Cilinder en Kegel

W. Reuter
Schoter SG, Haarlem

Inleiding

Neem een cilinder en een kegel met dezelfde hoogte en hetzelfde grondvlak. Dan heeft de cilinder een drie keer zo grote inhoud als de kegel.

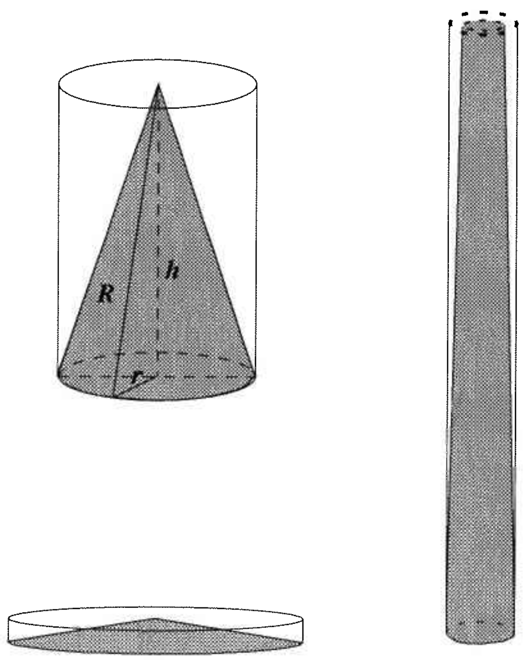

fig. 1

Dat klinkt eenvoudig, dat kan elke leerling onthouden. In 6VWO bewijs je dat bij wiskunde B nog eens keurig met omwentelings-integralen; iedereen snapt dat bewijs.
Het doet er helemaal niet toe hoe hoog en smal of kort en dik de cilinder en de kegel zijn.

Maar eigenlijk is dat toch raar!

Bij de combinatie die in figuur 1 linksboven getekend is, kan ik me dat wel voorstellen. Dat zijn 'normale' afmetingen voor een cilinder en een kegel.
Maar bij dat platte doosje en de hoge vlaggemast lijkt het alsof je voor de kegel evenveel materiaal nodig hebt als voor de cilinder!
Rara, hoe zit dat?
Met dit probleem moesten mijn 6 vwo-leerlingen aan de slag.

Het platte doosje

We nemen meteen een héél plat doosje: een cilinder met hoogte 1 mm, waarvan de grondcirkel een straal van 1 dm heeft.
Om deze cilinder te maken heb je twee cirkels nodig (met gezamenlijke oppervlakte 200π cm^2) en een rechthoek (met oppervlakte $2\pi \cdot 10 \cdot 0{,}1 = 2\pi$ cm^2), dus 202π cm^2 papier.

Voor een even hoge kegel heb je twee cirkels nodig: een met straal 1 dm voor de bodem en een 'iets grotere' voor de kegelmantel. Je mist aan materiaal alleen de smalle strook voor de cilinder-mantel. *Maar je krijgt slechts eenderde van de inhoud!?*

De vlaggemast

We kiezen weer voor een straal van 1 dm, maar nu voor een hoogte van 10 m.
Voor de cilinder hebben we nodig:
200π cm^2 voor de twee cirkels en 20.000π cm^2 voor de mantel.
De beschrijvende lijnen van de kegel maken bijna een rechte hoek met het grondvlak. (Even narekenen:
$\tan \alpha = 100$, dus $\alpha \approx 89{,}4°$ klopt!)
De kegelmantel en de cilindermantel moeten dus ongeveer even groot zijn. Bij de kegel bespaar je blijkbaar alleen het materiaal voor de kleine deksel van de cilinder.
Maar deze besparing kost je ook hier weer tweederde van de inhoud!?
We zullen toch wat moeten gaan rekenen.

De berekening

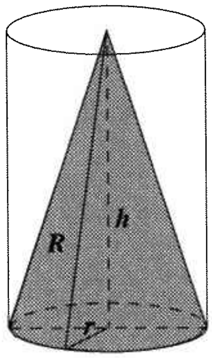

fig. 2

We noemen
r = straal van de grondcirkel,
h = hoogte van cilinder en kegel.

De oppervlakte van de cilinder is

$$A_c = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r+h) \qquad (1)$$

De oppervlakte van de kegel is

$$A_k = \pi r^2 + \text{mantel}$$

De mantel is een sector van een cirkel met straal

$$R = \sqrt{r^2 + h^2}$$

Bij deze sector behoort een boog met lengte $2\pi r$ en hoek α.

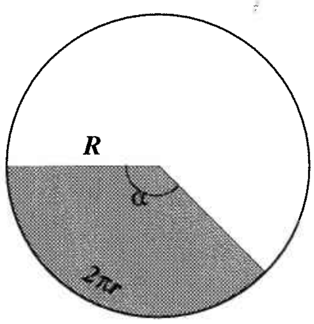

fig. 3

vanwege $\dfrac{\text{opp. sector}}{\text{opp. cirkel}} = \dfrac{2\pi r}{2\pi R}$ volgt

$$\text{opp. mantel} = \pi \cdot r \cdot R = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$

$$\text{dus } A_k = \pi r(r + \sqrt{r^2 + h^2}) \qquad (2)$$

We nemen ook nog het volgende verband mee:

uit $R \cdot \alpha = 360° \cdot r$ volgt $\alpha = \dfrac{360° \cdot r}{\sqrt{r^2 + h^2}}$

Voor ons onderzoek is het geen beperking maar wel zo handig als we $r = 1$ kiezen.
Als je een willekeurige leerling (of leraar) vraagt een cilinder of kegel te tekenen, zal hij geen plat doosje of vlaggemast tekenen maar een lichaam waarvan de hoogte een à twee keer zo groot is als de straal.
$r = 1$ en $h = 2$ levert voor
de cilinder $A_c \approx 18{,}8$ en voor
de kegel $A_k \approx 10{,}2$.

De kegel heeft een duidelijk kleiner oppervlak, het is dus 'logisch' dat de inhoud ook duidelijk kleiner is.
Voor hoek α vinden we $\alpha \approx 161°$.
De volgende uitslagen komen ons dan ook vertrouwd voor.

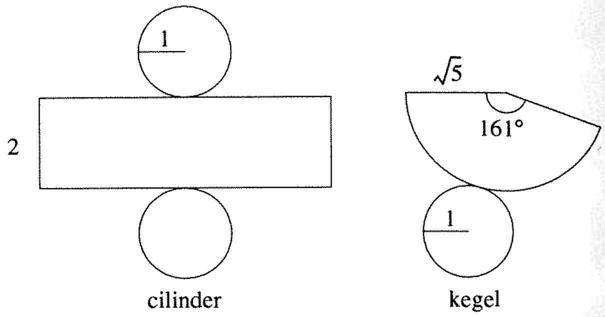

fig. 4

Voor de heel platte kegel ($r = 1$ dm, $h = 1$ mm) is nodig een cirkel met straal $r = 1$ en de sector van een cirkel met straal $R \approx 1{,}00005$ en hoek $\alpha \approx 359{,}98°$, dat is bijna weer dezelfde cirkel. Hier was niets mis met onze schatting. Maar het blijft raar dat de cilinder een drie keer zo grote inhoud heeft!

Voor de vlaggemast ($r = 1$ dm, $h = 10$ m) is behalve de grondcirkel nog een sector nodig van een cirkel met straal $R \approx 100{,}005$ en $\alpha \approx 3{,}6°$.
Het materiaalverbruik is:
voor de cilinder $A_c \approx 634{,}6$ en
voor de kegel $A_k \approx 317{,}3$.
Dat is slechts de helft. Hier gingen we dus behoorlijk in de fout. Behalve de ene cirkel missen we ook ongeveer de helft van de cilindermantel!

Nog een stap verder

We kunnen de cilinder nog hoger maken. Is het dan mogelijk dat we voor de kegel *minder dan de helft* van het materiaal voor de cilinder nodig hebben?
De volgende stap ligt voor de hand.
Voor $r = 1$ kan de verhouding van de twee oppervlaktes (1) en (2) beschreven worden door de formule

$$f(h) = \frac{A_k}{A_c} = \frac{1 + \sqrt{1 + h^2}}{2 + 2h}$$

De grafiek van deze functie is met de computer zo getekend.

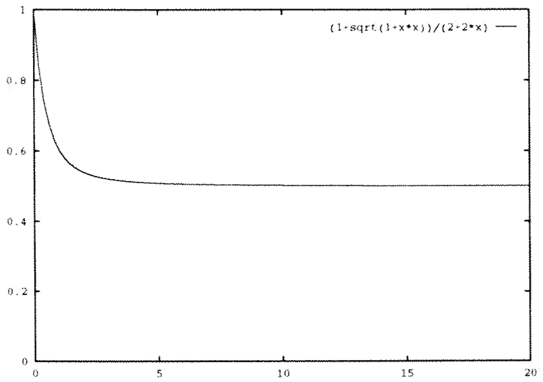

fig. 5

Uit deze grafiek blijkt dat

$$\begin{array}{ll} f(h) \rightarrow 1 & \text{als } h \rightarrow 0 \text{ en dat} \\ f(h) \rightarrow \frac{1}{2} & \text{als } h \rightarrow \infty \end{array}$$

De eerste uitkomst was vooraf al logisch maar blijft verbazen. De tweede uitkomst kun je ook als volgt verklaren. De kegelmantel lijkt, naarmate h groter wordt, steeds meer op een gelijkbenige driehoek met hoogte h en basis 2π. Dat is de helft van de cilindermantel.

We zitten in 6VWO wiskunde B, de leerlingen moeten deze limieten ook 'officieel' kunnen berekenen. Inderdaad blijkt dat

$$\lim_{h \rightarrow \infty} f(h) = \frac{1}{2}$$

Maar dat bewijs hoefde van niemand meer.

CIEAEM 47

Van 23 tot en met 29 juli 1995 wordt in Berlijn de jaarlijkse conferentie van de CIEAEM gehouden. Het thema van de conferentie is: 'Mathematics (Education) and common sense: the challenge of social change and technological development'. Het thema wordt uitgewerkt voor verschillende niveau's van onderwijs aan de hand van de volgende subthema's:
- mathematics and common sense
- the teaching and learning aspect
- the impact of social changes
- the impact of technological development
- the cognitive and epistemological aspect
- the innovative aspect.

De plenaire lezingen worden verzorgd door:
Philip Davis (USA, bekend van o.a. het boek *Descartes' Dream*), Alan Bishop (Australië), Juliana Szendrei (Hongarije) en Rijkje Dekker (Universiteit van Amsterdam).
De voertalen zijn Engels en Frans. De inschrijvingskosten bedragen 200 DM. De kosten van overnachting en maaltijden komen daar nog bij.
Het aanmeldingsformulier voor de conferentie is te verkrijgen bij: Christine Keitel, Freie Universität Berlin, FB 12, WE 02, Habelschwerdter Allee 45, D-14195 Berlijn, Duitsland.
Inlichtingen: Rijkje Dekker, tel. 020-5253538