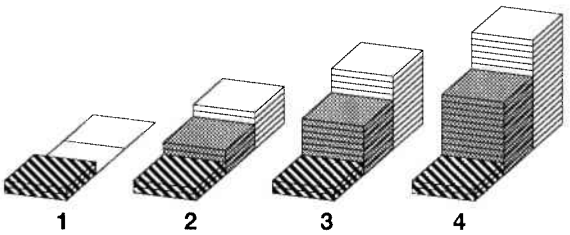
Formules en variabelen in Context

M. van Reeuwijk / M. Wijers
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

Inleiding

Hieronder zie je vier groepen tegels.

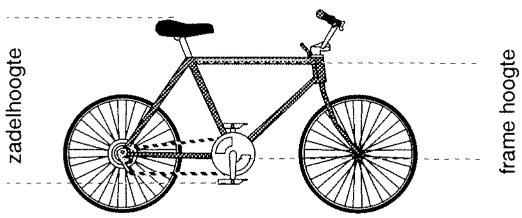


1. Hoe ziet de vijfde groep eruit?
   Hoeveel tegels heeft die groep?
2. Geef een regel of een formule om te beschrijven hoeveel witte tegels je hebt als je het nummer van de groep weet.
3. Geef ook een regel of formule om te beschrijven hoeveel tegels je in totaal hebt als je het nummer van de groep weet.

Bovenstaande opgave is gebruikt in een toets bij het pakketje *Building Formulas*, een algebra-pakketje in het Mathematics in Context project[1]. Building Formulas is een pakketje voor leerlingen van ongeveer twaalf jaar (grade 7). Het is een pakketje uit de algebralijn en het zelf maken van formules staat centraal. In dit artikel laten we wat zien van de ervaringen in een Amerikaanse klas met het eerste deel van dit pakketje. We gebruiken ook leerlingenresultaten van de toets die is afgenomen. Maar eerst geven we een overzicht van wat aan Building Formulas voorafgaat.

Zien en gebruiken

In grades 5 en 6 hebben de leerlingen al allerlei formules en expressies gezien en gebruikt. In *Patterns & Symbols* (het eerste pakketje van de algebralijn) wordt een symbolentaal ontwikkeld[2]. *Expressions & Formulas* is het volgende pakketje waarin verschillende notatievormen voor formules aan de orde komen.



De passende zadelhoogte kan met de volgende formule berekend worden:

beenlengte × 1.08 = zadelhoogte

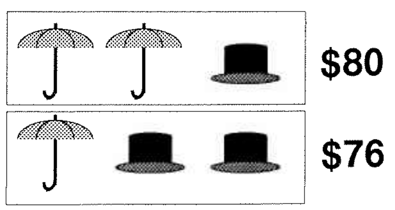
1. Schrijf de formule in pijlentaal.

De regel voor het berekenen van de frame hoogte is:

$$\text{beenlengte} \xrightarrow{\times 0.66} \ldots\ldots \xrightarrow{+2} \text{framehoogte}$$

2. Schrijf dit als een woord-formule.

In Expressions & Formulas zijn formules meestal geformaliseerde rekenvoorschriften. Deze worden eerst genoteerd in pijlentaal (zie hierboven), een notatievorm die ook bij het rekenen is gebruikt. Later in dit pakketje wordt een overgang gemaakt naar woordformules.
Het gebruik van letters in plaats van woorden wordt expliciet geïntroduceerd in het pakketje *Comparing Quantities*. Ervaringen uit de klas met dit pakket zijn beschreven in het artikel 'Kijk en vergelijk' van Mieke Abels, elders in dit nummer. Het gaat in Comparing Quantities om informele strategieën voor het oplossen van (stelsels) lineaire vergelijkingen. Tekeningen spelen aanvankelijk een belangrijke rol.



1. Wat is duurder, een hoed of een paraplu?
2. Hoeveel kost een hoed? En een paraplu?

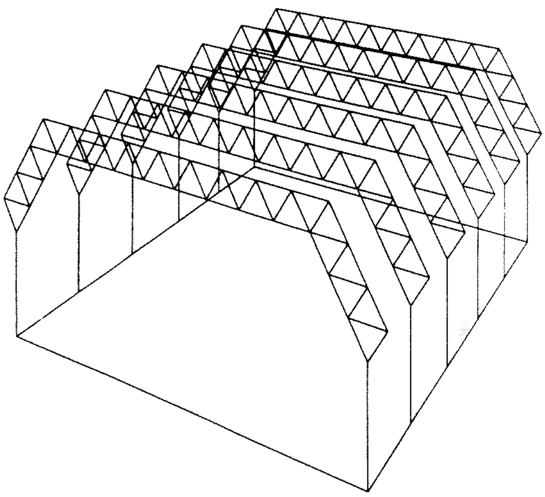
Later worden op een heel natuurlijke wijze letters als af-

kortingen gebruikt, zoals P voor paraplu. In de expressie $2P + H = 80$ kunnen de P en H afkortingen zijn voor de objecten zelf, maar ze kunnen ook staan voor de waarde van de objecten (zoals de prijs). Formeel gesproken moet je zeggen: twee maal de prijs van een paraplu + één maal de prijs van een hoed = 80 dollar.
Maar een meer natuurlijke interpretatie is: twee paraplu's en een hoed kosten samen 80 dollar.
Het blijkt uit ervaringen in de klas dat deze dubbele betekenis van de letter – afkorting en waarde – voor leerlingen niet verwarrend hoeft te zijn. Ze kunnen goed omgaan met de verschillende verschijningsvormen omdat de context houvast geeft.

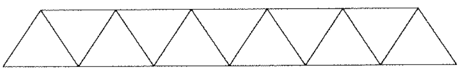
Beschrijven en bouwen

In Building Formulas wordt voortgebouwd op wat er in Expressions & Formulas en Comparing Quantities aan formules en expressies is gedaan. In het eerste deel gaan leerlingen regelmaat beschrijven met behulp van formules. Ze bouwen als het ware zelf de formules op.

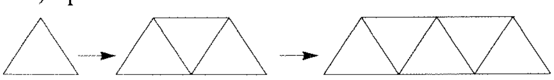
Hieronder zie je een plaatje van een hal in aanbouw.
De hal bestaat uit spanten die rusten op pilaren.



Elke spant is opgebouwd uit stangen.
De spanten kunnen verschillende lengtes hebben.
De lengte van een spant is het aantal stangen aan de onderkant van een spant.

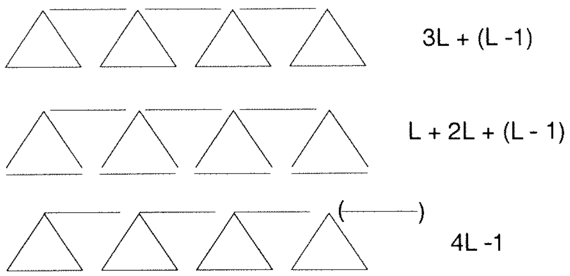


Deze context geeft aanleiding tot de vraag hoeveel stangen een spant heeft. Twee soorten formules krijgen aandacht. Vanuit een tabel ligt het voor de hand een recurrente betrekking ('next-current formula' in het Amerikaans) op te stellen.



next aantal stangen = *current* aantal stangen + 4

Redenerend vanuit het patroon van de constructie van de spanten komt ook de relatie tussen L(engte) van een spant en het aantal stangen in beeld.
In de klas blijkt dat verschillende leerlingen verschillende formules maken.
Een groepje leerlingen vond als formule $L \times 3 + L - 1$. Hun uitleg hierbij was: 'Bij de lengte L horen L driehoeken, en dan nog $L - 1$ stangen voor de bovenkant.'
Een andere leerling liet zien hoe ze het aantal stangen had gevonden voor een spant met lengte 8: '8 stangen aan de onderkant, 7 aan de bovenkant en 8×2 er tussen.' In een formule schreef ze $L + L - 1 + L \times 2$.
Weer een andere leerling gebruikte de tabel en bedacht $L \times 2 \times 2$. Hij probeerde of de formule werkte en ontdekte dat je er nog één van af moest halen. Hij verbeterde zijn formule tot $L \times 2 \times 2 - 1$.



Wiskundig gezien zijn we geneigd een formule zo kort mogelijk te schrijven, waarbij de relatie tussen het patroon en de bijbehorende formule niet meer zichtbaar hoeft te zijn. In de structuur van de formules van de leerlingen wordt zichtbaar wat voor structuur ze in het patroon zien.

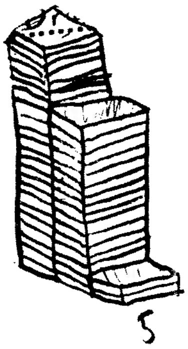
Een klassegesprek over de verschillende formules geeft aanleiding tot het ontdekken en verklaren van de equivalentie van de formules. Dit kan op verschillende niveaus:

- redenerend vanuit de context, 'ze passen bij hetzelfde patroon'
- proberend in een paar concrete gevallen, 'er komt hetzelfde uit', hierbij hoort wel de vraag 'weet je nu zeker dat het altijd zo is?'
- formeel redenerend, gebruik makend van de regels voor het optellen van gelijksoortige termen en het werken met haakjes, die al voorkwamen in de pakketjes Expressions & Formulas en Comparing Quantities.

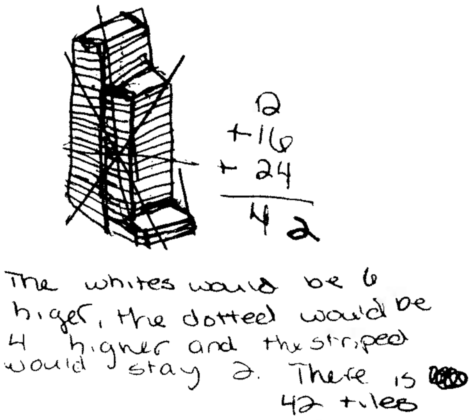
Toetsen

De eerste opgave van de toets (zie het begin van dit artikel) sluit direct aan op het eerste deel van het pakketje. Er wordt getoetst in hoeverre de leerlingen in staat zijn om de regelmaat uit te drukken in een formule.
De eerste vraag bestaat uit twee delen.
Eerst wordt gevraagd om te beschrijven hoe de vijfde groep eruit ziet. Leerlingen doen dit op verschillende

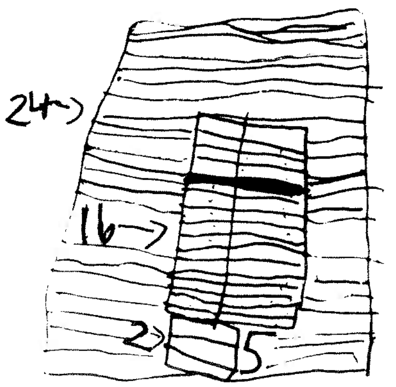
manieren. Omdat de stapels tegels lastig te tekenen zijn, volstaan de meeste leerlingen niet met een tekening van de vijfde groep. Het is niet zo eenvoudig om een stapel te tekenen met 16 of 24 tegels. Veel leerlingen voegen dan ook iets toe: ze schrijven de aantallen tegels in elke stapel of beschrijven hoe hun tekening in elkaar zit.



Deze leerling maakt een goede tekening van de vijfde groep. Om dat te controleren moet je wel de tegels natellen.



De leerling hierboven heeft de tekening doorgestreept en geeft de aantallen per stapel en ook nog eens een beschrijving gebaseerd op de aantallen in de vierde groep. Een bijzondere tekening is de volgende. Deze leerling heeft een eigen manier gevonden om de stapels – die achter elkaar staan – te tekenen. Voor de duidelijkheid heeft ze er ook de getallen nog bij gezet.



Andere leerlingen maken geen tekeningen maar houden het bij een beschrijving van de stapels. Sommige leerlingen gebruiken de 'kleuren' van de tegels, anderen de positie van de drie stapels.

'There would be 2 striped tile at the bottom, then 16 spotted tile, then there would be 24 plain tile. TOTAL TILE IN #5 = 42 tiles.'

'It would be 2 in the front, 16 in the middle, and 24 in the back.'

Een enkele leerling maakt gebruik van de stapels in de vierde groep.

'It would have 2 more gray than 4, and red would be 4 more than #4, and strips would be the same.'

Een leuke beschrijving van de vijfde groep is de volgende:

'Group 5 would have 2's, 16's, 24's.'

Een derde groep leerlingen heeft een tabelletje gemaakt waarin op systematische wijze de aantallen tegels per groep (elke groep drie stapels) wordt bijgehouden. Het is niet altijd duidelijk of de tabel al bij vraag 1 is gemaakt, want ook voor de vragen 2 en 3 is een tabel handig te gebruiken.

Group number	Black	Grey	White	Total
1	2	0	0	2
2	2	4	6	12
3	2	8	12	22
4	2	12	18	32

Om het totaal aantal tegels te vinden in de vijfde groep zie je veel sommetjes in het leerlingenwerk: 2 + 16 + 24.

Bij vraag 2 en 3 wordt gevraagd naar formules. Het valt op dat ongeveer de helft van de leerlingen bij vraag 2 een recurrente betrekking geeft. Dat kan liggen aan de opeenvolging van de vragen. Bij vraag 1 ligt het voor de hand om het aantal tegels van de vijfde groep te vinden door te kijken hoeveel tegels er steeds bijkomen als je van een groep naar de volgende gaat.

Een aantal leerlingen geeft geen kort genoteerde formule maar een beschrijving van de regel in woorden. Soms wordt de next-current relatie beschreven:

'It has to go up by 6'.

Soms de directe relatie:

'You subtract one from the pattern number then multiply by 6'.

Een hele bijzondere is:

'You take 2 × 3 × the number before the group number'.

Tenslotte zijn er de leerlingen die een 'directe' formule geven waarin de relatie tussen groepnummer en aantal (witte) tegels wordt uitgedrukt. Er komen twee verschillende formules voor. Kort genoteerd zijn dit:

$G \times 6 - 6 = W$ en $(G - 1) \times 6 = W$

Welke formule een leerling vindt, hangt af van de regelmaat die hij of zij ontdekt. Hierbij speelt de getalsmatige structuur een belangrijkere rol dan de visuele 'patroonstructuur'. Het is interessant te zien dat een aantal leerlingen de letters die ze in de formule gebruiken verklaart. In andere woorden: deze leerlingen declareren hun variabelen. De variabelen die ze gebruiken hebben betekenis in de context. Het zijn vaak de eerste letters van de woorden waarover het gaat:
G = Group #
W = White
T = Total
TW = 6 × (G – 1)

In het pakketje Building Formulas is veel ruimte gelaten voor het gebruiken van een eigen notatiewijze van formules. Ook op de toets vinden we een grote variatie in de wijze waarop de leerlingen de formules noteren: met woorden, met letters, een combinatie van deze twee, het =-teken voorin de formule of op het eind, enzovoorts.

Antwoorden van leerlingen op vraag 2 zijn:

$(G-1)\times 6=W$

(6 × Group #) − (6) = total white

$G\times 6-6=W$
or
group number × 6 − 6 = White tiles

Antwoorden op vraag 3:

$G\times 10-8=T$

$T=(n-1)\times 10+2=$

$T=10\times g-8=$

$T=2+(P-1\times 6)+(P-1\times 4)$

$((G-1)\times 6)+((G-1)\times 4)+2=T$

(6 × Group # − 6) + (4 × Group − 4) + (2)
= total # Tiles

De voorbeelden hierboven laten zien dat de leerlingen de algebraïsche notatie gebruiken op een manier die voor hen zinnig is.

Terugblikken

De besproken toetsvraag is goed gemaakt. Leerlingen hebben laten zien dat ze na het eerste deel van het pakketje in staat zijn regelmaat uit te drukken in een regel of formule. In deze tussentoets is nog niet gevraagd naar de equivalentie van formules. Dit zou bij een bespreking van de toetsresultaten aandacht kunnen krijgen.

In de algebralijn wordt de stap naar formeel manipuleren met formules langzaam gemaakt. Aanvankelijk, zoals in Building Formulas, biedt de context steeds steun. De stap naar een hoger abstractie niveau wordt hier weliswaar geleidelijk gemaakt, maar leerlingen kunnen altijd terugvallen op een lager contextgebonden niveau.

We hebben nu een aantal algebra-pakketjes uitgeprobeerd in de USA. Voorzichtig durven we al een voorlopige conclusie te trekken.
Deze aanpak van de algebra heeft succes. Het spreekt de leerlingen meer aan dan het traditionele Amerikaanse algebra onderwijs. Het wordt duidelijk dat algebra niet langer gezien hoeft te worden als een abstract gegoochel met onbegrepen formules, maar als iets dat betekenis heeft en soms erg handig is. Algebra wordt bereikbaarder voor alle leerlingen en hoeft niet alleen toegankelijk te zijn voor de happy few.

Noten

[1] Zie M. van Reeuwijk (1993). Het Middle School Project in kaart gebracht. *Nieuwe Wiskrant, 13* (2), 22-28. Hierin wordt een globale beschrijving van het Mathematics in Context project gegeven.
Ontwerpers van Building Formulas zijn Anton Roodhardt en Monica Wijers.
De opgave is een bewerking van een opgave uit een eerste versie het W12-16 pakketje *Dubbel Op*.

[2] Zie ook A. Roodhardt (1993). Een ander begin van de algebra. *Nieuwe Wiskrant, 12* (3), 10-17.