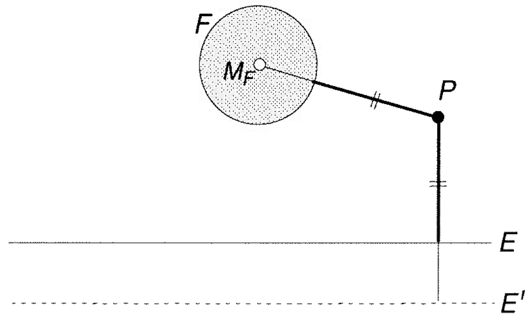

Zo hoort eigenlijk de kennismaking met (en de definitie van) de parabool te zijn: als conflictlijn!
Er is nog een tweede manier om te exploreren: maak cirkels die door $F$ gaan en aan $E$ raken en kijk naar het spoor dat door de middelpunten wordt gemaakt...




En passant wijs ik op de bekende raaklijneigenschap van de parabool, die alles te maken heeft met het gebruik van parabolische schotelantennes.

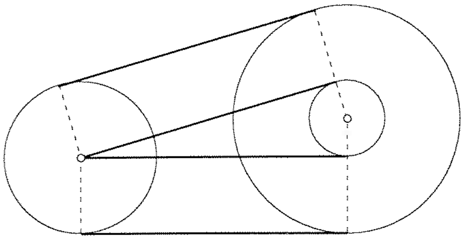



Aardige sommen liggen nu voor het oprapen: een driehoekig eiland voor de rechte kust geeft een conflictlijn die bestaat uit lijn- en paraboolstukken die knikloos in elkaar overgaan, de hierboven geduide raaklijneigenschap staat daar borg voor! Hierbij komt een aardig dwarsverband met de analyse om de hoek en is er een meetkundige ingang naar zoiets als differentieerbare kromme.
De definitie van de parabool met *brand*punt en *richt*lijn mag bij de lezer bekend worden verondersteld; nog niet zo lang geleden was dit immers een (wel wat geïsoleerd) stukje leerstof van het HAVO-programma. Maar wist u dat *brandpunt* in de definitie gerust vervangen mag worden door *cirkel* (zeg $F$ met middelpunt $M_F$ en straal $r_F$)?

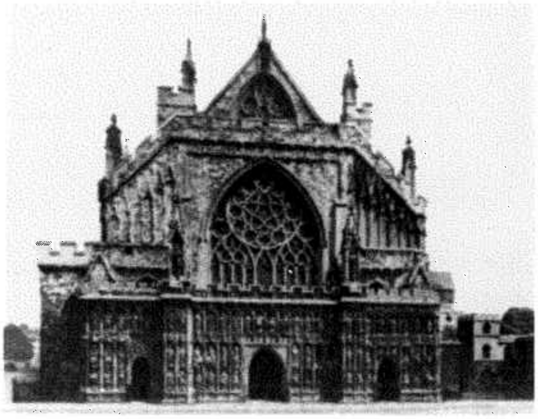


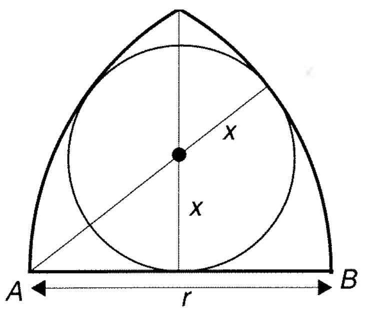

Verschuif de lijn $E$ over een afstand $r_F$ naar $E'$ (zoals in de figuur) en het is duidelijk dat de conflictlijn van $M_F$ en $E'$ dezelfde is als die van $F$ en $E$.
De hier gebruikte techniek om een cirkel tot punt te reduceren staat niet op zichzelf. Een mooi voorbeeld van dit

principe is de constructie van de gemeenschappelijke raaklijnen van twee cirkels.



Een probleem dat te maken heeft met de conflictlijn van cirkel en rechte is dat van de structuur van een Gotisch venster. Een van de standaardvormen van zo'n venster bestaat uit een driehoek met een rechte basis en gebogen opstaande zijden waarin een rakende cirkel is beschreven.



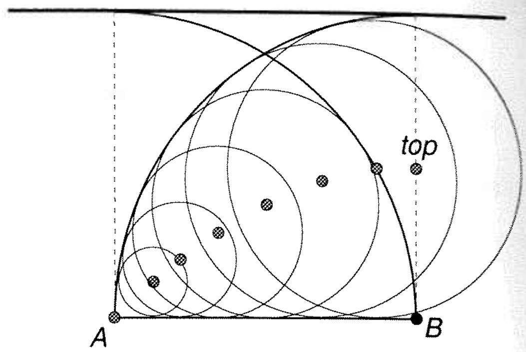



Het middelpunt van de raakcirkel ligt natuurlijk op de middelloodlijn van de basis, maar hoe hoog precies? Dit probleem leidt bijvoorbeeld tot de volgende vergelijking:

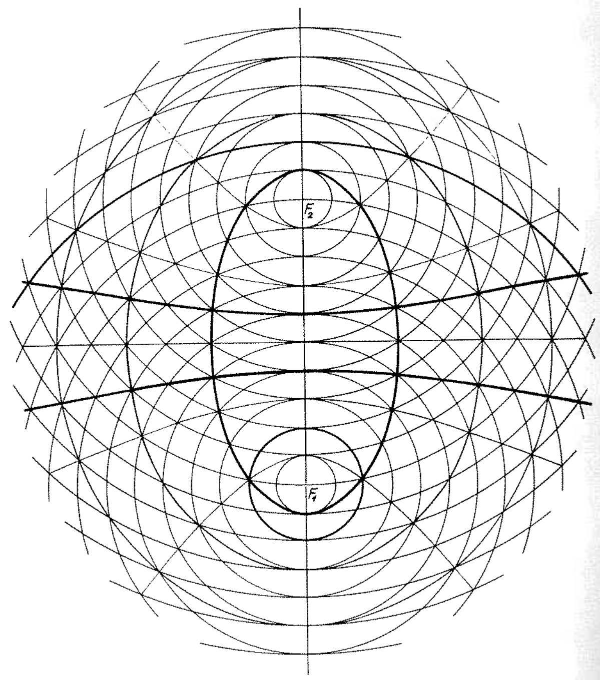
$$x + \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + x^2} = r$$

De oplossing hiervan is $x = \frac{3}{8}r$

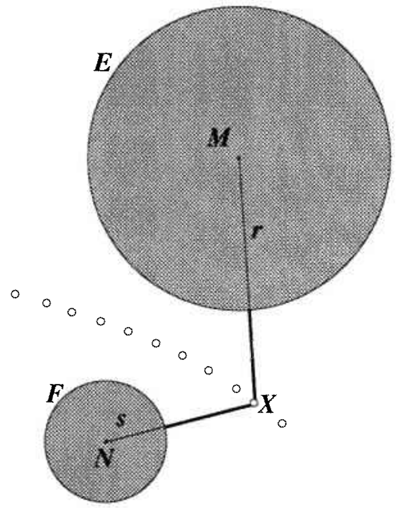
en daarmee is de constructie van de figuur verzekerd. Het middelpunt van de ingeschreven cirkel is het snijpunt van drie 'bissectrices'. De middelloodlijn van $AB$ is er een van en de andere twee zijn parabolen met respectievelijk $A$ en $B$ als brandpunt en met de richtlijn evenwijdig $AB$ (op een afstand $r$).




Na dit nummertje parabool zal men zich afvragen: en de andere kegelsneden dan? Een bekende manier om de ellips en de hyperbool in te voeren is met behulp van twee netten van concentrische cirkels rond de punten $F_1$ en $F_2$. Er ontstaat een soort rooster van 'ruitvormige' cellen en de diagonalen van die cellen zijn dan juist de ellipsen en hyperbolen. Dit komt overeen met de klassieke definities van de beide kegelsneden met behulp van een constante som of (absoluut) verschil van afstanden tot de beide brandpunten.



De hier geschetste ellipsen en hyperbolen (die men *confocaal* noemt) gedragen zich als bissectrices (of conflictlijnen) van de aangrenzende hoeken tussen twee cirkels en zo wordt het na een lokale blik, intuïtief duidelijk dat zo'n ellips en zo'n hyperbool elkaar loodrecht snijden! Van de twee cirkeleilanden om de volgende figuur is de conflictlijn één tak van een hyperbool:




Inderdaad: $d(X,E) = d(X,F) \Leftrightarrow d(X,M) - d(X,M) = r - s$
Toen ik dit demonstreerde op een regionale bijeenkomst van de NVVW (in Amsterdam), werd er spontaan naar de ligging van de asymptoten gevraagd. De suggestie was al gauw: de middelloodlijnen van de gemeenschappelijke raaklijnstukken (uitwendig) van beide cirkels en enig nadenken bevestigt dit vermoeden.
Een vervelend trekje van de klassieke definities van parabool, ellips en hyperbool vond ik altijd dat eerstgenoemde ogenschijnlijk niet in het rijtje paste. Daar was dan een mouw aan te passen door ook bij de ellips en de hyperbool met richtlijnen te werken. Maar de oplossing: 'het zijn allemaal conflictlijnen', vind ik bij nader inzien wel zo elegant. Ik vat nog even samen:

| | conflictlijn van... | en... |
|---|---|---|
| parabool | punt (cirkel) | rechte |
| ellips of hyperbool | punt (cirkel) | cirkel |

Als het punt (de cirkel) *binnen* de andere cirkel ligt, is de conflictlijn een ellips, liggen punt (cirkel) en cirkel *buiten* elkaar, dan komt er een hyperbooltak. Een aardige puzzel is het om bij twee elkaar snijdende cirkels (niet even groot) de verzameling punten die even ver van beide cirkels af liggen, te schetsen.

## Een module meetkunde

Voorlopig zijn dit, nog nauwelijks geordende, gedachten om te laten zien in welke geest een module 'vlakke meetkunde' gestalte zou kunnen krijgen. Met de kegelsneden ben ik tegelijk ook op een verondersteld eindniveau aangeland. Om eventueel misverstand weg te nemen: het is mij niet te doen om het propageren van een uitgebreide behandeling van de kegelsneden. Wel heb ik het altijd vreemd gevonden dat een zo elementair onderwerp, waarvan geweldig veel mooie en natuurlijke toepassingen bestaan (zie bijvoorbeeld [5]), buiten de boot van het wiskundeonderwijs is gevallen en zo gebrekkig gekend wordt door de huidige generatie β-studenten.
Met dit artikel heb ik vooral willen aantonen dat klassieke meetkunde springlevend, uitdagend en dynamisch kan zijn. Hoever je kunt gaan in een module van pakweg zestig studielasturen, zal in de praktijk moeten worden getoetst. Ook zal er een duidelijke afperking van de stof moeten komen, dat spreekt. In dit artikel heb ik me even beperkt tot het afstandsbegrip en de daaruit voortvloeiende krommen, maar met 'hoeken' is er in deze trant ook veel te beleven.
Een niet te onderschatten didactische opgave zal zijn: hoe past hier het redeneren en bewijzen, want daar was toch veel om begonnen? Een axiomatische opbouw lijkt te ver te gaan en te veel tijd te vergen, maar de leerlingen zullen toch houvast moeten hebben, zo van: wat *mag* je '*zien*' en wat *moet* je '*bewijzen*'? Het idee van een lokaal georganiseerde meetkunde (onder andere bepleit door Freudenthal[6]) heeft mijn voorkeur, maar ik besef dat dit gemakkelijk gezegd en minder gemakkelijk ontworpen is. Voor deze en ook andere leerplangedachten zijn experimenten in de klas, ter toetsing van de haalbaarheid, absoluut noodzakelijk. Een vraag die opkomt (ook bij andere thema's natuurlijk), is of zo'n onderwerp examenbestendig is. Bij meetkunde in de hier geschetste geest heb ik het gevoel dat we wel even vooruit kunnen met het produceren van geschikte sommen voor een c.s.e., zonder direct in herhaling te vallen. Overigens wijs ik er op dat een van de nieuwe zaken van het profielplan is, dat centraal examen en schoolexamen over verschillende onderwerpen kunnen gaan en dat de leerling voor beide examens afzonderlijk moet slagen. Zo is het dus denkbaar dat bepaalde onderdelen van de nieuwe leerplannen niet voor het c.s.e. in aanmerking komen, maar wel uitdrukkelijk tot het schoolexamen behoren, en misschien een andere toetsvorm vragen. Dat zal allemaal helder en ondubbelzinnig moeten worden vastgelegd.
Tenslotte wijs ik op het citaat in de aanhef: het lijkt erop dat meetkunde in een vorm als hier geschetst, uitstekend voldoet aan de daarin ontvouwde gedachte.

## Literatuur

[1] Lange, J. de e.a. (1994). *Rapport van de Commissie Wiskunde B*. Utrecht.
[2] Kindt, M. (1994). Een natuurlijk vervolg op kijkmeetkunde, *Nieuwe Wiskrant, 13*(4), 45-51.
[3] *Pythagoras, Tijdschrift voor jongeren, 15*, april 1976.
[4] Polya, G. (1965). *Mathematical Discovery, vol. I.* Wiley & sons, New York.
[5] Jennings, G. (1994). *Modern Geometry with Applications*. Springer Verlag, New York.
[6] Freudenthal, H.F. (1973). *Mathematics as an educational task*. Reidel, Dordrecht.