3 3 5 5 0 3 3 6: Een volmaakte voltreffer

N. Brokamp
Ashram College, Alphen a/d Rijn

Tijdens mijn twintigjarig leraarschap ben ik diverse keren verrast door onvermoede wiskundige staaltjes van leerlingen. Zo af en toe maak ik iets bijzonders mee in mijn wiskundelessen. Maar nog nooit was mijn verbazing en bewondering zo groot als in de afgelopen decembermaand. Wat was er aan de hand?

Een greep uit de getaltheorie

Elk schooljaar, zo halverwege december, heerst er onder onze 6 VWO-leerlingen van het Ashram College in Alphen a/d Rijn het zogenaamde 'virus neerlandicus', een aandoening die positieve correlatie vertoont met de inleverdatum van de scriptie Nederlands. Voor een beduidend aantal leerlingen komt het huiswerk voor wiskunde B een tijdje in het gedrang.

Tegenwoordig houd ik daar rekening mee. Ik vecht er niet meer tegen en vertraag mijn lestempo. Ik vertrouw erop dat er weer een periode zal komen van vernieuwde motivatie en energie voor mijn vak. Zo'n periode van verminderde wiskunde-activiteit is bij uitstek geschikt voor uitdagende vraagstukjes die buiten de geijkte lesstof vallen. Uit ervaring weet ik dat leerlingen gegrepen kunnen worden door een wiskundig raadseltje of puzzeltje, vooral wanneer zo'n vraagstuk weinig of geen voorkennis veronderstelt.
Met in mijn achterhoofd de aanbevelingen van de 'studiecommissie wiskunde B vwo'[1] deed ik een greep uit de getaltheoretische doos. Eenvoudige getaltheorie is zo'n wiskundig gebied waar bijna elke VWO B-leerling mee uit de voeten kan. Achteraf bleek het een gouden greep. Ik legde mijn leerlingen het volgende vraagstuk voor:

Met het getal 28 is iets merkwaardigs aan de hand. De delers van 28 zijn 1, 2, 4, 7, en 14 (het getal zelf, in dit geval 28, laten we als deler buiten beschouwing). Wanneer je de som neemt van deze delers dan levert dat exact weer het getal 28 op. Ook bijvoorbeeld het getal 6 heeft die eigenschap, immers 6 = 1+2+3. Zo'n natuurlijk getal dat gelijk is aan de som van zijn delers noemen we een 'volmaakt getal'[2].

Ik loofde een King Size Mars uit aan degene die als eerste de eerste vijf volmaakte getallen zou weten te vinden. Eigenlijk vond ik mezelf gemeen. Immers ik wist dat het derde volmaakte getal 496 is, en het vierde zelfs al 8128. Ik besefte dat ik mijn leerlingen had opgezadeld met een zo goed als onmogelijke opdracht. Ik vertelde dat een computer een handig hulpmiddel zou kunnen zijn bij het oplossen van dit probleem en dat ik binnen vijf weken geen oplossingen van hen verwachtte.

En dat laatste, dat had ik niet moeten zeggen. Want al na drie dagen (ik was met stomheid geslagen), werd het vijfde volmaakte getal (te weten 33550336) door Niels te voorschijn getoverd. Daarover straks meer.

Computerprogramma

Direct nadat ik het probleem aan mijn leerlingen had voorgelegd werd er driftig gezocht naar delers en bijbehorende sommen. Al gauw werd duidelijk dat een derde volmaakt getal lastig op te sporen zou zijn. Vanwege uitblijvende resultaten overlegden enkele leerlingen over een te schrijven computeralgoritme dat alle rekenwerk zou kunnen overnemen.

Aan het begin van de volgende les toonde één van de leerlingen, Martijn, vol trots zijn in BASIC geschreven computerprogramma (zie volgende pagina), dat naast 6 en 28 ook de volmaakte getallen 496 en 8128 had opgespoord. Zijn computer had de hele nacht aangestaan en had in acht uren tijd de getallen 2 t/m 16000 gecontroleerd op volmaaktheid. Zijn klasgenoten toonden grote betrokkenheid en interesse toen hij de opbouw en werking van zijn computerprogramma toelichtte. Vanuit de klas kwamen suggesties om het programma te versnellen.

Een 'volmaakt getallenvonkje' sloeg over naar 5 VWO. Een leerling uit die klas, Floris, schreef daarop een algoritme in Turbo Pascal en boekte een tijdwinst van vijf klokuren, met als resultaat dezelfde vier volmaakte getallen. Het vijfde getal ontbrak echter nog steeds.

```
100   CLS
110   REM volmaakte getallen
120   LOCATE 1,10
130   PRINT;" x"; "y";" ystore"
140   X = 2
150   Y = 1
160   TELLER = 1
170   YSTORE = 0
180   i = X/Y
190   LOCATE 2,10; PRINT USING "#####";
      X;Y;YSTORE
200   IF i<2 THEN GOTO 240
210   IF i<>INT(i) THEN GOTO 220
      ELSE GOTO 290
220   Y = Y+1
230   GOTO 180
240   REM einde rij bereikt
250   IF YSTORE = X THEN GOTO 320
260   X = X+2
270   Y = 1
280   GOTO 170
290   YSTORE = Y+YSTORE
300   IF YSTORE = X THEN GOTO 320
310   GOTO 220
320   REM JOEPIE
330   IF 2<i THEN GOTO 220
340   LOCATE TELLER+2,3; PRINT X
350   TELLER = TELLER+1
360   GOTO 260
```

BASIC-programma van Martijn

Naast interesse in de werking van beide computerprogramma's wilde men graag gecontroleerd zien dat 496 en 8128 inderdaad volmaakt zijn. Via priemfactorontbindingen konden de delers worden opgespoord en kon de volmaaktheid worden aangetoond.

	496
2	248
2	124
2	62
2	31
31	1

	8128
2	4064
2	2032
2	1016
2	508
2	254
2	127
127	1

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$$
$$8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064$$

Op zoek naar regelmaat

Tot nu toe waren de volgende priemgetallen gevonden:

6
28
496
8128

Een leerling deed de suggestie dat er wellicht een regelmaat te bespeuren is in de reeks. Al gauw sprak iemand het vermoeden uit dat het vijfde volmaakte getal waarschijnlijk uit vijf cijfers bestaat, en op een 6 zal eindigen. Allerlei hypothesen werden opgesteld, en de resultaten werden op volmaaktheid gecontroleerd. Dé oplossing werd (nog) niet gevonden.

Slechts één dag later gonsde het door de klas: Niels heeft 'm! Het vijfde getal! En ook de Mars!' Triomfantelijk toonde Niels zijn getal: 33550336. De grootte van het getal, acht cijfers lang, maakte op mij een ongeloofwaardige indruk. Ik moet het nog zien, zo dacht ik. Ik was nieuwsgierig naar zijn uitleg. En terwijl Niels redeneerde, sloeg mijn verwondering om in bewondering. Zijn redenering was waterdicht. Hij vertelde niet alleen hoe hij aan het getal gekomen was, maar kon een aardig eindje komen in de richting van het aannemelijk maken van de volmaaktheid van 33550336.
Niels' oplossing begon met de ontdekking dat er wel degelijk een regelmaat zit in de vier ons tot dan toe bekende volmaakte getallen, en wel als volgt:

$$\begin{aligned} 6 &= 2^1 \cdot 3 = 2^1 \cdot (2^2 - 1) \\ 28 &= 2^2 \cdot 7 = 2^2 \cdot (2^3 - 1) \\ 496 &= 2^4 \cdot 31 = 2^4 \cdot (2^5 - 1) \\ 8128 &= 2^6 \cdot 127 = 2^6 \cdot (2^7 - 1) \end{aligned}$$

Zou misschien $2^p \cdot (2^{p+1} - 1)$ altijd volmaakt zijn? (dat wil zeggen voor elk natuurlijk getal p.) Invullen van $p = 3$ in de formule levert $2^3 \cdot (2^4 - 1) = 8 \cdot 15 = 120$, en 120 is niet volmaakt.
$p = 5$ geeft $2^5 \cdot (2^6 - 1) = 32 \cdot 63 = 2016$, en ook dat getal is niet volmaakt.
In de vier gevallen waarin de formule een volmaakt getal oplevert, blijkt de factor $(2^{p+1} - 1)$ een priemgetal te zijn, en bij $p = 3$ en $p = 5$ is die factor niet priem.
Daarop formuleerde Niels: $2^p \cdot (2^{p+1} - 1)$ is een volmaakt getal, mits $2^{p+1} - 1$ een priemgetal is[3]. De eerstvolgende waarde van p waarvoor $(2^{p+1} - 1)$ een priemgetal is, is $p = 12$. En, aldus Niels, is $2^{12} \cdot (2^{13} - 1) = 33550336$ het vijfde volmaakte getal.

Het bewijs

Wat nu nog resteert is het aantonen van de volmaaktheid van 33550336, of zelfs van het getal $2^p \cdot (2^{p+1} - 1)$, mits de laatste factor priem is. Na enig speurwerk is ons dat gelukt. In het bewijs maken we gebruik van de eigenschap dat $1+2^1+2^2+2^3+...+2^p = 2^{p+1} - 1$ correct is voor elke waarde van p.
En inderdaad: deze eigenschap is direct duidelijk wanneer je rekent in het tweetallig stelsel:

$$\begin{array}{r} 10000000 \\ \underline{00000001} \; - \\ 01111111 \end{array}$$

De delers van $2^p\,(2^{p+1} - 1)$ zijn

$1, 2^1, 2^2, ..., 2^p$ en $(2^{p+1}- 1), 2^1(2^{p+1}- 1), 2^2(2^{p+1}-1), ..., 2^{p-1}(2^{p+1}- 1)$.

De som van deze delers is gelijk aan

$1 + 2^1+2^2 +...+2^p+$
$+(2^{p+1}-1)+2^1(2^{p+1}-1)+ 2^2(2^{p+1}-1)+...+2^{p-1}(2^{p+1}-1)=$
[breng $(2^{p+1}-1)$ buiten haakjes]

$= 1 + 2^1+ 2^2+...+2^p+$
$+ (1+ 2^1 + 2^2+...+2^{p-1})(2^{p+1}- 1) =$

$= (2^{p+1}- 1) + (2^p- 1) \cdot (2^{p+1}- 1) =$
[breng $(2^{p+1}-1)$ buiten haakjes]

$=(1 + 2^p- 1)\,(2^{p+1}- 1) = 2^p(2^{p+1}- 1)$

en het bewijs is rond.

Ten slotte

Resumerend:
Het vinden van de eerste vijf volmaakte getallen was een staaltje van teamwerk. De programmeurs van de klas hebben de toon gezet. Anderen hebben hun tussentijdse resultaten bestudeerd, commentaar gegeven en vervolgens vermoedens geopperd. Het inzicht van Niels tenslotte bracht de uiteindelijke oplossing. De oplossing die de computerprogramma's pas na enkele weken van rekenen gevonden zouden hebben. Niels, bepaald geen wiskundige hoogvlieger (dacht ik tot dan toe), had iets moois gepresteerd. Ik ben trots op hem en de hele klas. Ik realiseer me goed dat er vanuit zuiver getaltheoretische hoek zeker kanttekeningen te plaatsen zijn bij mijn verhaal. Zo hebben we bijvoorbeeld niet geconstateerd, laat staan bewezen, dat er geen andersoortige (dan afkomstig vanuit de gevonden formule) volmaakte getallen bestaan.[4]

Het volmaakte getallen probleem bleek in mijn klas een volmaakte voltreffer te zijn. Verschillende aspecten van wiskunde doen kwamen aan bod:
- een verkennend onderzoek verrichten
- het zinvol benutten van de rekenmogelijkheden van een computer
- het zoeken naar en formuleren van vermoedens
- en tenslotte een stevige portie redeneren en bewijzen.

Is deze manier van wiskunde doen exemplarisch voor wat we straks in het tweede fase onderwijs kunnen verwachten? Wanneer dat zo is, dan verheug ik me nu al op mijn komende twintig onderwijsjaren. Mijn leerlingen leerden veel van dit probleem en hebben er met plezier aan gewerkt. Ik heb intens genoten van de sterke betrokkenheid van mijn leerlingen en bewonder hun creativiteit in het bedenken van mogelijke oplossingen. Een mooie bijkomstigheid: Het 'virus neerlandicus' was voor enkele dagen verdrongen door de sterk epidemische 'volmaakte-getallen-koorts'.

Noten

[1] De Studiecommissie Wiskunde B VWO doet in haar rapport het voorstel om 'grepen uit de getaltheorie' op te nemen in het programma voor wiskunde B. Lange, J. de e.a. (1994). *Rapport Studiecommissie Wiskunde B vwo.* Utrecht, p. 67.

[2] 'Perfect numbers' in het Engels. Ik maakte kennis met het begrip perfect number in het boek *More Joy of Mathematics* (p. 112), van Theoni Pappas. Dit boek vormt een twee-eenheid samen met *The Joy of Mathematics.* In deze twee alleraardigste boeken verstaat Theoni Pappas de kunst om allerlei wiskundige onderwerpen voor een breed publiek toegankelijk te maken. De ondertitels van de boeken, 'Discovering and exploring mathematics all around you', maakt Pappas waar. Op ruim vijfhonderd pagina's worden 320 wiskundige ideeën, concepten, historische vondsten en puzzels op een prettig leesbare manier uitgelegd. Zo maar een greep uit de onderwerpen: wiskunde en oceaangolven, aardbeving en logaritme, de gulden snede, kunst en projectieve meetkunde, vroege benaderingen van π, de hyperkubus, fractals, enzovoort. Voor mij vormt het tweetal boeken een onuitputtelijke bron voor lesideeën.

[3] Het *Woordenboek van eigenaardige en merkwaardige getallen*, van de hand van David Wells, geeft een schat aan getaltheoretische informatie. Op p. 114 en volgende wijdt de schrijver een paragraaf aan volkomen getallen (= volmaakte getallen). De door Niels gevonden formule was al aan Euclides bekend (*Elementen IX*, 36). Euler heeft, 2000 jaar later, bewezen dat alle even volmaakte getallen inderdaad door de formule gegenereerd worden. Het al of niet bestaan van oneven volmaakte getallen is vooralsnog een getaltheoretisch raadsel.
Wells vermeldt dat het dertigste even volmaakte getal: $2^{216090} \cdot (2^{216091} - 1)$ in het jaar 1985 berekend is.

[4] Naar aanleiding van dit artikel kwam Jan van de Craats met de volgende aanvulling:
Er zijn inmiddels 33 volmaakte getallen bekend, uiteraard net zo veel als er Mersenne-priemgetallen zijn, dat zijn priemgetallen van de vorm $2^m - 1$. De grootste Mersenne-priem is thans $2^{859433}- 1$, een getal van 258716 decimale cijfers. Het werd in 1993 gevonden door David Slowinski en Paul Gage met behulp van een Cray computer. Het bijbehorende volmaakte getal $V=2^{859432}(2^{859433}- 1)$ telt 517430 decimale cijfers. Zie ook: Paulo Ribenboim (1994), 'Prime Number Records', *Nieuw Archief voor Wiskunde IV* (12), 51-65, i.h.b. 60-61.