Weg met Van Dalen

E. de Moor
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

Wiskundeles

Van Dalen zet zijn bril op scherp
en als hij "stil" roept, voel ik spetters.
Zijn krijtje vult met zacht geknerp,
het zwarte bord met strakke letters.

"Bereken", zegt hij: "zes keer acht
plus negentien keer elf min zeven!"
Het zonlicht kust zijn cijfers zacht
en wekt een trage vlieg tot leven.

Het is zo rustig in de klas
dat je de schoolklok aan de wand hoort.
Na heel wat tikken merk ik pas:
Meneer van Dalen wacht op antwoord.

Marjolein Kool, 1995

Inleiding

Met de invoering van de zakrekenmachine in de basisschool en basisvorming is tevens het probleem van de volgorde der bewerkingen weer actueel geworden. Vroeger leerde men in Nederland het ezelsbruggetje Meneer Van Dalen Wacht Op Antwoord aan om de volgorde van de rekenbewerkingen vast te leggen. De meeste zakrekenmachines zijn echter anders geprogrammeerd, hetgeen aan de organisatie van een rekenoperatie, die uit meerdere bewerkingen bestaat, andere dan de Van Dalen-eisen stelt.
Dit artikel beoogt een bijdrage te zijn tot opheldering van de bestaande situatie en tot een standpuntbepaling, welke past bij dit tijdsgewricht van het reken- en wiskundeonderwijs.

Enige historie

> 'Toen mijne leerlingen laatstleden een vraagstuk oplosten, waarin de waarde moest worden berekend van $1\frac{1}{2} : 3\frac{1}{3} \times 4\frac{1}{7}$, hadden een paar van de vlugste jongens een verkeerd antwoord gekregen. Op mijne vraag, hoe dit zoo kwam, antwoordde men mij, dat hun door een paar collega's geleerd was, dat $1\frac{1}{2} : 3\frac{1}{3} \times 4\frac{1}{7}$ gelijk was aan $(1\frac{1}{2} : 3\frac{1}{3}) \times 4\frac{1}{7}$, en ik had gerekend, dat bovenstaande vorm gelijk $1\frac{1}{2} : (3\frac{1}{3} \times 4\frac{1}{7})$ was.'

Aldus J. van der Veer, onderwijzer te Sappemeer in *Het Schoolblad* van 21 september 1881. Zijn vraag veroorzaakte in de volgende nummers een stoet van reacties, waaruit blijkt dat de 'kenners' het beslist niet met elkaar eens waren. Een zekere De Jong meent dat beide opvattingen juist zijn en dat men maar haakjes of breukvormen moet schrijven. Een andere inzender, ene v.d. Hulst, die zich er op beroemt Phil. Cand. te zijn, spreekt die domme schoolmeesters op de volgende pedante wijze toe:

> 'Mijnheer v.d. V, als U in een der klassen Uwer school een woord liet spellen, bijv. domheid, zoudt U er dan genoegen mee nemen, dat de leerling eerst de tweede lettergreep (heid) spelde en dan de eerste (...). Ik geloof van neen, wel nu, wij staan hier voor het zelfde feit. (...) men behandele zulk een vraagstuk als of men leest, men begint aan het begin en werkt langzamerhand stuk voor stuk naar het eind.'

Maar enige weken later verklaart onze academicus dat zijn lineaire werkwijze voor $a + b : c$ niet geldt, omdat voor × en : een 'verbindende eigenschap' bestaat en daarom dan 'wel deugdelijk b eerst door c gedeeld moet worden'. De kwestie werd hoe langer hoe verwarder. De brave Van der Veer schrijft ook nog een stuk, waarin hij zich onder meer beroept op het toen bekende handboek van Badon Ghijben en Strootman, waarin staat dat de voorrang van de bewerkingen als volgt dient te zijn:
1. Machtsverheffing, 2. Vermenigvuldiging, 3. Deeling, 4. Worteltrekking, 5. Optelling en Aftrekking.
De discussie wordt tenslotte maar gesloten door de redactie.

Reeds meer dan een eeuw geleden kenden we dus al discussies over '**M**eneer **V**an **D**alen **W**acht **O**p **A**ntwoord', waarvan we de beginletters herkennen uit de door Strootman opgesomde trits. Ook wordt wel gebezigd: '**M**en **V**aart **D**e **W**aal **O**p en **A**f'. Zelf leerde ik de Van Dalen-regel al op de lagere school, terwijl we worteltrekken nog niet gehad hadden. Eigenlijk was **V**an **D**alen **O**p **A**meland toen voldoende geweest, waarbij je ook nog moet onthouden dat er voor O en A geen voorrang bestaat, zodat er ook wel het dreuntje **M**en **V**aart **D**e **W**aal **O**p en **A**f of **A**f en **O**p gebruikt werd[1].

Voorrang?

Allereerst merken we op dat de Van Dalen problematiek geen wiskundig probleem is. Het is louter een kwestie van afspraken. Kennnelijk is het altijd conventie geweest om optellen en aftrekken uit te voeren in de volgorde van notatie: $7 - 5 + 2 = 4$ en niet 0. Ook met de rekenmachine gaat louter optellen en aftrekken altijd goed, maar daarover dadelijk meer. Ook heeft er door de tijden heen een zekere conventie bestaan ten aanzien van vermenigvuldigen in samenhang met optellen.
In 1907 schrijft de rekendidacticus Van Pelt daarover in 'De Nieuwe Rekencursus' dat een produkt en een quotiënt 'innig' zijn[2].

---

1. Wat beteekent $6 \times 9 + 4 \times 4$? De uitkomst van 6×9 moet vermeerderd worden met die van 4×4. Dit kunnen we niet anders doen dan door de beide produkten eerst uit te rekenen en de beide antwoorden (54 en 16) op te tellen.
En wat beteekent $11 \times 13 - 7 \times 20$?
Berekenen:
$17 \times 1^3/_4 - {}^1/_2 \times 19^1/_2 + 3^1/_2 \times 4^1/_2 - 2^1/_4 \times {}^4/_9 =$
$1001 \times 1002 - 78 \times 82 - 6^3/_4 \times 5^2/_2 + 103 \times 203 =$
Bij het aflezen moet de volle nadruk gelegd worden op *plus* en *min*.
2. Wat beteekent $390 : 13 - 125 : 10$?
En $4^1/_2 : 6 + 2^1/_3 : 14 - 18^3/_4 : 50$.
Dezelfde opmerking als hierboven. Men zou kunnen zeggen: »*Een produkt en een quotient zijn innig*", m. a. w.: »Dadelijk moet men het produkt of het quotient voor één waarde aanzien, al staan er twee getallen."

---

fig. 1 Innigheid van produkt en quotiënt (Van Pelt, 1907)

Kennelijk meende hij dat vermenigvuldigen krachtiger of overheersender is dan het optellen. Je kunt je er wat bij voorstellen, maar wiskundig gezien is het natuurlijk onzin. Hessel Pot heeft mij eens gewezen op een veel plausibeler verklaring van de geliefde voorrang van het vermenigvuldigen boven het optellen. Wanneer je een boodschappenlijstje maakt van 6 broden à *f*..., 5 flessen olie à *f*..., 12 kilo suiker à *f*... enzovoort, dan stel je voor de totale kosten een tabel op, waarbij je eerst de onderscheidene vermenigvuldigingen uitvoert en daarna pas de hele zaak sommeert. Uit dit voorbeeld is meteen ook duidelijk dat de context de volgorde van de bewerkingen bepaalt. En dat is trouwens ook het geval als je met benoemde getallen of grootheden werkt: $6 \times f\,10 + 5 \times f\,2 = f\,70$. Opvallend is dat in de vroegere discussies, maar ook nu nog, aan de betekenis van de getallen voor de bewerkingen totaal wordt voorbijgegaan. Wel moeten natuurlijk binnen een formeel systeem de regels netjes vastgelegd worden. Een feit is tevens dat, zodra je de getallen van hun betekenis ontdaan hebt en je alleen nog de kale berekening moet uitvoeren, je binnen dit formele systeem zit. Nu is dat kale rekenen tegenwoordig met de zakrekenmachine een fluitje van een cent, als je maar weet in welke volgorde de getallen ingevoerd en hoe de knoppen bediend dienen te worden. Doe ik dit voor het bovenstaande sommetje op een eenvoudig, maar uitstekend werkend machientje van Texas Instruments (TI 503) dan wordt het antwoord 130, waaruit blijkt dat dit apparaatje lineair werkt. Ook de calculator op mijn Macintosh (Performa 460) geeft 130 als antwoord. Daarentegen geeft de TI 30 het antwoord 70.

$6 \times f\,10 + 5 \times f\,2 = 70$
$6 \times 10 + 5 \times 2 = 130$ (TI 503)
$6 \times 10 + 5 \times 2 = 70$ (TI 30)

---

fig. 2 Context en rekenmachine

Nog steeds blijkt Van Dalen (Van Dale?) één van de zorgen van de reken- en wiskundeleraren te zijn. Regelmatig krijgt het Freudenthal instituut brieven of telefoontjes over deze ellende, maar ook de beide vakverenigingen, de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW), de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskundeonderwijs (NVORWO) en het Cito mogen telkens weer trachten een finaal (?) antwoord op de vraag van de zogenaamde voorrangsregels der bewerkingen te geven. Onlangs ontving de redactie van de Nieuwe Wiskrant een stuk van de sectie wiskunde van het Ichtus College te Enschede/Hengelo, waarin deze bepleit de zogenaamde rekenmachine-regels bekend te maken. In het genoemde stuk stellen zij:

> 'Rekenmachines behandelen functieopdrachten zoals machtsverheffen en worteltrekken met voorrang ten opzichte van de binaire operaties, Daarna worden × en : met voorrang behandeld ten opzichte + en –.'[3]

Het betekent dus dat 5×2^3 uitgerekend zou moeten worden als 5×8 en niet als 10^3. De TI 30 werkt volgens deze regel. Op eenvoudige rekenmachines als de TI 503 komt geen machtsverheffingsknop voor, maar genereer je de machtsverheffing met de constante factor dan krijgen we 1000 als antwoord. Er bestaan trouwens meerdere machientjes, die bij machtsverheffen, gecombineerd met vermenigvuldigen, ook lineair werken.

Haakjes!

De Van Dalen discussie is de laatste jaren juist door de zakrekenmachine, die zowel in de brugklas als in de hoogste klassen van de basisschool gepropageerd wordt, weer actueel. We hebben al gezien dat de volgorde bij optellen en aftrekken weinig problemen geeft. Ten aanzien van vermenigvuldigen en delen stelt de Van Dalen regel de eerste operatie boven de tweede. Ik heb geen re-

kenmachientje kunnen vinden, dat die Van Dalen regel toepast. Steeds is $18 : 2 \times 3 = 27$ en niet 3. Er wordt in het laatste geval ook wel eens aanbevolen om met gewone (horizontale) breukstrepen te werken. Of een deling in een vermenigvuldiging $18 : 2 = 18 \times \frac{1}{2}$ om te zetten. Dit nu heeft ook weer allerlei nadelen, zowel in didactische als in praktische zin. Het zou mogelijk zijn deze lineaire volgorde bij vermenigvuldigen en delen als vaste regels te hanteren, omdat veel rekenmachientjes zo werken.
Jan Maassen, voormalig secretaris van de NVvW, wijst er op dat het afschaffen van de prioriteit van vermenigvuldigen ten aanzien van het delen problemen kan geven bij verhoudingen en algebraïsche vormen[4]. Hij geeft als voorbeeld dat de verhouding $3a : 4a$ bij gebruik van de lineaire volgorde als getalwaarde $\frac{3}{4}a^2$ zou opleveren en niet $\frac{3}{4}$. Het is gebruikelijk om $3a$ als het produkt van 3 en a op te vatten. Volgens de lineaire bewerkingsvolgorde zou $3a + 4b$ dan gelijk zijn aan $((3 \times a) + 4) \times b)$; iets waar niemand in de wiskunde gelukkig mee zal zijn, omdat $3a + 4b$ voor iedere wiskundige $(3 \times a) + (4 \times b)$ betekent. We zien hiermee dat we ook in de algebra gebruik maken van conventies, die niet altijd even strikt toegepast worden. Overigens is het gebruik van haakjes wel dé oplossing om een meer complexe rekenformule goed te organiseren. Dit kan echter, wanneer de operaties erg gestapeld zijn, tot een wat pathologisch aandoende tekst aanleiding geven, zeker wanneer we dit in alle algebraïsche formules zouden toepassen. Maar ik zie niet wat er bijvoorbeeld op $6 + (5 \times 2)$ tegen is.

Rekenvaardigheid en inzicht

Van Dalen is tot voor kort in het lager onderwijs altijd een mogelijkheid geweest om behalve de rekenvaardigheid ook nog de toepassing van de regel zelf te testen. De oude cijfer- en vormsommen werden daarmee van een extra moeilijkheid voorzien. Maar een kind dat $6 + 5 \times 2$ lineair uitrekent kent de bewerkingen net zo goed (misschien zelfs beter in dit geval) als degene, die de Van Dalen eis inwilligt.
Zoals ik al eerder opmerkte zou het hele probleem niet mogen optreden wanneer men alleen met toepassingen en benoemde getallen zou werken. Maar er moet natuurlijk ook in het formele systeem gerekend kunnen worden. En er moet ook geoefend worden op de rekenvaardigheden. Wat dit laatste betreft, kunnen de voorrangsregels behalve met de haakjesschrijfwijze ook omzeild worden door gebruik te maken van de pijlennotatie (operator). Vooral wanneer we de kinderen zelf zo'n pijlenschema laten opstellen, worden ze zich beter bewust van de samenhang en betekenis van de verschillende operaties. Mooi kan men bijvoorbeeld met een pijlenschema de inverse bewerkingen en de schakeling van operaties visualiseren. Veel gebruikt worden in het basisonderwijs zogenoemde sliert- of kettingsommen, waarin de pijlennotatie gebruikt wordt. Dit soort sommen zijn bedoeld om het dynamische karakter van de operaties te visualiseren, maar ook om de rekenvaardigheid te verhogen[5].

Lange sommen. Werk van links naar rechts.

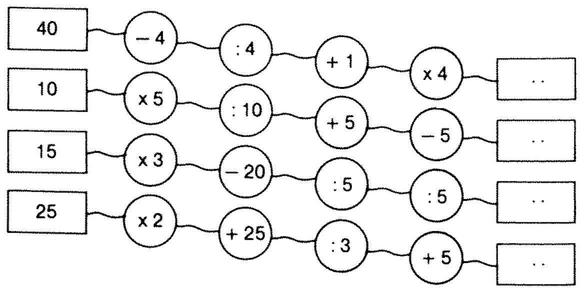

fig. 3 Een rekensliert (uit het hoofd!)

Bij de sliertsommen wordt zuiver lineair gewerkt en krijg je met een zakrekenmachine, die bepaalde voorrangsregels kent, andere antwoorden dan die welke door de opstellers voorzien zijn. Daarmee zijn we precies weer bij de kern van deze kwestie: wat is de volgorde van de bewerkingen bij een gegeven rekenformule? Als we de formule $5 + 7 \times 2$ bezien levert deze in de context van de berekening van de omtrek van een rechthoek met zijden van 5 en 7 natuurlijk 24 op, maar in de context van parkeerkosten (het eerste kwartier 5 gulden, daarna voor elk volgend kwartier 2 gulden) gaat het vermenigvuldigen natuurlijk voor. Wie de contexten kent, zal in de organisatie en de volgorde van de berekeningen geen fouten maken. Zoals eerder gezegd, alleen binnen de formele rekentaal kunnen we problemen krijgen. Jan van den Brink heeft juist in verband met de zakrekenmachine daarvoor zeer interessante en nuttige vraagstukken ontworpen[6].

RM2.7 Haakjes zetten

In algebra-opgaven moet je vaak haakjes 'wegwerken'.
Op de rekenmachine moet je ze vaak juist zetten.
Soms kun je ook enkele haakjes weglaten of andere knoppen gebruiken.

Wat komt hieruit?

$2 + 3 \times 7 + 5 =$ ....

Door haakjes te plaatsen kun je op je rekenmachine verschillende uitkomsten uit deze som krijgen. Probeer eens.

Plaats haken zodat:	Hoe doe je dat op je rekenmachine?
$2 + 3 \times 7 + 5 = \underline{40}$	....
$2 + 3 \times 7 + 5 = \underline{38}$	....
$2 + 3 \times 7 + 5 = \underline{60}$	....
$2 + 3 \times 7 + 5 = \underline{28}$	....

Kun je deze uitkomsten ook op je rekenmachine krijgen zonder haakjes te gebruiken? Hoe? Schrijf eens op:

$2 + 3 \times 7 + 5 = \underline{\mathbf{40}}$ ....

$2 + 3 \times 7 + 5 = \underline{\mathbf{38}}$ ....

$2 + 3 \times 7 + 5 = \underline{\mathbf{60}}$ ....

$2 + 3 \times 7 + 5 = \underline{\mathbf{28}}$ ....

fig. 4 Leer je rekenmachine kennen

Standpunten

We hebben gezien dat zakrekenmachines niet volgens uniforme regels werken. Elke machine kent zijn eigen rekenregels. Het is derhalve ook geen oplossing, zoals het Ichtus College voorstelt, om ter vervanging van Van Dalen de rekenmachineregels in te voeren. Ook de nomenclatuurcommissie van NVVW heeft over deze kwestie nog geen officiële uitspraken gedaan. Men schijnt echter de richting van die van het Ichtus College te willen uitgaan, hetgeen ik niet erg verstandig vind. Het doelenboek van het Cito, bedoeld voor de eindtoets basisonderwijs, wijdt aan Van Dalen enige regels, waaruit ik citeer:

> 'Voor het bepalen van de volgorde van de rekenkundige bewerkingen in samengestelde opgaven geldt in Nederland vanouds de regel Mijnheer Van Dalen Wacht Op Antwoord. Internationaal en in toenemende mate ook in Nederland, wordt een andere afspraak gevolgd. De Van Dalen-regel en de internationale afspraak stemmen grotendeels overeen, echter niet wat betreft de volgorde van vermenigvuldigen en delen. Volgens de regel van Mijnheer Van Dalen heeft vermenigvuldigen voorrang op delen.
> (...)
> Omdat geen eenstemmigheid bestaat over dit punt, vermijden we in de Eindtoets opgaven waarbij dit een rol speelt. Waar nodig plaatsen we haakjes om aan te geven welke bewerking het eerst moet worden uitgevoerd.' [7]

Uit een gesprek met Jan Janssen van het Cito blijkt dat met internationale afspraken bedoeld wordt dat in veel buitenlandse methoden bij vermenigvuldigen en delen lineair gewerkt wordt. Janssen stelt echter dat de bewerkingen uit de context duidelijk moeten worden en dat bij twijfel of andere bedoeling haakjes gebruikt moeten worden. In tegenstelling met het Cito wordt in de nieuwere Nederlandse reken-wiskunde methoden voor de basisschool Van Dalen niet genoemd. Verder wordt aan de kwestie beperkte aandacht besteed. 'Operatoir Rekenen' beschouwt optellen en aftrekken net als vermenigvuldigen en delen als clusters, met andere woorden + en –, respectievelijk × en : lineair uitvoeren. 'De Wereld in Getallen' volgt dezelfde afspraak. In beide gevallen heeft de cluster (×, :) prioriteit boven die van (+, –). Ook 'Rekenen en Wiskunde' negeert het Van Dalen relict en legt de nadruk op inzicht in het uitvoeren van een berekening bij eenvoudige toepassingen; in hogere leerjaren vooral ook met behulp van een zakrekenmachine.

Van den Brink heeft eens de volgende vijf wiskundemethoden van het voortgezet onderwijs geanalyseerd betreffende het onderwerp zakrekenmachine: 'Getal en Ruimte', 'Moderne Wiskunde', 'WiskundeLijn', 'Netwerk' en 'Realistische Wiskunde'. In alle methoden wordt de nadruk gelegd op het gebruik van een machine met haakjes[8]. Veelal wordt aangesloten bij de lineaire werkwijze binnen de clusters (+, –) en (×, :), hetgeen dus betekent dat Van Dalen voor deze methoden heeft afgedaan[9]. In grote lijnen stemmen de aanpakken van basis- en voortgezet onderwijs redelijk overeen.

Tot slot

- De regel van Meneer Van Dalen... is een overblijfsel uit vroeger tijden, waarvoor in het huidige reken en wiskundeonderwijs geen plaats meer is.
- De regel van Meneer Van Dalen... heeft afgedaan als doel op zich. Men geve derhalve geen vraagstukken om specifiek deze regel te toetsen.
- De volgorde van bewerkingen wordt bij toepassingen door de context bepaald. Indien nodig worden bij de formele berekening haakjes geplaatst.
- Bij gebruik van een zakrekenmachine onderzoeke men eerst de wijze waarop deze de volgorde van de bewerkingen uitvoert.

Hoewel de kwestie in feite van een onbeduidend karakter is en een typisch Nederlands probleem lijkt te zijn, biedt zij wiskundig toch mogelijkheden tot nader onderzoek. Met behulp van een formele wiskundetaal kan men de bewerkings-regels precies definiëren. Men zie hiertoe bijvoorbeeld een artikel van Vredenduin uit 1978, dat ook enige historische achtergrondinformatie bevat[10]. Zeer lezenswaardig is ook het artikel van Joost Klep, die met name het gebruik van de zakrekenmachine aan de orde stelt[11].
Voor het praktische onderwijs stel ik voor om Van Dalen bij te zetten in het praalgraf der Nederlandse onderwijscuriositeiten. Op zijn grafschrift kan wellicht het vers van Marjolein Kool geplaatst worden, dat zij speciaal voor dit artikel schreef. Voor de NVVW, de NVORWO, het Cito, de SLO, het Fi en de schooladviesdiensten heb ik een Van Dalen antwoordkaart ontworpen ten behoeve van eventuele nieuwe briefschrijvers.

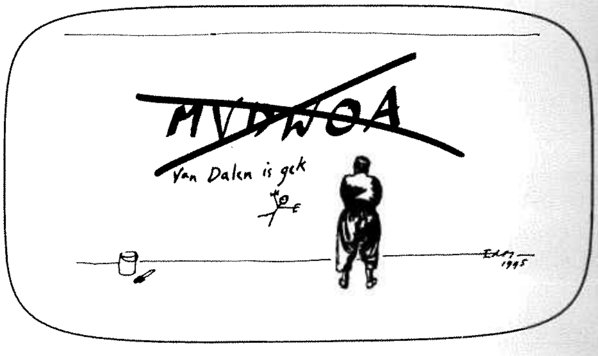

fig. 5 'Van Dalen antwoordkaart'

Noten

[1] Het historische deel van dit stuk is ontleend aan: Moor, Ed de (1995). Meneer van Dalen. *Willem Bartjens, Tijdschrift voor het reken-wiskundeonderwijs in de basisschool, 14* (4), p. 19.
[2] De tekst uit Van Pelt werd eerder gebruikt door Klep (1993), zie noot 1.
[3] Uit een brief van 13-2-94 aan het Freudenthal instituut, van E.S. Korthof, sectie wiskunde Ichtus College te Enschede/Hengelo.
[4] Telefoongesprek Jan Maassen - Ed de Moor (2-2-'95).
[5] Uit *Rekenen en Wiskunde, Allerleiboek 4a*. Bekadidact, Baarn, 1985. p. 22.
[6] Brink, J. van den (1991). *Zakrekenmachines deel 2.* Freudenthal instituut, Utrecht.
[7] *Doelenboek Eindtoets Basis Onderwijs*, 1995. Cito, Arnhem. p. 26.
[8] Een heel simpele machine, die haakjestoetsen bezit, ook geschikt voor de basisschool, is de MathMate van Texas Instruments.
[9] Brink, J. van den (1993). Worstelen met de zakrekenmachine, in: Meeder, Marja en Lambrecht Spijkerboer, eds. *Bladeren in de nieuwe schoolboeken wiskunde*. APS, Utrecht. 35-44.
[10] Vredenduin, P.G.J. (1978). Haakjes. *Euclides, 54* (3), 86-92.
[11] Klep, J. (1983). Meneer van Dalen wacht op antwoord. *Willem Bartjens, Tijdschrift voor het reken-wiskundeonderwijs in de basisschool, 2* (2/3), 129-136.

Pak uw pen ...

Een moeilijke opgave?

Met grote verbazing heb ik kennis genomen van de bijdrage 'De moeilijkste opgave?' in de meest recente Nieuwe Wiskrant[1]. Het gaat daarbij om het bepalen van een $p \in [0, 1]$ waarvoor $x \longrightarrow 2\cos^2(x+p) + 1 + \sin 2x$ een constante functie is.
Mijn eerste reactie was: *een differentieerbare functie is constant en slechts dan als de afgeleide de nulfunctie is.* Pas ik deze regel toe, dan komt er

$$-4\cos(x+p)\sin(x+p) + 2\cos 2x = 0$$

en meteen voor $x = 0$ volgt hieruit dat $\sin 2p = 1$, dus $p = \frac{\pi}{4}$.
Dat gaat dus probleemloos, evenals het verifiëren dat deze p inderdaad voldoet.
Aangezien deze toch zo voor de hand liggende aanpak zelfs niet genoemd wordt in [1], vraag ik mij af wat er op dit gebied in het VWO-pakket zit. Ik betreur het geenszins dat p, q-formules blijkbaar niet daartoe behoren, maar als de fundamentele regel van mijn eerste ingeving ontbreekt, vind ik dat wel ernstig.

Een tweede opmerking betreft de oplosmethoden met de Graphic Calculator. Hoe komt iemand erbij om bij een benaderende waarde $p = 0.811$ of $p = 0.8$ te gaan proberen of $p = \frac{\pi}{4}$ wellicht de juiste waarde zou zijn? Zijn we dan niet bezig met geconditioneerd raden? Immers, impliciet wordt verondersteld dat p wel een eenvoudige fractie van π zal zijn. Beter lijkt het me als er gebruik gemaakt wordt van de bekende perioden van de functies.
Verder veronderstel ik dat oplossing 7 een schrijffout bevat. Immers de ligging van de toppen heeft a priori niets van doen met het constant zijn van de somfunctie. Maar ik veronderstel dat gedoeld wordt op een top van de ene en een 'bijbehorend' dal van de andere grafiek. Echter ook dan vind ik de redenering (blijkbaar die van oplossing 6) niet aanvaardbaar zonder nadere toelichting.
Ik zou het meer voor de hand vinden liggen om de grafieken van $f(x)$ en $-g(x)$ (let op het teken!) te laten tekenen en daarmee verder te redeneren. Immers deze grafieken moeten op een verschuiving na gelijk zijn, en nu kan men wel zinvol de ligging van de toppen van beide grafieken bekijken.
In principe vind ik oplossing 7 getuigen van inzicht, maar daarentegen zou ik oplossing 8 willen karakteriseren als het misbruik maken van de rekenkracht van de computer. Dergelijke methoden lijken me onacceptabel, maar waar leg je de grens en hoe maak je zoiets duidelijk aan de leerlingen?

P.W.H. Lemmens
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
Postbus 80 010, 3508 TA Utrecht

Noot

[1] Kooij, H. van der (1994). De moeilijkste opgave? *Nieuwe Wiskrant 14*(2), 46-49.