

Hoe win je een taart van je klas?

Een (kans)spel in vier bedrijven

W. Reuter

Schoter SG, Haarlem

Hoe win je een taart van je klas?

Als u deze vraag onfatsoenlijk vindt dan kunt u beter niet verder lezen. Als u zelf meteen tien antwoorden paraat hebt dan bent u misschien benieuwd naar nog een variant. Maar laat dit exemplaar van de Nieuwe Wiskrant dan niet aan uw leerlingen zien.

In de afgelopen twee jaar heb ik van twee 4 HAVO-klassen, een 4 VWO-klas en een 5 VWO-klas taarten gewonnen. Omdat we de taarten steeds gezamenlijk verorberd hebben is geen enkele leerling kwaad op mij geworden. Sommige leerlingen werden wel behoorlijk kwaad op elkaar.

Het volgende verslag is een compilatie van de verschillende weddenschappen. En daardoor geschikt als draaiboek voor een volgende weddenschap. Want ik zal het dit jaar weer proberen. Niet omdat ik van taart houd, maar uiteraard alleen vanwege de didactische waarde.

Eerste bedrijf

Het beste tijdstip om het voorstel voor de weddenschap te doen is een of twee lessen voordat u aan het eerste hoofdstuk over kansrekening begint.

Ik deel zonder uitleg vooraf aan de leerlingen kleine briefjes uit en vraag ze een getal tussen 0 en 50 op te schrijven. Niet overleggen, niet nadenken. Als de getallen opgelezen worden komt het getal 7 zeker twee keer voor en blijkt er een voorkeur voor lage getallen (verjaardag). Het lijkt dan ook logisch dat de pakweg 25 leerlingen niet allemaal een ander getal gekozen hebben.

Er komt dus een tweede ronde. Maar nu moeten de leerlingen een getal tussen 40 en 100 opschrijven. U kunt er op vertrouwen dat tenminste twee leerlingen het getal 66 opschrijven. "Meneer, ik heb 99 opgeschreven, niet 66!" is dan uiteraard de reactie. Tot nu toe hoefde ik nog niet naar grafologische middelen te grijpen, want er was elke keer tenminste een ander getal dubbel genoemd. En dat mocht niet.

Na deze tweede ronde is de bedoeling duidelijk: zonder vooraf te overleggen moeten de leerlingen proberen alle-

maal een ander getal op te schrijven. 60 verschillende getallen voor 25 leerlingen, dat moet toch lukken!

Er wordt om een derde ronde gevraagd. Vooruit, maar nu: "een even getal tussen 300 en 500!" Waarschijnlijk heeft geen enkele leerling een emotionele binding met een van deze getallen.

Als het de leerlingen lukt allemaal verschillende getallen op te schrijven zijn ze ontvankelijk voor het aanbieden van de weddenschap.

De enkele keer dat het hen nog niet gelukt was, barstte een discussie los over wat wij vakmensen 'select' en 'aselect' plegen te noemen. Het was heel boeiend.

Na deze voorrondes deed ik steeds het volgende aanbod:

De doelstelling is bekend, daarom is het makkelijk vooraf af te spreken wie welk getal kiest. We doen het dus anders. Iedereen trekt uit een bingozakje een nummer (met terugleggen uiteraard). In de komende drie lessen krijgen jullie elke keer een kans. Als het jullie geen enkele keer lukt om allemaal verschillende getallen te trekken, moeten jullie mij op twee appeltaarten trakteren. Anders trakteeer ik.

Tweede bedrijf

Spelenderwijs zijn de leerlingen nu al geconfronteerd met essentiële begrippen in de kansrekening als 'aselect trekken' en 'trekken met/zonder terugleggen'. Meer dan een intuïtief kansbegrip is er nog niet aanwezig. En hun intuïtie zegt dat zij een heel grote kans maken de taart te winnen. Zelfs doublanten in 4 HAVO en de leerlingen in 5 VWO proberen hun kans niet te berekenen maar gaan gretig op de weddenschap in.

De hele opzet van de weddenschap lijkt op het 'balletje-balletjespel' waarbij je eerst lekkergemaakt wordt en dan volledig kansloos blijkt te zijn. De leerlingen zijn hier natuurlijk niet kansloos, maar het ligt aan u welke kans u de leerlingen toedicht. (Het berekenen van deze kans gebeurt in het derde bedrijf.)

De volgende drie lessen kwam ik steeds met een Bingo-spel de klas binnen.



Bingospel en -zakje

In een ondoorzichtig zakje zitten 75 houten schijfjes met daarop de getallen 1 t/m 75. Ik begin elke keer bij een andere groep leerlingen. Een leerling noteert op het bord de getrokken getallen. Natuurlijk wordt elke keer weer goed geschud. En gestopt zo gauw een getal voor de tweede keer getrokken is.

Soms is dat al na een paar leerlingen het geval. Een enkele keer ging de laatste leerling in de fout. Maar het was tot nu toe nog altijd 'Bingo'.

Ik was nooit meer dan tien minuten van de les kwijt en ondanks toenemende spanning konden we de rest van de les 'gewoon' kansrekening doen.

Derde bedrijf

Ik heb tot nu toe nog nooit de taarten zelf moeten betalen. De kans daarop is dan ook behoorlijk klein.

Neem 25 leerlingen en 75 verschillende getallen.

De kans dat alle leerlingen een ander getal trekken is

$$\frac{75}{75} \cdot \frac{74}{75} \cdot \frac{73}{75} \cdot \frac{72}{75} \cdot \dots \cdot \frac{52}{75} \cdot \frac{51}{75} \approx 0,0108$$

De kans dat dat drie keer *niet* gebeurt is $0,9892^3 \approx 0,9679$, dus de kans dat ik moet trakteren is slechts ongeveer 3,2%. Gemeen!

Naarmate er minder leerlingen in een klas zitten wordt deze kans uiteraard groter.

De kans dat k leerlingen uit n verschillende getallen allemaal een ander getal trekken is

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot n^k}$$

Omdat $n!$ niet meer met het zakrekenmachientje te berekenen is voor $n > 69$ heb ik een tabel gemaakt waarmee voor $n = 75$ en verschillende waarden van k meteen deze kans afgelezen kan worden en ook de kans dat ik moet trakteren.

75 nummers

aantal leerlingen	P (allemaal verschillend)	P (leraar trakteert)
10	.5341	.8988
11	.4629	.845
12	.395	.7785
13	.3318	.7016
14	.2743	.6178
15	.2231	.531
16	.1784	.4453
17	.1404	.3648
18	.1085	.2914
19	.0825	.2276
20	.0616	.1736
21	.0451	.1292
22	.0325	.0943
23	.0229	.0671
24	.0159	.0469

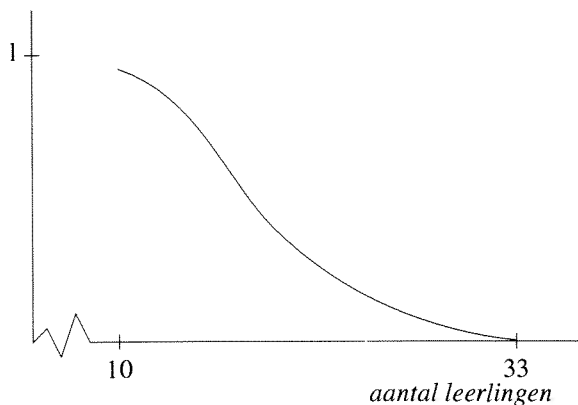
100 nummers

aantal leerlingen	P (allemaal verschillend)	P (leraar trakteert)
10	.6281	.9485
11	.5653	.9178
12	.5031	.8773
13	.4427	.8269
14	.3852	.7676
15	.3312	.7008
16	.2815	.6290
17	.2365	.5549
18	.1963	.4808
19	.1609	.4091
20	.1303	.3421
21	.1043	.2813
22	.0824	.2273
23	.0642	.1804
24	.0494	.1409
25	.0376	.1086
26	.0282	.0822
27	.0208	.0611
28	.0152	.0449
29	.0109	.0323
30	.0077	.0229
31	.0054	.0161
32	.0037	.0110
33	.0025	.0074

Helaas zitten er vaak meer dan 25 leerlingen in een klas. Dan is het ook voor een NaHosser eigenlijk niet fair om deze leerlingen uit een bingozakje met 75 getallen te laten trekken.

Hoe de kansen liggen als leerlingen aselekt een oneven getal tussen 2300 en 2500 moeten kiezen, kunt u aflezen uit de volgende grafiek.

P (leraar trakteert)



Deze grafiek is voor mij tot nu toe het enige argument dat pleit voor grotere klassen.

Vierde bedrijf

Intussen zijn de leerlingen al een heel eind met de 'gewone' kansrekening opgeschoten. Ze weten al iets van boomdiagrammen af, ze weten dat je kansen kunt vermenigvuldigen en hebben soms al van complementaire gebeurtenissen gehoord.

In de 4 vwo en 5 vwo klas was men tijdens het verwerken van de taarten toch wel benieuwd naar de theoretische kant van onze weddenschap en was men (met een beetje hulp) in staat om de kansen te berekenen. In de 4 HAVO-klassen wilde men liever ongestoord van de taart genieten. Daar is een herhalingsuur in 5 HAVO, kort voor het eerste schoolonderzoek, het juiste moment om de herinnering aan de appeltaarten nog eens op te halen en van een theoretische beschouwing te voorzien.

APS cursussen Wiskunde



Effectief lesgeven met de nieuwe boeken (3 middagen)

Voor alle wiskundedocenten

- handig leren omgaan met de nieuwe boeken in klas 1 en 2
- doelgericht en vlot lessen voorbereiden
- gemakkelijk (kern)opgaven vinden voor klassikale (na)bespreking, zelfwerkzaamheid en huiswerk
- zo veel mogelijk alle leerlingen bij de les betrekken
- leerlingen leren samenwerken zonder dat één alles doet en de rest niets
- produktief huiswerk bespreken.

U werkt aan de hand van cursusmateriaal dat aansluit bij de op uw eigen school in klas 1 en 2 gebruikte methode.

Rotterdam: 2 en 30 november 1994, 18 januari 1995

Utrecht: 9 november, 7 december 1994, 25 januari 1995

De prijs van deze cursus is f 225,- inclusief materiaal.

Proefwerken (2 middagen)

Voor alle wiskundedocenten

- ontwerpen en maken van goede proefwerkopgaven
- selecteren van opgaven uit andere bronnen
- samenstellen van een proefwerk bij een hoofdstuk
- de les vóór het proefwerk.

Van alle deelnemers worden proefwerkopgaven voor de eerste klas verzameld. Deze worden vermenigvuldigd en

de tweede bijeenkomst aan iedereen uitgereikt; de teksten ook op diskette.

Eerste middag: van een goed idee naar een goede opgave voor een proefwerk voor klas 2.

Tweede middag: beoordelen van leerlinguitwerkingen en normeren van proefwerken.

Rotterdam: 12 oktober en 14 december 1994

Utrecht: 2 november en 21 december 1994

De prijs van deze cursus is f 150,- inclusief materiaal.

Meetskunde (3 middagen)

Voor alle wiskundedocenten

Een cursus voor docenten die zich onvoldoende boven de nieuwe stof voelen staan. Er is geen uitgebreide meetkundige voorkennis vereist. Er komen didactische en wiskundige achtergronden aan bod. Deze cursus is een herhaling van de succesvolle cursus van vorig jaar, ontwikkeld in samenwerking met het Freudenthal instituut.

Utrecht: 2 november, 30 november 1994, 11 januari 1995

De prijs van deze cursus is f 225,- inclusief materiaal.

Inlichtingen:

APS, Infopunt Wiskunde

Postbus 85475, 3508 AL Utrecht

tel. 030-856722