

Meetkunde en Techniek

H.J. Smid

Technische Universiteit Delft

Ruimte meetkunde en Hewet

Toen in 1980 in het befaamde HEWET-rapport de invoering van een onderdeel ruimte meetkunde werd bepleit, werd als een van de argumenten daarvoor expliciet de noodzaak van een betere meetkundige vorming van aanstaande TU-studenten genoemd. Waarom dat zo hard nodig was, en wat die meetkundige vorming nu precies moest inhouden, werd uit het rapport niet zo heel erg duidelijk. Er waren deskundigen geraadpleegd, en de vermindering van de meetkundige vorming van de studenten was zelfs 'objectief waarneembaar' gebleken. Hoe dan ook, het onderdeel ruimte meetkunde werd zonder veel discussie of experimenten ingevoerd. Bij de concrete invulling speelden, naar mijn weten, de behoeften van de technische studies geen rol van betekenis. Evenmin werd naderhand nagegaan of de meetkundige vorming nu wel adequaat was – ook dat was immers misschien wel 'objectief waarneembaar' geweest!

Een nieuw programma en de techniek

Sinds enige tijd staat het wiskunde B-programma weer ter discussie, en daarmee ook het onderdeel ruimte meetkunde. Dat heropent de discussie rond de vraag of, en zo ja welke, meetkundige vorming ten behoeve van de technische opleidingen gewenst zou zijn. Met andere woorden: wat is er dan zo specifiek aan technische opleidingen, dat daarmee op het VWO rekening moet worden gehouden? Over die vraag hebben we het hier. Natuurlijk kun je van mening zijn dat zo'n vraag helemaal niet gesteld moet worden, dat een (wiskunde)programma vanuit andere doelen dan de belangen van de vervolgoopleidingen samengesteld moet worden. Ook al lijkt me die opvatting te ver gaan, natuurlijk is het wel zo dat bij het voortgezet onderwijs de belangen van het tertiair onderwijs nooit alleen het programma kunnen bepalen.

De hier boven geformuleerde vraag roept meteen een andere op: wat bedoelen we in dit verband eigenlijk met technische opleidingen? Alle studierichtingen aan de drie Technische Universiteiten? Vast niet. Studierichtingen als Toegepaste Onderwijskunde (aan de Universiteit

Twente) of Technische Wiskunde (bij alle drie) zijn niet 'technisch' in de gebruikelijke zin van het woord. Sommige andere studierichtingen, zoals Scheikundige Technologie of Elektrotechniek, zijn wel degelijk echt technisch – het gaat om het bouwen van chemische fabrieken tot het bakken van chips – maar meetkunde speelt in dit soort opleidingen evenmin een rol van betekenis als in de vergelijkbare meer fundamenteel gerichte studierichtingen aan de algemene universiteiten. Bij de combinatie technische vakken en meetkunde zal wel gedacht zijn aan die studierichtingen waar van oudsher studenten achter grote tekenafels echte tekeningen maakten. Het soort opleidingen kortom die L.E.J. Brouwer tot zijn bekende weigering van een Delfts professoraat inspireerden met de opmerking dat hij er geen behoefte aan had hoofd van een tekenkamer te worden. Het gaat dan om de studierichtingen Bouwkunde, Civiele Techniek, Industrieel Ontwerpen, Werktuigbouwkunde en Lucht- en Ruimtevaart Techniek. Studierichtingen die onderling sterk van karakter verschillen, maar die één kenmerk gemeen hebben: er wordt getekend. Het zijn grote opleidingen, die in Delft ongeveer tweederde van het aantal eerstejaars omvatten. Die verhoudingen liggen in Eindhoven en Enschede iets anders, omdat een aantal van de bovengenoemde studierichtingen alleen in Delft bestaat. Laten we zeggen dat ruim de helft van de eerstejaars aan de Technische Universiteiten zo'n studierichting heeft gekozen. We hebben het dan over zo'n drie- tot vierduizend eerstejaars. Even ter vergelijking: in 1993 deden ruim 18.000 leerlingen eindexamen wiskunde B.

Technische studies en meetkunde

Wat wordt er in dit soort studierichtingen nu aan meetkunde gedaan? Natuurlijk kun je stellen dat bij deze studierichtingen meetkundige vorming bij alle onderdelen van belang is, gezien het 'construerend' karakter van deze studierichtingen. Maar als we het zo algemeen houden, kunnen we verder niet veel zinnigs zeggen. Volgens dit soort redeneringen zijn al gauw heel veel vakken van belang. Het lijkt me daarom beter meer concreet naar de inhoud van vakken te kijken waar meetkunde een rol

speelt.

Het eerste wat dan opvalt, is dat we niet moeten kijken naar de vakken die als service-onderwijs vanuit de wiskunde vakgroepen worden gegeven. Dat soort onderwijs bevat, op een enkele uitzondering na, vrijwel geen meetkunde. Dat was niet altijd zo. Tot het begin van de zestiger jaren werd er door wiskundigen op uitgebreide schaal beschrijvende en analytische meetkunde gegeven. De beschrijvende meetkunde was voor een deel herhaling, voor een deel uitbreiding van de H.B.S. B-stof. Met het wegvallen in 1961 van de beschrijvende meetkunde op de H.B.S. is dat onderwijs grotendeels verdwenen. Kennelijk was de beschrijvende meetkunde toch niet zó essentieel voor ingenieurs als altijd beweerd werd. De analytische meetkunde werd als regel gecombineerd met de lineaire algebra. Maar binnen de lineaire algebra liggen tegenwoordig de accenten meestal anders. Veel meetkunde komt daar niet meer bij te pas. Wiskundigen geven aan de Technische Universiteiten van allerlei moois: analyse, lineaire algebra, discrete wiskunde, statistiek, maar vrijwel geen meetkunde, laat staan tekenen. Brouwer zou een benoeming nu rustig kunnen aanvaarden.

Toch bestaat op de 'construerende' faculteiten het technisch tekenonderwijs nog steeds. Het heet dan technisch tekenen, of projectie-leer of, heel modern, ruimtelijk inzicht en computergebruik. Soms is het ook een onderdeel van een vak waar je het niet zou gauw bij zou zoeken, zoals bij 'Ontwerpen van technische inrichtingen', bij de faculteit Werktuigbouwkunde. De vraag is nu wat dit soort vakken inhouden, en in welke mate kennis van meetkunde hierbij een rol speelt.

Aanzichten, projecties en perspectief

Een essentieel element bij al deze vakken is het leren tekenen van aanzichten in drie coördinaatvlakken van driedimensionale objecten. Men leert volgens welke conventies die aanzichten getekend moeten worden en daarbij komen de allereerste beginselen van de beschrijvende meetkunde aan de orde. Soms wordt bijvoorbeeld geleerd hoe je uit de aanzichten kunt afleiden of twee lijnen elkaar in de ruimte kruisen of snijden. Het geheel aan theorie is niet meer dan de paar eerste paragrafen uit een oud beschrijvende meetkunde-boekje voor de H.B.S. B. Het verschil is dat de objecten die getekend moeten worden direct ontleend zijn aan de beroepssfeer van de toekomstige ingenieur. Verder wordt er aandacht besteed aan het tekenen volgens zogenaamde normbladen van het Nederlands Normalisatie Instituut, waarin allerlei regels zijn vastgelegd omtrent de praktische uitvoering van een tekening. Studenten moeten, meestal op practicum-zittingen, een aantal van dit soort tekenopdrachten uitvoeren. Veel kennis van meetkunde is daar niet voor nodig. Voor wat betreft Werktuigbouwkunde en Lucht- en Ruimtevaarttechniek blijft het hier wel bij. Bij de faculteiten Bouwkunde, Civiele Techniek en Industrieel Ont-

werpen wordt ook aandacht besteed aan de zogenaamde 'presentatietekening'. Daarmee wordt bedoeld een tekening of schets door middel van een projectie-figuur of in perspectief, waarmee een indruk kan worden gegeven van het ontwerp. Zo'n figuur is er meestal voor om derden – opdrachtgevers, geïnteresseerden – een idee te geven van het ontwerp. Voor de technische realisatie hebben dit soort tekeningen geen betekenis. Ook bij het maken van presentatietekeningen komt weinig theorie te pas, al is die natuurlijk wel impliciet aanwezig. Maar de student hoeft daar niet zo veel van te weten. Het beheersen van een aantal 'tekeningstrucs' en het kennen van een aantal conventies is in principe voldoende om de oefeningen te kunnen doen. Figuur 1, een opgave uit een practicum van de faculteit Civiele Techniek, geeft een indruk van het soort opgaven.

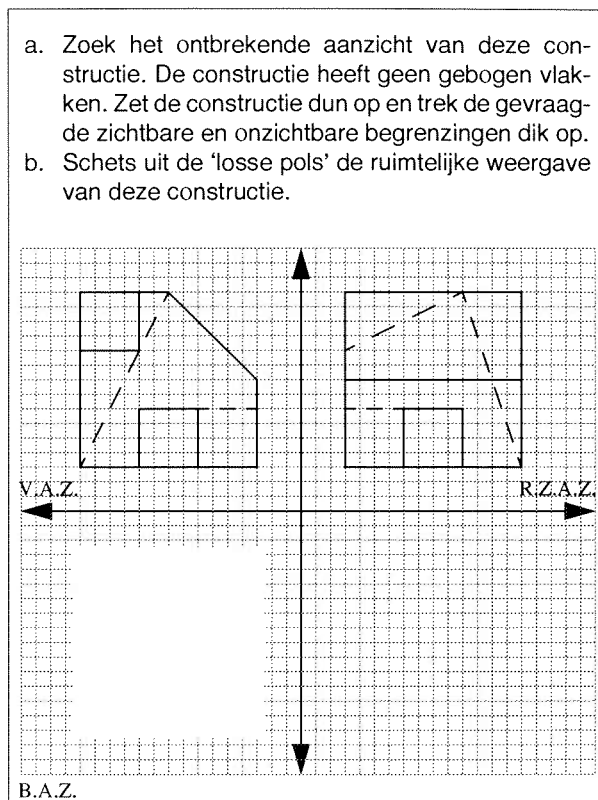


fig. 1: Opgave van de faculteit Civiele Techniek

Bij Werktuigbouwkunde is het allemaal wat technischer, wat meer op apparaten gericht.

Figuur 2, een voorbeeld uit een practicum-handleiding voor Werktuigbouwkunde, geeft een projectietekening en een aanzicht van een machine-onderdeel. Dit soort aanzichten leren studenten werktuigbouwkunde nog steeds met de hand op een tekentafel maken. De term 'NEN....' slaat op het hanteren van bepaalde Nederlandse normen, het symbooltje rechtsonder met de vermelding NEN 2351 geeft aan dat van de Amerikaanse projectie gebruik is gemaakt.

Ruimtelijk inzicht

Als je met docenten van deze vakken over hun onderwijs praat, komt daarbij altijd de kwestie van het ruimtelijk inzicht ter sprake. Waar het om gaat is dat studenten van drie-dimensionale objecten de aanzichten kunnen tekenen en zich bij gegeven aanzichten een drie-dimensionaal object kunnen voorstellen. Bij zo'n oefening in het tekenen van aanzichten wordt het object zelf als regel natuurlijk in een projectiefiguur of perspectieftekening aangeboden – het is niet zo eenvoudig vliegtuigmotoren of sluisdeuren naar een tekenzaal mee te nemen. (Bij Bouwkunde gaat men wel op lokatie tekenen.) Waar het dus bij dat ruimtelijk inzicht om gaat is dat men zich bij een gegeven projectiefiguur of perspectieftekening het betreffende object kan voorstellen en vervolgens de aanzichten volgens de geldende conventies kan tekenen. Bij gegeven aanzichten moet men zich ook het object kunnen voorstellen en bij sommige studierichtingen een presentatietekening daarvan kunnen maken. Daarvoor is, behalve een beetje kennis, vooral van belang dat studenten 'leren kijken', zoals een docent technisch tekenen tegen mij zei.

Voor dat doel is het beoefenen van vectormeetkunde niet nodig, en misschien zelfs wel contra-productief. De huidige ruimtemeetkunde – in ieder geval de eindexamensommen die ik liet zien – roept bij docenten weliswaar geen bezwaren, maar ook weinig enthousiasme op. De tekeningen zijn altijd in standaard scheve projectie voorgetekend, en de nadruk ligt vooral op het uitrekenen van dingen als hoeken en afstanden. Voor een ingenieur is de ruimtemeetkunde een wat kunstmatig en gezocht geheel, waar hij niet zo veel aan heeft. Wat wel enthousiasme oproept zijn de hoofdstukken in de nieuwe brugklasdelen rond het thema 'kijkmeetkunde', en dan vooral de aandacht voor aanzichten en projecties. De docenten met wie ik sprak hadden het gevoel dat op die manier misschien wel een goede intuïtieve basis gelegd zou kunnen worden waar men later op zou kunnen voortbouwen. Overigens is misschien het lezen van Lego-bouwtekeningen op nog jongere leeftijd voor dat doel wel even nuttig!

Het ligt voor de hand te veronderstellen dat het 'leren kijken', het oefenen in ruimtelijk inzicht, ook via CAD-practica gedaan kan worden. Dat gebeurt inmiddels ook. Behalve echte CAD-ontwerp practica zijn er bij verschillende faculteiten ook CAD-achtige programma's waarmee het werken met aanzichten geoefend kan worden. Bij gegeven projectiefiguren moeten aanzichten ingetekend worden en bij gegeven aanzichten moeten de betreffende vlakdelen in een perspectieftekening worden 'aangeklikt'. Via dit soort programma's kan heel effectief aan dat befaamde ruimtelijk inzicht gewerkt worden. Door verschillende oorzaken, zoals de noodzaak het curriculum in vier jaar te programmeren, de noodzaak om aandacht te besteden aan modernere ontwikkelingen in het vakgebied en de komst van CAD-programma's is de

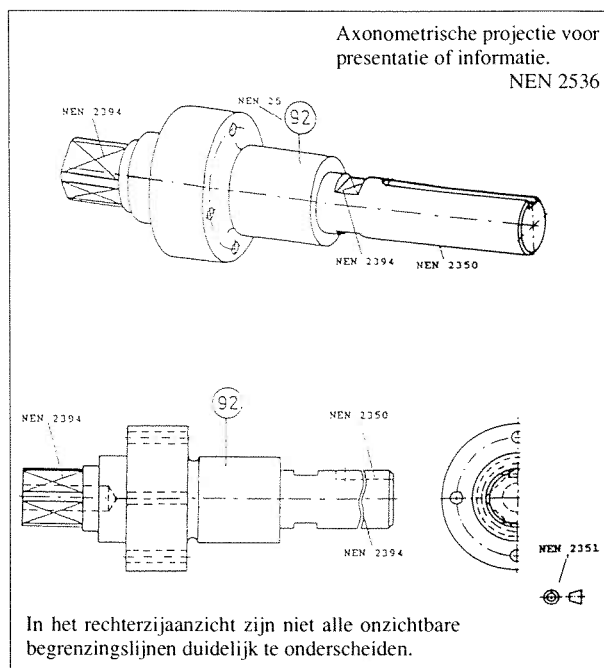


fig. 2: Uit een practicumhandleiding voor Werktuigbouwkunde

Bij een faculteit als Industrieel Ontwerpen is ook de presentatietekening van groot belang.

Figuur 3 toont een opdracht uit een dictaat waarbij van projectie-figuren een perspectieftekening moet worden gemaakt. Wiskunde komt aan het maken van dit soort tekeningen niet te pas.

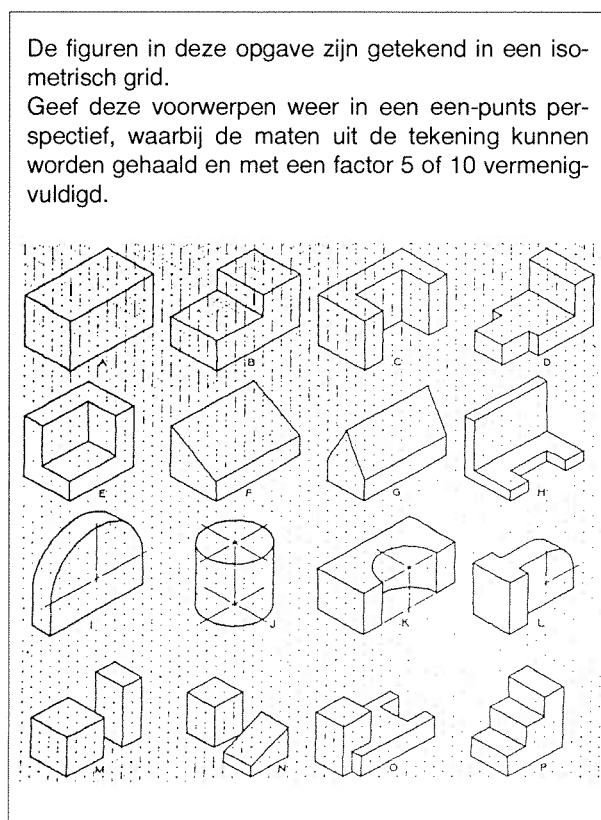


fig. 3: Opgave van de faculteit Industrieel Ontwerpen

ruimte voor technisch tekenen, en zeker de aandacht voor de meetkunde daarachter, in de afgelopen decennia duidelijk minder geworden. Er wordt nog steeds getekend in Delft, maar heel wat tekenzalen hebben tegenwoordig een andere bestemming gekregen.

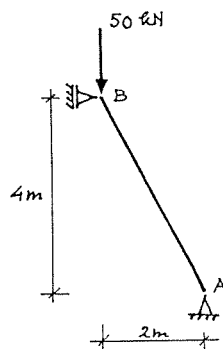
Planimetrie en kegelsneden

Er is nog wel een ander aspect van meetkundige vorming dat bij het tekenonderwijs een rol speelt. Dat heeft geen betrekking op ruimtemeetkunde, maar op vlakke meetkunde. Voor zover er binnen tekeningen gerekend wordt, gebeurt dat in de aanzichten. Om dat vlot te kunnen, is het van belang om een beperkt stukje planimetrie goed te beheersen. Congruenties en gelijkvormigheden, bijzondere verhoudingen in rechthoekige driehoeken, eigenschappen van zwaartelijnen (zwaartepunt!) en hoogtelijnen vormen nuttige kennis.

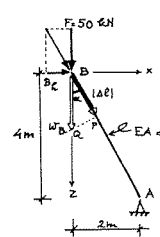
Figuur 4 geeft een voorbeeld van een tentamenopgave uit het vak 'mechanica van constructies'.

Onderstaande staaf AB is opgelegd op een scharnier in A en een verticale rol in B. De staaf wordt in B belast door een verticale kracht van 50 kN. De rekstijfheid van de staaf is $EA = 43 \text{ MN}$.

Bereken de zakking van B.



Uitwerking:



$\text{oplegreactie } B_y = 25 \text{ kN}$
 $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$
 $N = -\frac{F}{\cos \alpha} = -\frac{1}{2} F \sqrt{5} = -25\sqrt{5} \text{ kN}$
 $\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{-25\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{43 \cdot 10^3} = -5,81 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
 $w_B = \frac{|\Delta l|}{\cos \alpha} = \frac{1}{2} |\Delta l| \sqrt{5} = \frac{1}{2} \sqrt{5} \cdot 5,81 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
 $w_B = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 6,5 \text{ mm}$

(PQ is de verplaatsing van B ten gevolge van het zwaaien om A.)

fig. 4: Tentamenopgave Civiele Techniek

Daarnaast is enige kennis van kegelsneden handig, al was het maar om aan de vergelijking te kunnen zien of men met een hyperbool of ellips van doen heeft. Kennis van kegelsneden speelt bijvoorbeeld bij analyse een rol. Deze opgave moet in ongeveer vijftien minuten gemaakt kunnen worden. De benodigde meetkunde is heel simpel, maar het zal duidelijk zijn dat wie niet snel planimetrisch kan rekenen in problemen komt – afgezien van de benodigde mechanica-kennis.

Integratie over oppervlakken in de \mathbb{R}^3 gaat meestal over kwadrieken. Kwadrieken worden binnen de lineaire algebra niet meer systematisch behandeld. Docenten hanteren dan als strategie om even naar de snijfiguren met de coördinaatvlakken te kijken. Als de bijbehorende vergelijkingen niet worden herkend, helpt dat niet veel.

Samenvatting en conclusies

Laat ik het geheel eens samenvatten. Waar behoefte aan bestaat is een beperkt planimetrisch repertoire, dat goed beheerst wordt, en een goed ontwikkeld ruimtelijk inzicht. Verder is de behoefte aan meetkunde niet zo groot. Het is misschien vanuit de wiskunde bezien wel aardig, maar vanuit de Technische Universiteiten bezien zeker niet nodig diep in te gaan op de theorie achter projecties en perspectief. De huidige ruimtemeetkunde doet weinig kwaad, maar je kunt niet zeggen dat die 'in een behoefte voorziet' – die behoefte is er niet zo. Uitbreiding van de ruimtemeetkunde ten koste van andere mogelijkheden kan dan ook niet met een beroep op de 'techniek' gemotiveerd worden. Wel kan men op die gronden het verleggen van accenten naar meer tekenwerk bepleiten.

Het is voor mij echter de vraag of je, gezien de beperkte mate waarin meetkunde een rol speelt op de Technische Universiteiten, de komst van CAD-practica, en de intuïtieve basis die nu in de onderbouw voor het ruimtelijk inzicht gelegd wordt, wel voor het wiskunde-programma in de bovenbouw van het VWO argumenten voor meetkunde aan de technische studies moet ontleen. Ik vermoed dat het zelfde geldt voor de wereld van het technisch HBO. Ook daar zat men vermoedelijk niet echt te wachten op het zware accent op de ruimtemeetkunde in het HAVO B-programma.

Weg met de ruimtemeetkunde in de bovenbouw dan maar weer? Dat is misschien wat te simpel geredeneerd. Wel zou ik benieuwd zijn welke argumenten pro-ruimtemeetkunde dan wel aangevoerd kunnen worden, en vooral, waarom aan ruimtemeetkunde de voorkeur boven andere mogelijkheden gegeven zou moeten worden. De 'technische studies' hoeven daarbij wat mij betreft niet als argument voor meetkunde aangevoerd te worden.

Harm Jan Smid is sinds 1981 werkzaam aan de TU Delft. Hij is betrokken bij de universitaire lerarenopleiding en verzorgt het eerstejaars en tweedejaars serviceonderwijs wiskunde.