Aan het denken gezet door een rekenmachine-probleem!

H. Broekman, IVLOS lerarenopleiding, Universiteit Utrecht
A. Harbers, leraar in opleiding

Inleiding

Leren denken, leren redeneren is een van de doelstellingen van het reken-wiskundeonderwijs. Ook de zrm kan gebruikt worden om de leerlingen hierbij te helpen door ze uit te dagen tot na-denken en beredeneren. In dit artikel worden enkele voorbeelden beschreven van opgaven die daarbij benut kunnen worden. Uit de toegevoegde stukjes protocol van de gesprekken tussen leerlingen blijkt dat zij elkaar en hun leraar/lerares vaak dwingen tot steeds scherpere formuleringen van het essentiële van hun aanpak.
De afgelopen jaren is regelmatig verslag gedaan van de mogelijkheden om de (zak)rekenmachine in alle vormen van onderwijs te benutten. Vooral door Jan van den Brink[1] is het gebruik benadrukt van de zrm als didactisch hulpmiddel om de leerlingen aan het denken te zetten. In de experimentele materialen van het team W12-16[2] zijn vele goede voorbeelden te vinden van een dergelijk didactisch gebruik. Evenals Jan van den Brink benadrukken wij het niet louter gebruiken van de zrm als rekenhulpje en adviseren ook wij de machine te benutten als didactisch hulpmiddel[3]. Daarbij zijn wij, de auteurs van dit artikel, vooral gericht op voorbeelden van opgaven die de leerlingen aanzetten tot nadenken. Nadenken over het gebruik van de rekenmachine (*kan het ook zonder?* bijvoorbeeld), maar vooral ook nadenken over het rekenen/de wiskunde waar op dat moment aan gewerkt wordt. Hierbij gaat het ons met name om het leren uiten van vermoedens (opstellen van hypotheses), het verifiëren van die vermoedens en waar mogelijk het bewijzen ervan. Veel 'denkertjes'[4] zijn echter machineafhankelijk, zoals de vraag naar het verschil in uitkomst bij intoetsen van

4	×	3	−	3	=

Wel of niet wetenschappelijk. Anders gezegd: wel of geen Mijnheer van Dalen. Ook de vraag naar de mogelijke oorzaak van het verschil tussen $7 \times \sqrt{2}$ respectievelijk $\sqrt{98}$ is een machineafhankelijke vraag (afkappen of afronden). Als er verschillende machines voorhanden zijn in de klas blijkt het een boeiende les op te leveren als je leerlingen de hier genoemde problemen laat onderzoeken. Het zoeken van mogelijke verklaringen van de 'verschijnselen' levert niet alleen boeiende lessen op, maar door de inzichtverdiepende discussies vooral ook leerzame lessen. In dit artikel zullen wij daar enkele voorbeelden van geven. De leerlingen gebruikten bij de genoemde voorbeelden de TI Galaxy 40, maar ook met andere machines zijn de opgaven zeer goed te gebruiken[5].

Spelletjes

Sommige 'denkertjes' zijn machine onafhankelijk, zoals veel van de spelletjes in vrijwel alle nieuwe leerboeken.

Tussendoortje met de rekenmachine — SPELLETJE

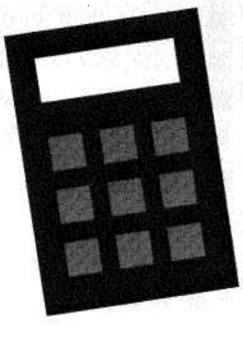
HET SPEL

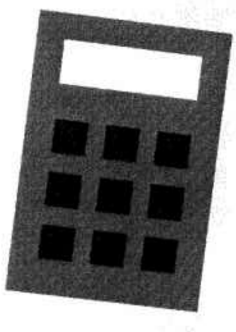
Kees en Denise spelen het volgende spel.

1 Kees toetst een begingetal in op de rekenmachine.
Denise mag het getal niet zien.
2 Denise noemt een bewerking en een getal.

LET OP!
De bewerking kan zijn optellen, aftrekken, vermenigvuldigen of delen; het getal moet liggen tussen 0 en 100.

3 Kees voert de bewerking met dat getal uit op zijn rekenmachine en zegt of de uitkomst boven of onder de 100 ligt.
4 Denise noemt weer een bewerking en een getal.
5 Kees voert de bewerking met dat getal uit en vertelt weer of de uitkomst onder of boven de 100 ligt.
6 Het spel stopt als de uitkomst precies 100 is, of als Denise twintig keer een bewerking en een getal genoemd heeft.
7 Dan worden de rollen omgedraaid en moet Denise een getal op de machine intoetsen en moet Kees in zo min mogelijk beurten op het getal 100 zien te komen.





DE WINNAAR

Winnaar is degene die de minste beurten nodig heeft gehad of het dichtst in de buurt van 100 is gekomen.

VOORBEELD

• Kees toetst in 128	128	
• Denise zegt: 'delen door 2'	64	Te laag
• Denise zegt: '25 optellen'	89	Te laag
• Denise zegt: '50 optellen'	139	Te hoog
• Denise zegt: '30 aftrekken'	109	Te hoog
• Enzovoort		

Het is opvallend hoeveel leraren deze spelletjes willen overslaan en hoeveel leerlingen deze spelletjes zien (ervaren) als gewoon een opdracht voor twee leerlingen die vervelend is (je moet steeds op een ander wachten) of leuk (je kunt het lekker samen doen). Maar wij zouden graag zien dat de spelletjes benut worden als aanzet tot denken en niet alleen als mogelijkheid om leerlingen routine op te laten doen met 'intoetsen' en 'aflezen'. In de boeken ontbreekt helaas vaak de vraag naar een winnende strategie of de vraag naar een verklaring! En juist die vragen kunnen veel leerlingen aanzetten tot nadenken. Gelukkig laten veel leerlingen zich door het gestelde probleem (probeer te winnen), of door het gesprek met elkaar voldoende inspireren om zichzelf 'denkvragen' te stellen. Het waren dan ook twee brugklassers die bij de opgave *Veeg-uit* de tijd opnamen die ze nodig hadden om op 0 te komen. Vervolgens stelden zij zich de vraag of er geen snelle winstrategie was.

Veeg-uit

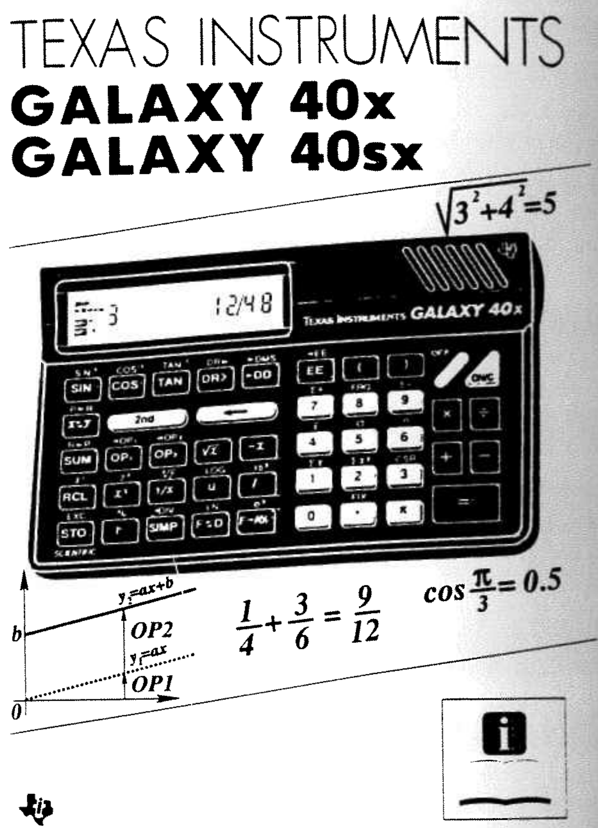
- Om het spel te spelen heeft ieder tweetal leerlingen een zrm nodig.
- De eerste speler toetst 7 cijfers van een telefoonnummer in, bijvoorbeeld 8 1 6 0 3 3 5.
- De tweede speler kiest één van de gebruikte cijfers en herhaalt dit cijfer zo vaak hij/zij wil. Het aldus verkregen getal wordt van het eerste getal afgetrokken.
- Vervolgens is de eerste speler aan de beurt om een cijfer (van het scherm) te kiezen.... enzovoort.
- De eerste speler die het telefoonnummer 'uitgeveegd' heeft en alleen nul krijgt op het scherm is de winnaar.

Voorbeeld

speler 1 toetst in 8160335 = op scherm 8160335
speler 2 toetst in -3333333 = op scherm 4827002
speler 1 toetst in -4444444 = op scherm 382558
speler 2 toetst in -55555 = op scherm 327003
enzovoorts.

Op zoek naar opdrachten die helpen om de leerlingen aan het denken te zetten kwamen wij vooral veel problemen tegen die tot doel hebben het leren kennen van de machine (scherm, toetsen, volgorde enzovoort) en het opdoen van routine om de machine efficiënt als 'hulpje' bij het rekenen te kunnen gebruiken. We vonden maar weinig vraagstukken die tot denken uitdagen.
De handleidingen bij de verschillende rekenmachines boden ons ook voornamelijk 'leren kennen' en 'routine opdoen' suggesties. Een uitzondering daarop vormde het materiaal dat bij de TI Galaxy 40X bijgeleverd wordt. De suggesties in dit materiaal én de extra mogelijkheden van dit apparaat maakten het mogelijk leerlingen te laten werken aan opgaven die ons inziens tot de categorie 'uitdagers' behoren. Het is voor het oplossen van een aantal van de vragen niet strikt nodig om over deze machine te beschikken, maar de machine is wel een grote 'didactische hulp'. In noot 5 geven wij een suggestie voor het gebruik van de opgaven met andere rekenmachines.

Meer dan alleen intoetsen?!



De toetsen OP1 en OP2 van de TI Galaxy 40X boden ons een uitgelezen kans om na te gaan of elf- tot dertienjarige leerlingen inderdaad door een rekenmachine (en bijpassende opgaven) uitgedaagd kunnen worden tot 'meer dan alleen intoetsen'.
Met dit doel hebben we enkele opgaven samengesteld en deze vervolgens uitgeprobeerd met kleine groepjes leerlingen van groep 8 (basisschool) en een volledige brugklas (HAVO/VWO).

De 'OP'-toetsen

'OP' is de afkorting van operator. Een voorbeeld van een operator is plus 5, Iedere keer als je deze operator wilt toepassen, dus ergens 5 bij wilt optellen, moet je intoetsen: $\boxed{+}\,\boxed{5}\,\boxed{=}$.
Op de TI Galaxy 40X is het mogelijk deze drie intoetsingen te vervangen door slechts één intoetsing. We gebruiken daarvoor één van de operatortoetsen $\boxed{\text{OP1}}$ of $\boxed{\text{OP2}}$.
Het intoetsen van $\boxed{+}\,\boxed{5}\,\boxed{=}$ kunnen we vervangen door één intoetsing van $\boxed{\text{OP1}}$. Deze moeten we dan wel eerst zo instellen.
Dat doe je door in te toetsen: $\boxed{+}\,\boxed{5}\,\boxed{\text{OP1}}$.

> Doe het maar eens!

Een opvallende reactie van een brugklasleerlinge was: "*je kunt het ook met* × *doen en* [na even proberen] *ook met* – *en* :". De meeste van haar klasgenootjes waren toen nog bezig met het vastleggen van '+5' als operator. Maar ook voor hen was het snel duidelijk hoe de beide operatortoetsen werkten.

Voor het 'denkwerk' selecteerden wij een viertal opgaven: *De springende vlo*, *Het toversnoer*, *Papiervouwkunst* en *Dat is geheimzinnig*. Voor dit artikel kozen we de eerste en de vierde, omdat die een goede illustratie geven van hoe de leerlingen aan het denken worden gezet. De opgaven 2 en 3 worden bijgevoegd in Noot 6.

Opgave 1

De springende vlo

Victor de Vlo woont in een oneindig lange rij van huizen die als volgt genummerd zijn:

...	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	...

De puntjes ... links en rechts betekenen 'en zo verder'.

Victor woont op nummer 0 en zijn vriendinnetje Lisette de Luis woont op nummer +1. Je zou denken: niets aan de hand. Maar Victor heeft één probleempje: hij kan maar twee soorten sprongen maken! Een kleine sprong brengt hem drie huizen verder en een grote sprong zeven huizen terug.

a. Stel $\boxed{\text{OP1}}$ in op plus 3 en stel $\boxed{\text{OP2}}$ in op min 7.
b. Hoe kan hij Lisette bezoeken?
Gebruik de toetsen $\boxed{\text{OP1}}$ en $\boxed{\text{OP2}}$ om dit te onderzoeken!
c. Maak eens lijstje van huizen die Victor kan bezoeken.

Opmerking: Je kunt de operatortoetsen zowel apart als door elkaar gebruiken.

Vincent, het neefje van Victor, woont op nummer 3 en maakt andere sprongen. Hij kan per sprong zeven huizen vooruit of negen huizen achteruit.

d. Hoe kan hij bij Victor thuis komen?
e. Hoeveel sprongen moet Vincent dan in totaal maken?

Hoe kan hij Lisette bezoeken?

Ook al was er enige aandrang nodig om de leerlingen iets te laten opschrijven, er kwamen toch aantekeningen zoals de volgende vier:

1. -7 -14 -21 -28 -35 -32 -29 -26 -23 -30 -17 -19 -11 -85 -2.
2. OP1, OP1, OP1, OP1, OP1, OP2, OP2.
3. één grote sprong, één kleine sprong, één grote sprong, vier kleine sprongen.
4. 2121111.

Hoe kan hij bij Victor thuis komen?

Henrike en Annemarieke
Na een aantal pogingen hebben Henrike en Annemarieke een oplossing gevonden:
Henrike: Ja, ik heb hem! De laatste was negen. Ja, ja, ik heb hem, maar ik weet niet meer zeker hoe die moet. Overnieuw... Je begint op nummer drie, moet die eerst 2, 1 en dan OP2 en dan OP1 en dan OP1 en dan OP2 en dan OP2 en dan OP1 en dan OP1 en dan OP1 en dan OP2. Ik heb hem!!
(plotseling heeft ze een oplossing gevonden)
OP2 OP1 OP2 OP1 OP1 OP2 OP2 OP1 OP1 OP1 OP2
(resumeert)
Heb je dezelfde? (vraagt dat aan Annemarieke)
Annemarieke: Ik heb deze: 1, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1.
Henrike: Weet je hoe ik hem heb? Kijk: 2, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2 .
een, twee, drie, vier, vijf, zes, zeven, acht, negen, tien, elf
(telt het aantal sprongen van haarzelf)
een, twee, drie, vier, vijf, zes, zeven, acht, negen, tien, elf
(telt het aantal sprongen van Annemarieke)
Henrike: Hé, we hebben verschillende!
Annemarieke: We hebben er allebei elf! (door Henrike heen pratend).

Alle leerlingen vonden dit een leuke opgave. Er onstonden bovendien zeer leerzame gesprekjes naar aanleiding van

- de diverse manieren van noteren
- de behoefte die ontstond om het met minder stapjes te doen
- de behoefte die ontstond om de verschillende 'manieren om er te komen' te vergelijken.

Maar daar ging wel iets aan vooraf!

John: *Mijnheer, ik ben op 1 uitgekomen, maar ik weet niet meer hoe ik het gedaan heb.*
Peter: *Ik heb net zo lang getoetst tot ik er was, is dat goed?*
Leraar: *Het is goed dat je op 1 gekomen bent, maar probeer het samen nog maar een keer. De een toetst in en de ander noteert wat er ingetoetst wordt.*

Door te praten over hun ervaringen, hun handelen, werden de leerlingen zich mogelijkerwijs meer bewust van de essentiële aspecten van die ervaringen. Dat praten kan gezien worden als een essentieel onderdeel van de begripsontwikkeling die plaatsvindt ('aantal benodigde sprongen', 'soorten benodigde sprongen', de 'onafhankelijkheid van de volgorde' enzovoorts).
Het mooist was in dit verband wel de onenigheid tussen Vincent en Paul, die doordat ze elkaar wilden overtuigen, het essentiële van hun aanpak scherp probeerden te verwoorden.

Vincent: *Je moet het om en om doen, maar dan iedere keer naar de andere kant van de één.*
Paul: *Nee, je gaat gewoon eerst een eind de ene kant op en dan terug.*
Leraar: *En hoeveel sprongen gebruikt ieder van jullie?*

Tijdens een nagesprekje de volgende ochtend zei Peter dat je toch 'gewoon net zo lang OP1 kon doen tot je één verder was dan de tafel van zeven?!'.
Over nadenken gesproken!
Overigens had geen enkele leerling moeite met de 'negatieve getallen'. De min van '-3' was voor hen 'bijna natuurlijk' een andere min dan de min van 'min 7'. Anders gezegd: door het gebruik van deze opgave en de machine maakten de leerlingen een onderscheid tussen de ordeningsmin en de operatormin.

Opgave 4

> ***Dat is geheimzinnig!***
> Manon en Maarten hadden niet zo veel zin in rekenen. Ze besloten daarom zichzelf een makkelijke opgave te geven.
> Zij kozen voor OP1 plus 3 en voor OP2 gedeeld door 8.
> Vervolgens toetsten zij als begingetal de 1 in en daarna telkens
> $\boxed{\text{OP1}}$ $\boxed{\text{OP2}}$ $\boxed{\text{OP1}}$ $\boxed{\text{OP2}}$ enzovoort.
>
> Maar toen ontdekten zij iets geks!
> a. Probeer eens uit te zoeken wat ze ontdekten.
> b. "Zullen we het ook eens met een ander begingetal proberen?", stelde Manon voor.
> c. Wat zullen Maarten en Manon dan ontdekken? Zoek dat ook maar uit.
> d. Robert en Diana wilden wel eens zien wat er gebeurde als ze voor OP1 plus 5 en voor OP2 gedeeld door 3 kozen.
> e. Wat krijgen zij als ze beginnen met 1 en daarna telkens $\boxed{\text{OP1}}$ $\boxed{\text{OP2}}$ intoetsen?

De leerlingen 'ontdekten' veel zoals uit hun uitspraken blijkt:
- Het hoeveelheidsgetal is weg.
- Hij gaat heen en weer (steeds dezelfde).
- De cijfers achter de komma veranderen niet.
- Hij heeft het eindgetal bereikt.
- Weer gaat hij heen en weer.
- Eerst 0, dan 2; 7; 2.33333 enz. dus steeds het getal +5 en dan gedeeld door 3, eindgetal is: 2.5, 7.5, 2.5, 7.5 enzovoort.

Het past bij het niveau van brugklassers dat velen tevreden zijn met een verklaring als:
'Maakt niet uit welk getal je neemt, als je steeds verschillende getallen neemt, maar wel steeds + of hetzelfde; en door hetzelfde deelt komt er uiteindelijk steeds hetzelfde getal uit'.
of
'Dat is nogal wiedes, als je 5 optelt bij 2,5 krijg je 7,5, en als je dat deelt door 3 krijg je weer 2,5'.
En na enig denken: '*...maar hoe je bij die 2,5 komt dat weet ik niet*'.
En daarmee waren deze leerlingen tevreden. Zal dat ook zo zijn bij tweede klassers, of vierde klassers, of bij u?

Maakt deze rekenmachineopgave u – de lezer – net zo leergierig als de leerlingen uit het volgende gesprekje op maandag 13 december j.l.? Of legt u de rekenmachine al opzij en voert u de opdracht uit zonder echt te gaan rekenen? Misschien gebruikt u als startgetal wel een letter en krijgt u

$$\frac{\frac{x+5}{3}+5}{3}$$

ofwel: $x.3^{-n} + 5.3^{-n} + 5.3^{-n+1} + 5.3^{n+2} + ...$
Maar hoe zet u het gesprekje voort met de leerlingen 1, 2, 3......?

Docent: *Wat hebben jullie ontdekt?*
Leerlingen: *Hij springt steeds op en neer tussen dezelfde!*
Leerling 1: *Maar als je nu met een ander getal begint?*
Docent: *Dat kun je zelf onderzoeken, probeer maar eens.*
Leerling 2: *Maar dan wil ik wel zelf kiezen!*
Leerling 3: *Ik wil ook zelf een getal kiezen!*

Ze hebben echter wél de docent nodig om 'wiskundig' dieper te graven en zo via hun doe en denkwerk tot 'inzichten' te komen. De rol van het klassegesprek daarbij is erg groot. Hierover zal te zijnertijd een apart artikel geschreven worden.

Slotopmerking

Het valt op dat kortstondige, weinig tijd vergende 'uitdagingen' sommige leerlingen inspireren tot langdurig nadenken, proberen, verder nadenken. Een opgave als 'veeguit' lijkt in het begin veel tijd te vragen en is daardoor minder uitdagend zonder de extra vraag naar een snelle 'oplossingmethode' Tijdens een proef op een lerarenopleiding vroeg een docent of je het ook eerst met minder cijfers mocht proberen. Een brugklasser die met dat idee zou komen zou ons inziens een zoen op beide wangen verdienen.

Noten

[1] F.J. van den Brink (1990). W12-16. ZakRekenMachines. Een serie experimentele werkbladen. *Nieuwe Wiskrant 10* (2), 34-40.
F.J. van den Brink (1992). W12-16 ZakRekenMachines. Goede bedoelingen en voorlopige keuzes. *Nieu-*

we Wiskrant 11 (3), 14-22.
[2] Het materiaal van het team W12-16 waar hier op gedoeld wordt zijn de pakketjes ZakRekenMachines klas 1, klas 2, klas 3.
[3] H. Broekman, W. Vermeulen (1989). Rekenhulp of rekentuig? *Euclides 65*, 90-92.
[4] In ons reken-wiskunde onderwijs hebben we behoefte aan opgaven die een duidelijke opbouw en doorgaande lijnen in het programma waarborgen. Daarnaast of liever gezegd tegelijkertijd, is er behoefte aan opgaven die uitdagen, dwingen tot nadenken, discussie oproepen en daardoor inzichtverdedigend en uitbreidend werken.
[5] Het herhaaldelijk uitvoeren van dezelfde bewerking (zoals plus 5 of gedeeld door 3) kan zonder rekenmachine uitgevoerd worden. Iedere machine (zowel Casio, Texas Instruments) heeft de mogelijkheid om dit herhaald uitvoeren te verkorten. Op veel machines gebeurt dit door ++5 in te toetsen en daarna telkens 'is gelijk'. Twee bewerkingen verkort uitvoeren kan alleen op de TI Galaxy 40X. Op andere machines zal steeds +5 respectievelijk ÷3 ingetoetst moeten worden. In de tekst van de opgaven kan dan bijvoorbeeld geschreven worden: als eerste operator (OP1), kiezen we plus 5 en als tweede operator (OP2), kiezen we gedeeld door 3.
[6] De opgaven 2 en 3 waren:
Het Toversnoer
Een toversnoer is 10 meter lang. Elke dag wordt dit snoer twee keer zo lang. Na één dag is het dus 20 meter lang, na twee dagen is het 40 meter lang en na drie dagen 80 meter.
a. Hoe lang is het snoer na 5 dagen?
b. Als je wilt uitrekenen hoelang het snoer na 11 dagen is, is het handig om de $\boxed{\text{OP1}}$ toets te gebruiken. Stel de $\boxed{\text{OP1}}$ toets in en bereken daarmee de lengte van het snoer na 11 dagen.
c. Na hoeveel dagen kun je het snoer éénmaal om de aarde leggen?
Bedenk: De lengte van de evenaar is ongeveer 40.000 kilometer. Dat is dus één keer de aarde rond.
d. Hoe lang is het snoer dan precies?

Papiervouwkunst
a. Uitdaging: Neem een leeg vel papier voor je en probeer het tien keer dubbel te vouwen. Hoe vaak kun jij het?
Stel nu dat je een enorm groot vel papier hebt met een dikte van 0,01 cm.
b. Hoe dik wordt het papier als je het drie keer dubbelvouwt?
c. Vouw dit papier tien keer dubbel. Welke dikte krijg je dan? Hint: gebruik de toets $\boxed{\text{OP1}}$ en stel deze in op *maal 2*.
d. Stel je voor, dat je in staat bent het papier twintig keer dubbel te vouwen. Welke dikte zou je dan krijgen?

O, zit dat zo!?

Open brief aan prof. dr. J. van de Craats

Als opleiders aan de eerstegraadsopleidingen wiskunde in Tilburg en Utrecht reageren we op uw artikel in het vorige nummer van de Nieuwe Wiskrant. We willen ons niet laten verleiden tot een uitvoerige polemiek over uw (voor)oordelen, maar een paar zaken moeten ons toch van het hart. Zo verschillen we met u van mening over het nut van onderwijskunde en didactiek in een lerarenopleiding. U lijkt ook slecht op de hoogte van de huidige vakinhouden wiskunde aan de tweede- en eerstegraads opleidingen van de hogescholen. Uiteraard zijn wiskundige kennis en vaardigheden van niveau nodig om een goede wiskundeleraar te worden. Er zijn daarnaast andere vaardigheden die in de huidige lespraktijk van belang zijn. Een lerarenopleiding, zowel universitair als HBO, zal bijvoorbeeld ook veel aandacht behoren te geven aan de vertaling van vakinhoud naar schoolwiskunde, met daaraan gekoppeld didactische problemen en oplossingen binnen het onderwijs, een probleemoplossende houding, aandacht voor leerproblemen, ontwikkelingen in het voortgezet onderwijs, nieuwe technologieën.
De inzet en het enthousiasme voor wiskunde waarmee tweedegraads leraren zich vanuit hun baan in het onderwijs via onze eerstegraads deeltijdopleiding ontwikkeld hebben tot 'eerstegrader' zijn zo waardevol, dat we vinden dat uw inschatting van de situatie velen van hen tekort doet.
We nodigen u daarom graag uit met ons en met onze studenten van gedachten te wisselen. Goed wiskundeonderwijs is te belangrijk om de lerarenopleidingen, ten gevolge van misverstanden en feitelijke onjuistheden, in een verkeerd licht te (laten) zetten.
U bent van harte welkom.

Met vriendelijke groet,
Luc Kuijk, namens docenten/opleiders van de Hogeschool Katholieke Leergangen Tilburg
Peter Lorist, namens docenten/opleiders van de Hogeschool Midden Nederland.