Van Rekenen en Tekenen naar Schatten en Schetsen

De grafische rekenmachine in de onderbouw?

E.J. Kok
Vrije Universiteit, Amsterdam

Inleiding

De grafische rekenmachine is in opmars. In snel tempo kunnen de apparaatjes meer en kosten ze minder. Er wordt veel gedacht en geschreven over de mogelijkheden en de gevolgen van gebruik ervan in de bovenbouw van het middelbaar onderwijs. Toch is het zeker niet uitgesloten dat de grafische rekenmachine ook in de onderbouw een nuttig apparaat kan zijn.
De eerste ervaringen met het nieuwe W12-16 programma worden nu opgedaan; evaluaties, discussies en aanpassingen zullen volgen. Het zou jammer zijn als in die discussies de vraag van het al of niet gebruiken van de grafische rekenmachine niet expliciet werd gesteld. Is het een te technisch 'speeltje' dat de aandacht afleidt van de begrippen die je net voorzichtig probeert over te brengen? Of kan het juist daarbij helpen zodat je het zelfs zou *moeten* gebruiken?
Met die vragen in het hoofd heb ik literatuur doorgenomen en wat opgaven uitgeprobeerd met een paar leerlingen. Om een bijdrage te kunnen leveren aan de discussie heb ik één en ander samengevat[1]. Hoofdaccent ligt bij de beschrijving van onderzoeksresultaten; de opgaven die ik probeerde waren slechts eerste probeersels om leerlingen uit de onderbouw te zien werken met een grafische rekenmachine aan een bepaald soort opgaven.
Mijn voorlopige conclusie is dat de grafische rekenmachine inderdaad vruchtbaar in de basisvorming gebruikt zou kunnen worden, mits leerlingen daarbij goed begeleid worden.

Onderzoeksresultaten

Bij de speurtocht in de onderzoeksliteratuur vond ik een artikel uit 1990 met een overzicht van (vak)didactisch en leerpsychologisch onderzoek op het terrein van functies, grafieken en het tekenen ervan. In het artikel zijn resultaten bijeengebracht over het leren door en het onderwijzen aan negen- tot veertienjarigen. Het is in 1990 (door G. Leinhardt, O. Zaslavsky en M.K. Stein) geschreven en beslaat een periode van de ongeveer twintig daaraan voorafgaande jaren.

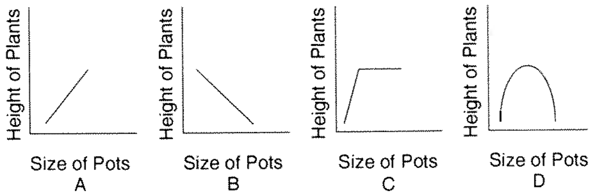
L,Z&S analyseren in hun overzicht het onderzoek vanuit drie verschillende gezichtspunten. Vanuit de *taken* die de proefpersonen moeten verrichten, vanuit het *leren* en de wijze waarop begripsvorming plaatsvindt en vanuit het *onderwijs*. Onderzoeksresultaten die mij van belang lijken voor de grafische rekenmachine in de basisvorming laat ik de revue passeren.

De taken

Als belangrijkste kenmerk van een taak noemen L,Z&S de *activiteit die van de leerling gevraagd wordt*. De meeste taken vragen om *interpretatie* of *constructie*. Onder *interpreteren* wordt verstaan het 'lezen' of betekenis toekennen aan een grafiek, functievoorschrift of situatie. Zij constateren dat in het merendeel van het onderzoek interpretatietaken worden gebruikt.
Bij *construeren* gaat het erom dat de leerling 'iets nieuws' maakt. Het kan daarbij gaan om zulke uiteenlopende activiteiten als het plotten van punten uit een tabel, voorspellen van het verloop van een grafiek buiten het gezichtsveld, afleiden van het functievoorschrift uit de grafiek of het genereren van een voorbeeld van een bepaald soort functie. Ook het tekenen van een grafiek van een functie, gegeven het voorschrift, is een taak waarbij de leerling construeert.
Vooral bij constructietaken – of onderdelen daarvan – kunnen *(grafische) computers* gebruikt worden. Dat heeft dan grote invloed op het taakgebied waar de leerling mee geconfronteerd wordt: alleen al het aantal grafieken dat bekeken kan worden neemt enorm toe. L,Z&S verwachten dan ook dat wanneer leerlingen niet meer alles zelf hoeven te tekenen de gangbare opgaven zullen (moeten) veranderen. De aandacht zal bijvoorbeeld verschuiven van het nauwkeurig berekenen en tekenen van één functie met grafiek naar het beantwoorden van vragen over het globale verloop van de grafiek. Van vragen over een bepaalde functie naar (generalisatie-)vragen over een aantal functies met gemeenschappelijke kenmerken.
In grote lijnen verwachten zij dat globale interpretaties belangrijker gaan worden en de precieze detail-construc-

ties minder belangrijk.
Onafhankelijk van de mate waarin interpretatie of constructie is vereist, zijn taken gericht op lokale of op globale eigenschappen van de functie. Een volgend onderscheid is te maken naar kwalitatieve of kwantitatieve activiteit van de leerling. Een voorbeeld van een taak waar gevraagd wordt om kwalitatief te interpreteren op een globaal niveau is in figuur 1 overgenomen.

Use the following information to answer questions 16 and 17. Dick plans to study the effect of growing sunflowers in different size pots. The graphs below show four possible outcomes of his experiment.



Which graph is best described by each of the following statements.

16. As the pot size increases, the plant height decreases
17. As the pot size increases, the plant height increases up to a certain pot size. With larger pots, plant height remains the same.

fig. 1: Uit L,Z&S een voorbeeld van een kwalitatieve interpretatietaak op globaal niveau

L,Z&S stellen dat er vroeg in het curriculum nauwelijks aandacht aan de globale kenmerken van functies en grafieken wordt besteed. Ook het kwalitatief interpreteren wordt in het wiskundeonderwijs volgens hen onderbelicht. Die constatering is gebaseerd op het wiskundeonderwijs in de Verenigde Staten; een dergelijk tekort aan aandacht geldt in het nederlandse wiskundeonderwijs waarschijnlijk veel minder (o.a. Groen, 1989).

Verschillende soorten taken

De taken waarmee leerlingen of proefpersonen geconfronteerd worden zijn meestal in één van de volgende vier categorieën in te delen. Het zijn predictie-, classificatie, vertaal- of schaaltaken.
Er is relatief veel onderzoek gedaan met de vertaaltaken. Het tekenen van een grafiek gegeven het functievoorschrift is in dit jargon een vertaaltaak. Er wordt 'iets nieuws' gemaakt dus is het een taak met een duidelijke constructiecomponent. Deze vertaling (van voorschrift naar grafiek) is bij uitstek het terrein van de grafische rekenmachine. Tijd gestoken in het oefenen van *precies* en *netjes* tekenen van grafieken, lijkt niet meer zo goed besteed. Met de komst van de grafische rekenmachine is die technologie nu immers voor iedereen onder handbereik. In die nieuwe situatie is het veel meer van belang dat een leerling in staat is, beargumenteerd, een ruwe schets van een grafiek te maken.

Schaal en illusies

Over zogenaamde schaaltaken is in de literatuur veel minder te vinden. Jammer, want met het gebruik van grafische rekenmachines komen aspecten als 'domein', 'bereik', 'schaal' en 'eenheid' voor de leerling indringender naar voren dan bij potlood en papier het geval was. Alleen al omdat het zoveel makkelijker kan, zal nu veel vaker van de leerling gevraagd worden schaal en eenheid zelf te bepalen. Daar komt dan bij dat dezelfde grafiek met een andere schaal er héél anders uit kan zien. In één van de weinige artikelen waar 'schaal' expliciet aan de orde komt (Goldenberg, 1988), wordt duidelijk gemaakt tot welke misverstanden het kan leiden wanneer leerlingen zonder adequate voorbereiding en begeleiding zelf experimenteren met software-pakketten. Zelfs wanneer de schaal bij het tekenen gelijk blijft, de eenheden op x- en y-as gelijk zijn, het 'window' vierkant en het onderwerp zoiets 'simpels' is als een lineaire functie, kunnen perceptuele illusies een storende rol spelen.

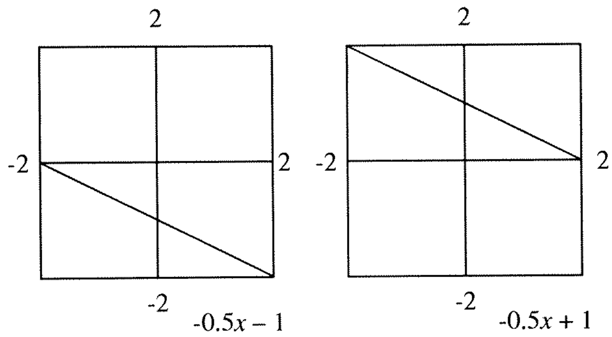


fig. 2: Overgenomen uit Goldenberg, 1988

In figuur 2 zien we wat we wiskundig juist vinden: als b toeneemt in $ax + b$, gaat de grafiek omhoog.

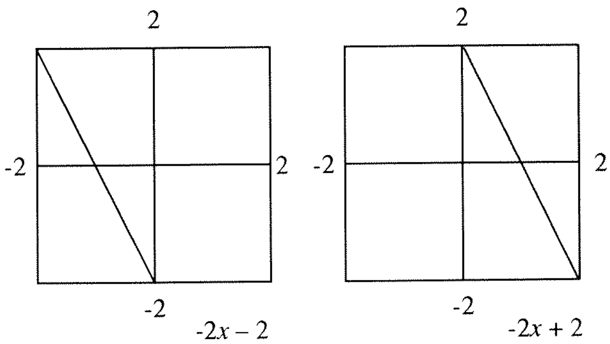


fig. 3: Overgenomen uit Goldenberg, 1988

Maar als het voor u lijkt alsof de grafiek in figuur 3 ook omhoog gegaan is, dan is daarmee vrijwel zeker het bewijs geleverd dat u een wiskundeleraar of -lerares bent! Voor praktisch elk ander individu lijkt het alsof de lijn naar rechts verschoven is. Uitgerust met voldoende kennis is het mogelijk om door die bril te kijken en de illusie te doorzien. In plaats van de lijn als geheel, wordt een geschikt punt op de lijn gevolgd. Het punt $(0,f(0))$ is in de figuur zo'n ankerpunt: dat punt op de lijn gaat inderdaad omhoog. Wanneer de verhouding van de schaal op de x- en y-as verandert of het kijkraam niet meer vierkant is kan ook de hellingshoek van een lijn er anders uit gaan zien.

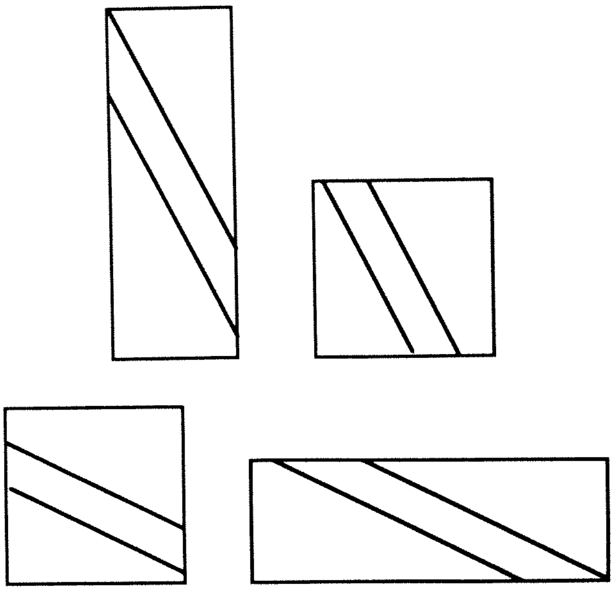


fig. 4: Perceptuele illusies bij veranderend kijkraam. Overgenomen uit Goldenberg, 1988

Behalve dat bij de bovenste twee kijkramen in figuur 4 het bij de linker lijkt alsof de lijnen boven elkaar liggen en bij de rechter naast elkaar, lijkt het bovendien alsof de lijnen rechts steiler lopen. In werkelijkheid hebben ze alle vier dezelfde hellingshoek. In de onderste helft van de figuur is een soortgelijke perceptuele illusie te zien.

Ongewenste gevolgen

In zijn artikel laat Goldenberg zien welke 'theorieën' leerlingen kunnen opbouwen, wanneer ze met grafische software aan hun lot worden overgelaten. Hij geeft daarvan het volgende voorbeeld. Na een sessie experimenteren schrijft een groepje leerlingen:

Er zijn vijf gevallen die beschrijven wat er gebeurt met de grafiek van ax + b als b toeneemt:

$\lvert a\rvert \ll 1$	*als b toeneemt, gaat de lijn omhoog*
$\lvert a\rvert \gg 1$, $a > 0$	*de lijn gaat naar links*
$\lvert a\rvert \gg 1$, $a < 0$	*de lijn gaat naar rechts*
$\lvert a\rvert \approx 1$, $a < 0$	*de lijn gaat diagonaal naar het noordoosten*
$\lvert a\rvert \approx 1$, $a > 0$	*de lijn gaat diagonaal naar het noordwesten*

Goldenberg concludeert terecht dat hoewel zo'n ingewikkeld geformuleerd verhaal alle aanleiding geeft voor een waardevolle discussie in de klas, het toch niet is wat we hoopten dat de leerlingen zouden leren!

L,Z&S vermoeden dat het feit dat in de wiskundelessen schaal meestal als een onveranderlijk gegeven beschouwd werd (met dezelfde schaal op beide assen) er mede oorzaak van is dat schaalaspecten later en in de toepassingen zo vaak problemen opleveren.

Verwarrende handelingen

Een ander soort verwarring kan ontstaan doordat wat leerlingen moeten doen om het apparaat een grafiek te laten tekenen soms slecht aansluit bij de inhoud van de begrippen waar het om gaat. 'Variabele' is zo'n begrip waarbij die verwarring makkelijk kan ontstaan. Stel dat een leerling twee functies invoert (bijvoorbeeld eerst $2x + 5$, daarna $4x + 7$). Welke handelingen heeft de leerling dan verricht? De leerling typte in beide invoerregels dezelfde x op dezelfde plaats. Het enige wat hetzelfde is, is dus de variabele. Alleen op de plek van de parameters heeft de leerling iets 'gevarieerd' (2 werd 4 en 5 werd 7)! Wat de leerling doet is in dit geval niet in overeenstemming met het 'variabele'-begrip dat een leraar probeert over te brengen.

Het leren

Leren bouwt altijd ergens op voort, op iets dat eerder geleerd is of op intuïtieve kennis. Het blijkt dat kinderen functionele relaties eerder dóór hebben, eerder begrijpen, als het gaat om duidelijke oorzaak-gevolg relaties. Het gebruik in het onderwijs van een 'functiemachine' sluit bij die intuïtie aan, maar draagt tegelijkertijd het risico in zich die voorkeur voor causaliteit te versterken, ten koste van het meer algemene begrip van twee samenhangende variabelen.
Ook blijkt dat bij het kijken naar en afbeelden van grafieken leerlingen een voorkeur hebben voor symmetrie. Zowel bij de grafieken zelf maar vooral ook bij het kiezen van assenstelsels blijkt die voorkeur.

Voorkeuren kunnen wanneer ze sterk genoeg zijn en wiskundig niet correct, ontaarden in zogenaamde *misconcepties*. Onderzoek naar misconcepties is veelal gedaan met behulp van classificatietaken. Er wordt dan aan de proefpersonen gevraagd: welke verbanden of vergelijkingen stellen functies voor? Bij een functievoorschrift als $f(x) = x^2$ gaat dat altijd goed. Er hoort een mooie regelmatige, symmetrische grafiek bij. Het lijkt wel een soort prototypisch exemplaar, net als een roodborstje of duif voor het concept 'vogel'. Een constante functie is eerder te vergelijken met een kip of een eend: je moet de definiërende kenmerken nalopen voordat je kan besluiten dat het óók vogels zijn. Een cirkel is geen grafiek van een functie; in die zin te vergelijken met de manier waar-

op een vleermuis geen vogel is. Dat er zoveel fouten gemaakt worden als er gevraagd wordt of iets een functie is of niet (Tall & Bakar, 1992) is niet verbazingwekkend. Uit cognitief onderzoek naar kennis representatie is bekend dat naarmate een exemplaar meer prototypisch is voor een begrip, de proefpersoon sneller zal kunnen beamen dat het exemplaar tot de groep behoort. Exact waaróm het voor niet-prototypische exemplaren (is een pinguïn een vogel?) langer duurt, is nog niet helemaal duidelijk. Het is in elk geval wel aannemelijk dat dergelijke vragen meer fouten opleveren[2].
Het komt erop neer dat leerlingen intuïtief al neigen naar voorkeur voor een beperkte groep mooie, regelmatige, symmetrische functies. Het onderwijs kan daarbij aansluiten als het gaat om het aanleren van het functiebegrip, maar tegelijkertijd is er het risico dat het onderwijs diezelfde intuïtie tot misconceptie laat verworden. Om dat risico te verkleinen is het van belang dat er veel variatie is in de voorbeelden die gebruikt worden.

Variatie in voorbeelden

Niet alleen om misconcepties te voorkómen, maar ook om 'open' conceptvorming te bevorderen is het goed gevarieerde voorbeelden te gebruiken. Het maakt vervolgleren makkelijker. Het is ook nodig om zogenaamde 'wendbare' of 'flexibele' kennis op te bouwen. Een voorbeeld dat het belang van 'wendbaarheid' van wiskundige kennis onderstreept, is te zien in figuur 5: een plaatje van een individuele vraagfunctie.

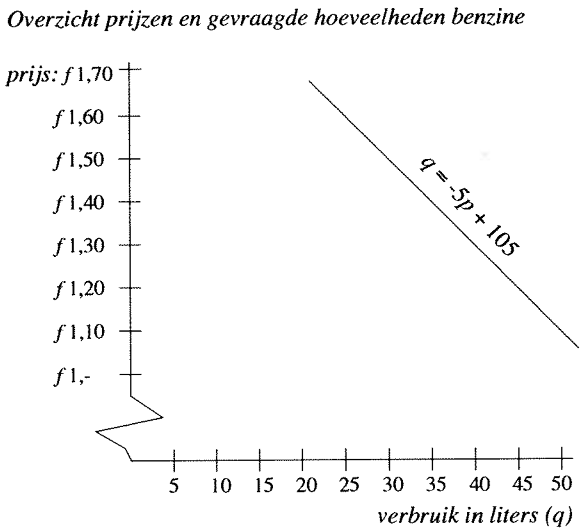


fig. 5: Overgenomen uit het schoolboek 'Kijk, Economie'

Bij het vak economie is het de gewoonte om de hoeveelheid (q) op de horizontale as en de prijs (p) op de verticale as uit te zetten. De 'hoeveelheid gevraagd' wordt gezien als functie van de prijs. De interpretatie van zo'n figuur vergt van de leerlingen de nodige flexibiliteit. Ze hebben dan weinig aan wiskundelessen waarin uitsluitend voorbeelden gebruikt zijn met verticale y-as, horizontale x-as en een y die een functie is van x.

Het onderwijzen

Algemeen lijkt men het erover eens te zijn dat het onderwijs over functies en grafieken concreet, globaal en intuïtief moet beginnen, om langzamerhand formeler en abstracter te worden. Bij de *introductie* van grafieken zijn er twee hoofdingangen: grafieken tekenen vanuit gegeven punten (of van een tabel) of het (globaal, kwalitatief) bespreken van een grafiek van een situatie. In de ene benadering van het onderwerp beginnen leerlingen met een constructietaak; in de andere met een interpretatietaak. Naar eventuele effecten van verschillende ingangen is nauwelijks onderzoek gedaan en waar dat wel gebeurde was er geen effect. Ook hier weer lijken voorbeelden van groter belang. Goede voorbeelden op het juiste moment zijn waarschijnlijk belangrijker voor het leerresultaat dan de ingang die gekozen wordt.

Notatie

Het wennen aan wiskundige notatie is een probleem op zich. Ook al is het in de onderbouw makkelijk uit te leggen dat het handig is afspraken te maken over de manier van opschrijven, daarmee is het voor de leerlingen nog niet eenvoudig die afgesproken notatie ook te *gebruiken*. Zeker bij het begin van leren over grafieken en verbanden moeten leerlingen niet lastig gevallen worden met formele notatie. In het W12-16 programma gebeurt dat ook niet; in de eerste twee leerjaren wordt zoveel mogelijk gewerkt met zinvolle namen en omgangstaal (*trapperrondes* en *afstand* in plaats van x en y). Pas in de derde klas wordt begonnen met het afkorten tot letters. Maar zelfs dat afkorten kan al problemen geven.
Uit psychologisch onderzoek is bekend dat als proefpersonen (bij een programmeertaak) zelf mogen bepalen of ze voor variabelen volledige, zinvolle namen kiezen of éénletterige afkortingen gebruiken, juist de zwakpresteerders eerder kiezen voor afkorten. Daardoor hebben ze nog minder houvast aan hun tekst en verliezen ze tenslotte helemaal de greep op de taak. Leerlingen te vroeg laten werken met standaardafkortingen zou wel eens desastreus kunnen zijn, met name voor de zwakkeren. De grafische rekenmachine forceert het gebruik van de standaard x en y notatie. Dat is een belangrijke reden om niet té vroeg in de onderbouw met de apparaten te beginnen.

Betekenis voor de onderwijspraktijk

Al met al zou mijn conclusie zijn dat de grafische rekenmachine vanaf de derde klas gebruikt kan worden. Voor wat betreft de begripsvorming moet er dan wel in de eerste twee klassen een voldoende brede basis gelegd zijn. Voldoende, vooral in de zin van voldoende variatie in soorten grafieken en verbanden.

Bovendien lijkt het me duidelijk dat wanneer de grafische rekenmachine in het onderwijs gebruikt wordt, het apparaat en de wijze van gebruik moet passen in die lijn en opbouw die er in het leerplan zit. Net als bij de zakrekenmachine gaat het niet om het incidentele trucje dat misschien wel even aanspreekt. Het gaat om het zodanig inpassen dat het bij kan dragen aan een grondigere of rijkere begripsvorming.

Opgaven voor de onderbouw

Het lijkt mij voor de hand te liggen te denken aan oefeningen waarbij gebruik gemaakt wordt van verschillende schaalopties of waar er in- en uitgezoomd wordt. Op die manier kunnen de eigenschappen van het apparaat worden uitgebuit ten behoeve van die rijkere begripsvorming. Door leerlingen opdrachten en vragen te geven over veranderingen in plaatjes kan de aandacht expliciet gericht worden op de samenhang tussen de gekozen schaal en de vorm van een grafiek.
Ook zouden er oefeningen gemaakt kunnen worden waarbij nu eens *niet* de oorsprong in het midden ligt. In de standaardinstelling van de grafische rekenmachine die ik gebruikte (de TI-81) zijn de afstanden tussen de eenheden op de horizontale en de verticale as niet gelijk: een asymmetrie die leerlingen vaker zullen tegenkomen en waar ze dus mee om moeten leren gaan.
De huidige grafische rekenmachines zijn (nog) niet met een printertje uitgerust. Dat lijkt een nadeel, maar kan een voordeel worden als het de aanleiding is om leerlingen te leren een schetsje te maken van een grafiek die ze verwachten te krijgen of die ze hebben laten tekenen.
Bij het veranderen van schaal is het soms lastig dat de tekening in het oorspronkelijke kijkvenster niet meer voorhanden is. Dat zou een reden kunnen zijn om leerlingen in groepjes te laten werken. Het wordt dan mogelijk één grafische rekenmachine te reserveren voor het globale overzicht en een andere voor het 'zoomen' en experimenteren. Bij het groepswerk zouden de leerlingen ook een verslag kunnen maken met daarin schetsen van de relevante plaatjes.

Pieter, Maaike en Kyoko

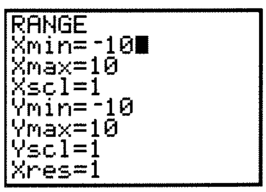
Met de bedoeling na te gaan of de ideeën die ik uit de literatuur opdeed ook enigszins bruikbaar zijn in de praktijk, heb ik een paar eenvoudige schaalopdrachten bedacht. Twee daarvan staan in figuur 7 (zie verderop). Zij zijn geïnspireerd op oefeningen uit het experimentele W12-16 lespakket *Grafieken vervormen*. Drie leerlingen van de derde klas van het Alkwin Kollege in Uithoorn waren bereid met mijn probeersels aan de slag te gaan.

Introductie

Omdat het slechts om eenvoudige schaaloefeningen ging, was het niet nodig alle toetsen en functies met de leerlingen te verkennen. Zelfs hebben we niet alle toetsen die met functies en grafieken te maken hebben doorgewerkt. Nodig waren: het Y=-menu, waarin het functievoorschrift opgegeven wordt en de twee menu's voor het kijkvenster: RANGE en ZOOM. Van die menu's hebben we ook niet alles bekeken, alléén die opties die nodig waren voor de oefeningen. Bij RANGE was alleen het instellen van de uiterste waarden op de assen van belang. Van het ZOOM-menu zijn ZOOM-IN, ZOOM-OUT en STANDARD (voor terugkeer naar het standaard assenstelsel: beide assen van -10 tot +10) aan de orde geweest. De TRACE-functie hoefde niet gebruikt te worden; de GRAPH uiteraard weer wel: het indrukken van de GRAPH-toets heeft tot gevolg dat de grafiek getekend wordt.
Behalve deze vijf echte functie/grafiektoetsen die op een rij vlak onder het scherm staan hadden we nog nodig: de x voor de onafhankelijke variabele en de vier pijltjestoetsen om het centrum voor het in- en uitzoomen te bepalen.
Voor de oefeningen was er zó weinig nodig van het reken-deel van de TI-81, dat ik daar bij de introductie niet meer aandacht aan heb besteed dan erop te wijzen dat de bekende knoppen aanwezig waren.

Ervaringen

Hoewel er dus geen uitgebreide voorbereiding nodig was, waren we er toch al met al meer dan een half uur aan kwijt. Dat kwam vooral omdat ik het probeergedrag van de leerlingen niet wilde afkappen. Op mijn suggestie tekenden ze twee elkaar snijdende grafieken en spoorden het snijpunt op. Al pratend en proberend kwamen nog andere toetsen, zoals bijvoorbeeld CLEAR, aan bod.
Bij het uitproberen van de ZOOM-functie kwam direct de spontane reactie: 'Je zou de vorige grafiek nog moeten kunnen zien, zodat je kunt zien waar je vandaan komt'. Gelijk hebben ze. In de laatste versie van VU-grafiek is die voorziening ingebouwd. Ook bij de nieuwere grafische rekenmachines kan het scherm gesplitst worden zodat beide grafieken tegelijk zichtbaar zijn.
De leerlingen leken niet verbaasd over de 'harige' grafieken, noch over het grote aantal cijfers achter de komma (acht) waarmee tijdens het ZOOMEN de plaats van de cursor wordt aangegeven. Wel was er grote schrik toen het RANGE-menu werd bekeken nadat er ingezoomd was.



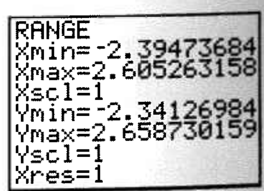


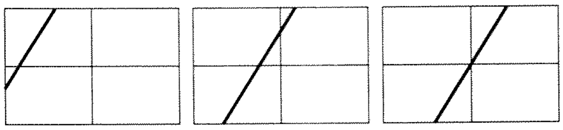
*fig. 6: RANGE-MENU na ZOOM-STANDARD en RANGE-MENU na 1*ZOOM-IN (set factors = 4)*

In dat menu staan dan de schaaluitersten ook met acht decimalen. Waarom was het voor de cursorpositie niet gek en voor de schaaluitersten wel? Komt dat omdat we zó gewend zijn zélf 'mooie' getallen bij de assen te zetten? Ook als we ze niet zelf zetten, staan daar bijna altijd mooie, ronde getallen. Blijkbaar zijn de leerlingen daar ook al helemaal aan gewend. Zouden cursorbewegingen zo sterk gekoppeld zijn aan 'computerrekenarij' dat een grote hoeveelheid decimalen dáár al min of meer verwacht wordt?

Oefenen

Met het functievoorschrift $y = 2x + 4$ heb ik de leerlingen gevraagd de volgende plaatjesreeksen na te maken.

Maak met RANGE of ZOOM de volgende reeks plaatjes na:



Maak met RANGE of ZOOM de volgende reeks plaatjes na:

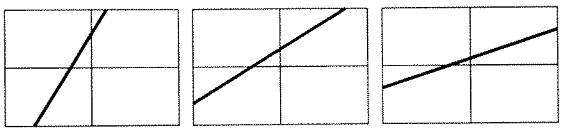


fig. 7

Elk voor zich en met kennelijk enthousiasme werkten Pieter, Maaike en Kyoko de rest van het eerste lesuur aan de opgaven. Er was vervolgens geen tijd meer om na te praten, om conclusies te verbinden aan wat ze hadden gedaan.
Vanzelf begon de volgende sessie (een week later) met een recapitulatie van de eerste kennismaking met het apparaat.
Napratend over het verschil tussen in- en uitzoomen aan de ene kant en het apart instellen van de uiterste waarden langs de x- en y-as vallen vanzelf termen als: 'dichter bij' en 'verder af', 'uitrekken', 'oprekken', 'in elkaar duwen' enzovoort.
Waardoor het komt dat als je alléén 'zoomt' de grafiek 'hetzelfde' blijft en niet platter of steiler gaat lopen, is volgens één van de meisjes logisch, want 'de verhouding blijft toch hetzelfde?'

Conclusies

Hoewel ik niet het idee heb dat met dit mini-experiment nu het laatste woord over de grafische rekenmachine in de onderbouw gezegd is, ben ik erdoor overtuigd geraakt dat het apparaat goede diensten kan bewijzen.
Het is met behulp van de grafische rekenmachine mogelijk in korte tijd leerlingen duidelijk te laten zien en *ervaren* hoe belangrijk de schaalverdeling langs de assen is voor de vorm van een grafiek. Dat belang wordt op deze manier veel indringender duidelijk dan wanneer je het alleen kan laten zien op papier. Het argument dat leerlingen hetzelfde kunnen ervaren als ze met een computerprogramma als VU-grafiek werken blijft natuurlijk overeind. Ik verwacht alleen dat leerlingen eerder allemaal een grafische rekenmachine op zak hebben dan dat ze allemaal makkelijk toegang hebben tot zo'n programma.
Een programma als VU-grafiek heeft echter wel duidelijke voordelen, bijvoorbeeld het kunnen gebruiken van woordvariabelen. Hoewel de notatie bij deze drie leerlingen geen enkel probleem gaf, denk ik dat enige voorbereiding erop voor leerlingen in het W12-16 programma beslist noodzakelijk is.
Ik denk overigens niet dat het een kwestie van óf óf moet worden. Ik kan me heel goed voorstellen dat grafische rekenmachines gebruikt worden op school en thuis en voor allerlei doeleinden, waaronder het laten tekenen van grafieken. Naast het gebruik van een educatief softwarepakket op school is daar nog alle ruimte voor.

Noten

[1] De scriptie, waarvan dit artikel een bewerking is, is met literatuurlijst en oefenopgaven voor belangstellenden op te vragen bij: E.J. Kok, Dotterbloem 22, 3648 NS Wilnis.

[2] L,Z&S merken op dat wanneer leerlingen alleen 'mooie' functies als functie herkennen, ze in overeenstemming met de geschiedenis van het functiebegrip oordelen. Vroegere generaties wiskundigen definieerden het begrip ook 'mooier' dan het nu wordt gedaan. Terzijde kun je je afvragen of een beetje geschiedeniskennis op dit punt leerlingen zou helpen. Daarmee zou in elk geval het inzicht bevorderd worden dat wiskunde 'gewoon mensenwerk' is.

Literatuur

Goldenberg, E.P. (1988). Mathematics, metaphors, and human factors: mathematical, technical, and pedagogical challenges in the educational use of graphical representation of functions. *Journal of Mathematical Behavior, 7*, 135-173.

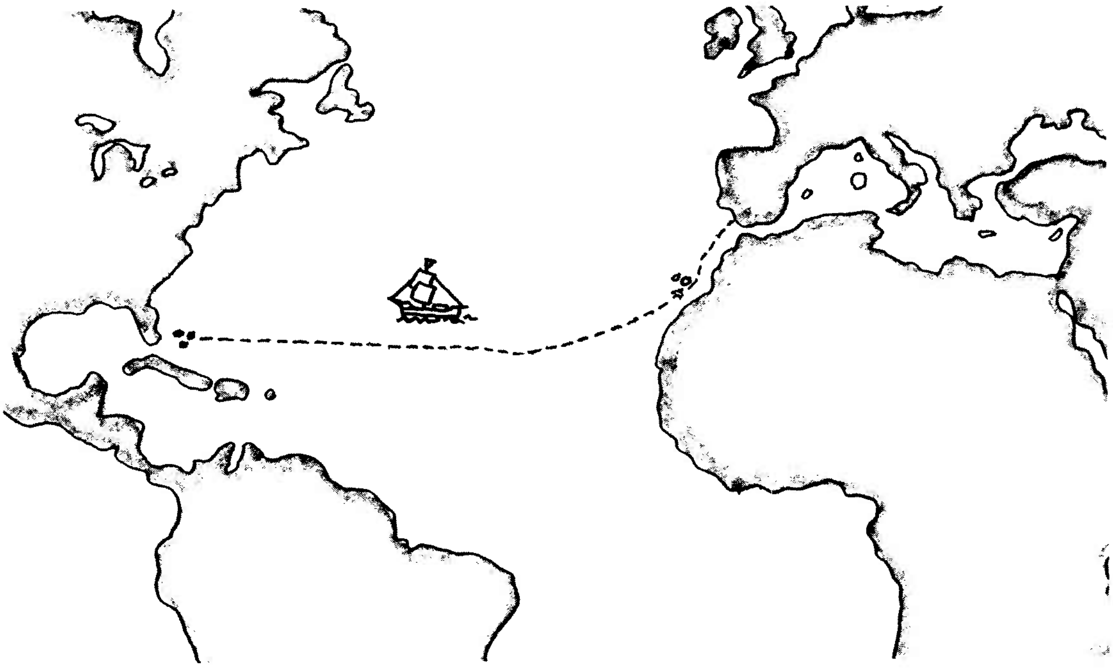
Groen, W. (1989). Wiskunde. In: H. van Helden, H. Voorbach (red). *Schoolvak in Ontwikkeling. Ontwikkelingen in AVO/VWO.* BULO, Vrije Universiteit, Amsterdam.

Leinhardt, G., O. Zaslavsky and M.K. Stein (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research, 60* (1), 1-64.

Tall, D. and MdN. Bakar (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs. *International Journal of Mathematical Educations in Science and Technology, 23* (1), 39-50.

Columbus

Ruim driehonderd jaar geleden, op 14 oktober 1492, zette Christoffel Columbus voet aan wal in Amerika. Hij was toen al 73 dagen onderweg.
Hieronder zie je een kaartje met de route die Columbus heeft gevolgd.



De tocht van Columbus in 1492 schaal 1 : 90 000 000

Opdracht 1
Maak een redelijke schatting van de gemiddelde snelheid van de schepen van Columbus tijdens zijn reis naar Amerika. Kun je zo'n snelheid op de fiets of lopend bijhouden?

Tegenwoordig leggen mensen dit soort afstanden vooral met vliegtuigen af. Een reis als die van Columbus duurt nu met een vliegtuig ongeveer tien uur.

Opdracht 2
Wat is de gemiddelde snelheid van zo'n vliegtuig in kilometer per uur?

Een Concorde is het snelste (burger)vliegtuig. Een Concorde vliegt ruim 2500 kilometer per uur.

Opdracht 3
Hoeveel uur zal je met een Concorde onderweg zijn van Spanje naar Zuid-Amerika?

Een werkblad uit 'De schatkamer; activiteiten voor schattend rekenen'.