

# Rekenen met Massimo

C. van den Boer / A. M. Dekker-Groen  
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

## Inleiding

In dit artikel volgen we een stukje van de ontwikkeling in het rekenen met breuken van Massimo. Hij is een volwassene van allochtone afkomst en volgt de opleiding assistent monteur elektrotechniek. De toelating is in principe drempelloos, wat in de praktijk neerkomt op vooropleidingen die variëren van alleen het basisonderwijs tot een afgebroken lbo- of mbo-opleiding elektrotechniek. Na deze opleiding die één à twee jaar duurt, kunnen cursisten doorstromen naar de opleiding voor monteur elektrotechniek. De cursisten, voornamelijk allochtone mannen, moeten in het nederlands aanspreekbaar zijn en de elementaire rekenvaardigheden als optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen beheersen. Ze werken de stof veelal zelfstandig door. Zo kan het bij een vak als rekenen/wiskunde voorkomen dat de ene cursist bezig is met procenten, een ander met breuken en een derde met oppervlakteberekening. Dit alles vraagt om een specifieke aanpak.

## Het project opleidingsgericht rekenen

Sinds augustus 1992 is het project *opleidingsgericht rekenen elektrotechniek* gestart. Dit project is een samenwerking tussen het Educatief Centrum Rijnmond, drie scholen voor beroepsonderwijs in Rotterdam en het Freudenthal instituut. Onze taak<sup>1</sup> is het ontwikkelen van lesmateriaal voor opleidingsgericht rekenen, dat wil zeggen dat het rekenonderwijs zich richt op rekenvaardigheden die impliciet of expliciet vereist worden in de beginfase van de vervolgopleiding tot monteur. Het beginniveau van dit opleidingsgericht rekenen kan vergeleken worden met het eindniveau van het basisonderwijs. Vanzelfsprekend kan de rekendidactiek van het basisonderwijs niet zondermeer overgeplaatst worden naar het volwassenenonderwijs. Volwassenen hebben tijdens hun eerdere schoolloopbaan en in het dagelijks leven al de nodige rekenervaringen opgedaan. Ze hanteren rekenstrategieën zonder zich daar altijd bewust van te zijn. Het aansluiten bij deze ervaringen en strategieën vormt één van onze uitgangspunten bij het ontwikkelen van het

materiaal.

We willen in dit artikel laten zien hoe deze benadering kan werken. We doen dit aan de hand van observaties tijdens het werken aan het pakket Breuken.<sup>2</sup>

## Massimo

Tijdens onze observaties viel Massimo vooral op door zijn bescheidenheid in het vragen van hulp. Hij is een allochtone man van ongeveer veertig jaar. Hij heeft kinderen die hij 's ochtends naar school brengt waardoor hij altijd iets later in de les verschijnt. Ook doet hij vaak boodschappen. Hij zegt geen problemen te hebben om bedragen uit te moeten rekenen, maar hij heeft veel moeite met de nederlandse taal. Terwijl de klas toch voor 99% uit allochtone cursisten bestaat lijkt hij soms als enige de gemaakte grapjes niet te begrijpen. Massimo kwam in deze opleiding niet uit de verf. Hij bleek achteraf gezien op de verkeerde plek te zitten: zijn niveau was te laag voor deze opleiding. Het is de vraag wat hem hierbij het meest parten speelt: gebrek aan inzicht of taalachterstand.

Waarom dan juist aandacht voor hem? In de eerste plaats omdat we veel met hem gewerkt hebben. Daarbij bleek dat hij wel degelijk rekenstrategieën had voor het rekenen met geld. Het lukte hem echter niet om zelfstandig generalisaties te maken naar het rekenen in de les en de elektrotechniek. Het moeten rekenen met geld tijdens de rekenles irriteerde hem soms: daarvoor kwam hij niet op school, dat kende hij immers al. Hij wilde 'gewoon' weten hoe hij die breukensommen moest maken. Met extra begeleiding kwam hij er wel uit en lukte het hem om zijn rekenstrategieën uit het dagelijks leven te gebruiken voor nieuwe (reken)situaties.

## Breuken

Het pakket *Breuken* begint met het onderdeel *Van breukentaal naar wiskunde*. Hierin worden de begrippen helft, halve en kwart uit ons dagelijks taalgebruik als uitgangspunt genomen om de cursisten ervan bewust te maken dat zij wel degelijk breuken kennen en er mee

kunnen werken.

Zoals gezegd heeft Massimo veel problemen met de nederlandse taal. De eerste vragen over de helft lukken hem wel, maar wanneer er doorgedaan wordt op woorden met 'kwart' er in haakt hij af. Hij heeft een dubbele handicap: enerzijds is zijn begrip van de nederlandse taal te gering om te kunnen begrijpen wat we van hem willen, daarnaast kent hij de bedoelde woorden niet. Uit het observatieverslag wordt duidelijk hoe moeizaam het ging:

"Bij de opgaven over kwart ... zit hij wat zorgelijk te kijken. Ik ga naar hem toe. Hij begrijpt de bedoeling niet. 'Hoeveel kwartieren gaan er in één uur?' Hij telt in het plaatje (zie figuur 1): '3'. Hij telt het gestreepte deel niet mee. Het is me niet duidelijk of hij de vraag niet begrijpt of dat hij echt niet weet hoeveel kwartieren er in een uur gaan. Ik pak mijn horloge erbij en wijs hem aan: er gaan vier kwartieren in een uur. Vraag zeven is weer een probleem.

7. Bij het verdelen van één reep krijgt iedereen een kwart. Hoeveel mensen krijgen een stukje reep?

'Ik ken die woorden niet', voert hij aan. Ik wijs nog eens naar kwartier en vertel dat dit zo heet omdat er vier kwartieren in een uur gaan. Dus met hoeveel mensen zul je delen als je een kwart krijgt? Ik heb zo de nadruk op vier gelegd dat hij aarzelend 'vier' zegt.

De vraag over kwartalen gaat hem wat irriteren. Eerst zegt hij nog enthousiast dat er vier maanden in één kwartaal gaan. Helaas is dat niet zo. 'Er gaan vier kwartalen in één jaar, maar hoeveel maanden gaan er nu in één kwartaal?' Massimo begrijpt niet meer wat ik nu van hem wil. Ik krijg de neiging om de vraag maar over te slaan, we zitten nu met taalproblemen die het alleen maar vreselijk verwarrend maken. Maar tja, een vraag laten zitten wanneer je halverwege bent is ook niet zo tactisch. Dus ik vraag hem hoeveel maanden er in een jaar zitten. '52'. Weer mis. Gelukkig corrigeert hij zich wanneer ik vraag of dat echt wel zoveel maanden zijn.

Dan teken ik twaalf hokjes, eentje voor elke maand. 'Een kwartaal heb ik wanneer ik er vier groepjes van maak en dan één groepje neem.' Ik heb de hokjes handig getekend dacht ik: vier rijtjes van drie. Hij wijst op mijn verzoek netjes de vier groepjes aan, maar op mijn vraag hoeveel hokjes er in één groepje zitten antwoordt hij met 'vier'. Ik besluit dan maar om slecht te zijn en het voor te zeggen zonder dat hij het begrijpt. Inzicht zal deze vraag hem toch niet meer opleveren, alleen maar weerzin.

Wanneer vervolgens gevraagd wordt 'hoeveel mensen spelen in een kwartet?' wordt Massimo wat ongeduldig: 'Ik ken al die woorden niet'. Hij zegt het op een toon van en die hoeft ik niet te kennen ook. Ik wijs weer naar kwartier en kwart van een appel, 'die van kwartalen slaan we maar even over hè?' daar stemt hij maar wat graag mee in. Het begint wel te dagen: een kwartet bestaat blijkbaar uit vier personen.

'Ja', roep ik enthousiast, 'dus alles met kwart wil zeggen dat er vier van zijn. Dat is altijd zo in de nederlandse taal. Dat leer je nu juist in dit pakket'. En ik waag het om toch weer eens naar het woord kwartaal te wijzen. Wanneer hij dan het woord 'dubbelkwartet' leest, zegt hij voor hij de zin verder uitleest, 'dat zijn acht mensen'. 'Ja, en nu ken je een woord dat veel nederlanders niet eens weten!' De docent komt er bij en wijst op de volgende bladzijde. 'Nu met kwartjes, die heb je in je portemonnaie'. Hij lacht. 'Waarom spreken we van een kwartje?' 'Omdat er vier kwartjes in één gulden gaan', antwoordt hij glunderend."

Aanvankelijk heeft hij duidelijk weerzin tegen de vragen waarin aangesloten wordt bij de taal: hij begrijpt dat niet en heeft ook niet zo veel zin om daar over na te denken, hij wil rekenen. Gelukkig begrijpt hij uiteindelijk wel waar we naar toe willen. Maar de vraag blijft staan of hem duidelijk is waarom deze vragen in een breukenpakket tijdens de rekenles gesteld worden. Het pakket gaat verder met opgaven over geld (guldens en kwartjes) met de bijbehorende breukopgaven, en omgekeerd, breukopgaven met bijbehorende opgaven in

Een half uur is de helft van één uur.

Je kunt dit ook schrijven als:  $\frac{1}{2}$ u.

Je kunt een kwartier ook schrijven als:  $\frac{1}{4}$ u.

1. Waarom staat die 4 in  $\frac{1}{4}$ u?
2. Bij het verdelen van één appel krijgt iedereen een kwart. Hoeveel mensen zijn er?

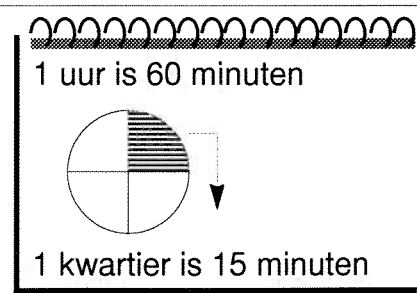


fig. 1

geld. Wanneer de docent hem vraagt of alles lukt, antwoordt Massimo dat hij denkt van wel, maar hij weet het niet zeker. De docent gaat kijken en het gaat prima. Massimo kan goed met geld rekenen en ook lukt het hem om het antwoord in een breuk om te zetten. Ter controle vraagt de docent aan Massimo hoe hij de opgave  $2\frac{3}{4} + 3\frac{1}{4}$  denkt aan te pakken. Zonder problemen legt Massimo de link naar het geld: hij wijst op de twee en de drie en zegt: 'dat is samen vijf gulden'. 'En dat', wijzend op  $\frac{3}{4}$  en  $\frac{1}{4}$ , 'zijn samen vier kwartjes. Dat is ook weer een gulden. Dus samen is het zes gulden'. Onze opzet lijkt geslaagd: niet alleen is hem duidelijk dat een kwartje verbonden kan worden met de breuk  $\frac{1}{4}$ , maar het lukt hem ook om het geld als denkmodel te gebruiken bij het oplossen van een kale breuk en hij lijkt zelfvertrouwen en plezier in het rekenen met breuken gekregen te hebben.

### Uit het observatieverslag

"Aan het einde van de les prijst de docent Massimo: het ging zo goed om aan dat geld te denken dat hij misschien nog wel eens een kei in breuken wordt. Massimo stemt er mee in: ja, zo met dat geld begrijpt hij breuken wel, dan is het helemaal niet moeilijk. Hij vraagt vervolgens of hij het pakket mee naar huis mag nemen, dan kan hij thuis verder werken."

Helaas gaat er dan een week voorbij voor er op school weer gerekend wordt, waardoor het effect van deze les grotendeels verloren lijkt. Thuis heeft hij ook niet verder gewerkt, daar heeft hij heel andere verantwoordelijkheden waardoor het rekenen volledig op de achtergrond komt te staan. De volgende les heeft Massimo veel moeite om de link met geld weer te leggen. De docent probeert hem hierbij te begeleiden, maar uit het volgende observatieverslag is duidelijk dat het voor de docent ook nog een geheel nieuwe benadering is: enerzijds sluit hij wel aan bij de geldcontext, maar bij problemen grijpt de docent tijdens zijn uitleg terug op een rekenkundige aanpak:

"'f0,75, hoeveelste deel van een gulden is dat?' vraagt de docent. Massimo's antwoord ( $\frac{1}{3}$ ) verbaast me niet: hij heeft door dat we iets met kwartjes willen, en f0,75 bestaat uit drie kwartjes, dus dan ligt het antwoord  $\frac{1}{3}$  in de lijn van  $\frac{1}{4}$  krijg je wanneer je met 4 deelt.

De docent legt hem nog een keer uit dat je 1 kwartje als  $\frac{1}{4}$  kunt schrijven. Massimo knikt.

Dan kijken ze samen naar de eerste opgave:

$6\text{ kw} + 5\text{ kw} = \dots$  Zonder problemen rekent Massimo dat dat samen elf kwartjes dus f2,75 is. 'Goed', zegt de docent, 'dat begrijp je. Nu met breuken:  $\frac{6}{4} + \frac{5}{4} = \frac{11}{4}$ . Daar moeten we helen uithalen. Dus acht er af. En dan heb je f2,75'. Massimo kijkt bedenkelijk en vraagt de docent om het nog eens uit te leggen. Deze herhaalt zijn verhaal. Hij verwijst steeds naar het geld, alleen het uitha-

len van helen doet hij op een rekenkundige manier.

Samen maken ze de volgende opgave. Daarna moet Massimo er een alleen doen. Helaas stuit hij daar meteen op een probleem: er staan geen kwartjes, maar 2g. Wat moet hij daar nu mee? De docent: 'twee gulden is acht kwartjes, je krijgt er zes bij. Hoeveel heb je dan?' Ja, hij weet wel dat dat samen f3,50 is, maar met die breuken?? Massimo schrijft op:  $\frac{8}{4} + \frac{6}{4}$ , de docent helpt: ' $\frac{6}{4}$ '. Massimo schrijft het op en noteert als antwoord:  $\frac{14}{8}$ . 'Nee', zegt de docent, 'die onderste blijft hetzelfde'. Massimo maakt er een vier van (omdat de docent het zegt?). Dan nog helen halen uit die  $\frac{14}{4}$ . Met veel moeite lukt het hem.

De docent prijst hem dat hij zo goed uit zijn hoofd met geld kan rekenen. Dan kan hij de breuken ook. Maar Massimo heeft er zo zijn vraagtekens bij: 'Waar ga je die breuken nu gebruiken? In de winkel?'

### Commentaar

Massimo begrijpt niets meer van de analogie wanneer hij de weg van het geld naar de breuken moet afleggen. Iets van de link is er wel wanneer er kale breukensommen gemaakt moeten worden.

### Uit het observatieverslag

"Dat  $\frac{1}{4}$  een kwartje is zit er wel in, maar wanneer de stuivers in beeld komen gaat het weer mis. Hij ziet op het notitieblok dat als hulpmiddel op de betreffende bladzijde is afgedrukt wel dat één stuiver vertaald kan worden naar  $\frac{1}{20}$ . Maar hij zegt dan: ' $\frac{1}{20}$  dat is toch twintig cent?'

De docent maakt twee cirkeldiagrammen om duidelijk te maken hoe je van geld breuken kunt maken: een cirkel stelt één gulden voor. Daar passen vier kwartjes in (de docent verdeelt de cirkel in vier delen). Dus ieder deel is  $\frac{1}{4}$ . Hetzelfde doet hij voor de dubbeltjes. Voor de stuivers gooit hij het over een andere boeg: 'één stuiver is vijf cent. Dat is  $\frac{1}{20}$ . Allebei delen door vijf dan krijg je  $\frac{1}{100}$ . En dat staat ook op het notitieblok'. Het vereenvoudigen van  $\frac{5}{100}$  naar  $\frac{1}{20}$  kan Massimo wel volgen. Hij lijkt dat ook leuker te vinden: dat is tenminste breukrekenen, niet dat gedoe met het geld. Maar helaas voor hem komt bij de volgende vraag de breuk  $\frac{19}{20}$  aan de orde. Volgens de docent is dat 95 cent, maar daar begrijpt Massimo niets van. De docent vraagt hoeveel negentien stuivers is. Wanneer hij dat niet weet, wijst hij hem er op dat twintig stuivers één gulden is. Dus negentien stuivers is vijf cent minder dus 95 cent. Massimo kijkt alsof hij het in Keulen hoort donderen. Hij is de draad volledig kwijt. Dan is het pauze. Wat onwillig gaat hij met de rest mee, eigenlijk wil hij het gewoon begrijpen. De docent zegt hem in de pauze er over na te denken.....

Maar natuurlijk, ook na de pauze weet hij nog niet hoe het in elkaar zit. De docent grijpt maar weer terug op het vereenvoudigen: 95 cent dat is  $\frac{95}{100}$  en dat is.....? Uit het

hoofd berekent Massimo dat dat  $\frac{19}{20}$  is. De docent stelt hem voor om de overige opgaven alleen als geldopgaven te maken en dat hij dan het antwoord als breuk moet schrijven.

Massimo gaat aan het werk, maar hij heeft er duidelijk geen bevrediging meer in. Wanneer hij klaar is, is de docent met een andere cursist bezig, dus ga ik naar hem toe. Ik bekijk het en het is goed.

Maar Massimo lijkt niet tevreden. Dit kende hij allemaal al. Nu heeft hij nog niets geleerd. Ik stel hem voor om eens te gaan kijken of we toch niet echte breukensommen kunnen maken. We bladeren terug naar bladzijde vijf (figuur 2) waar een voorbeeld staat met de wisselmachine en bekijken dat samen. Dat begrijpt hij wel. 'Nou', stel ik voor, 'nu gaan we de sommen die jij al met geld gemaakt hebt nog eens maken. We denken steeds aan geld, maar we schrijven alleen maar breuken op.' Dat lijkt hem wel wat, en het gaat wonderbaarlijk goed. Ook het aftrekken: hij haalt eerst zoveel mogelijk gulden eraf, kijkt dan of er nog voldoende kwartjes over zijn om af te trekken, zo niet dan wisselt hij een gulden voor vier kwartjes. Hij schrijft eerst het aantal kwartjes op dat hij dan heeft en pas daarna schrijft hij ervoor hoeveel gulden hij nog heeft. Hetzelfde doet hij met het opschrijven van de antwoorden: eerst de breuk met noemer vier en dan pas de helen ervoor. Dat loopt ook precies parallel met de manier waarop we er over praten: wanneer je alleen nog maar kwartjes af moet trekken, ligt daar de nadruk op. Pas in tweede instantie vragen we ons

af hoeveel gulden er nog over zijn. Ook het inwisselen van kwartjes naar gulden gaat nu vanzelfsprekend. Massimo wordt helemaal blij: zijn hele blad staat nu ineens vol met breuken in plaats van met geld! Het vermenigvuldigen laat ik even zitten maar de dubbeltjes durven we wel aan: hij weet goed dat één gulden in tien dubbeltjes gewisseld wordt, maar ik vraag me af op de vanzelfsprekendheid dat één dubbeltje dus met  $\frac{1}{10}$  aangegeven wordt voor hem ook geldt. Maar goed, het staat op het notatieblok dus het zal wel zo zijn.

Het werken met stuivers werkt alleen maar verwarrend. Ik besluit om nu de link met geld los te laten, maar wel te blijven denken aan een wisselmachine: wanneer er in de noemer twintig staat, dan kan ik één gulden wisselen voor twintig van die dingen. Dat blijkt te werken, zo kunnen we echte breukensommen maken!

We controleren de antwoorden van de breukensommen steeds met de antwoorden die hij eerder in geld gegeven heeft. Hij lijkt nu de link te gaan zien. Dat wordt bevestigd wanneer ik op het einde nog wat sommen opgeef. We gaan net zo lang door tot hij er twee achter elkaar zelfstandig (maar wel hardop pratend om van mij instemming te krijgen) helemaal goed doet. De laatste is een gemene:  $14\frac{1}{2} - 12\frac{2}{4}$ . Hij haalt eerst de helen eraf. Zet dan de halve gulden om in twee kwartjes en dan blijven er géén kwartjes over te blijven. Hij kijkt me aan en zegt: dan zijn er nog twee gulden, en hij schrijft op  $f2$  (dus met 'f' terwijl we die juist al die tijd weggelaten

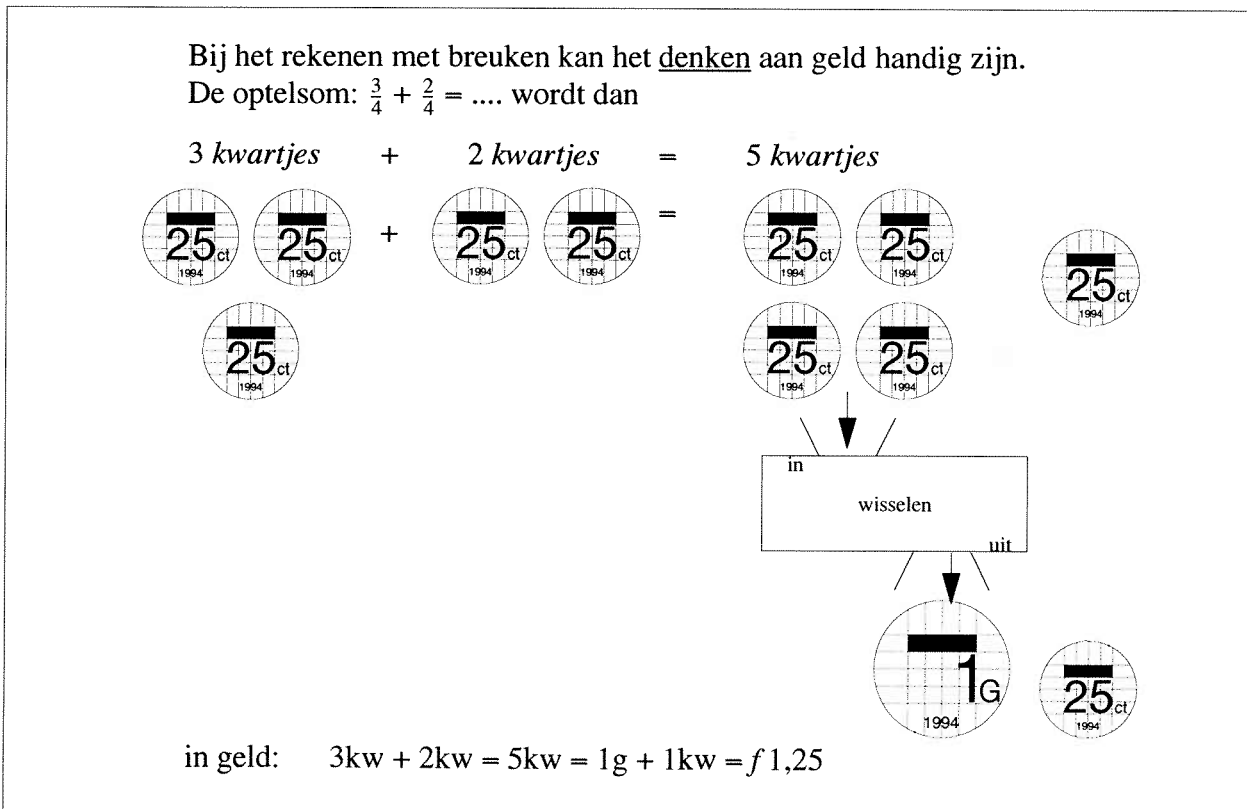


fig. 2

hebben). We zijn allebei enthousiast, Massimo neemt alle papieren bij elkaar en zegt dat hij het 's avonds nog eens zal bekijken. Ik hoop dat het er deze keer thuis wel van komt."

Tot zover de observaties van Massimo.

## Wat we geleerd hebben

Ondanks het feit dat deze observaties slechts een heel klein stukje van het leerproces van Massimo beschrijven, kunnen we er veel uit leren. Wanneer het leerproces intensief begeleid wordt, lukt het de cursist om zich ervan bewust te maken dat hij al heel wat vaardigheden beheerst om breukopgaven te werken. Ook de analogie met geld kan duidelijk gemaakt worden. Zo duidelijk, dat het voor Massimo hanteerbaar wordt en gebruikt kan worden om te manipuleren met meer abstracte breuken, bijvoorbeeld met twintig in de noemer. Het enthousiasme en de leergierigheid om er mee verder te werken ondersteunen de keuze van de context.

Massimo wordt ontevreden wanneer hij het gevoel heeft dingen te moeten doen die hij al beheerst. Dat is volstrekt begrijpelijk wanneer we bedenken dat volwassenen naar school gaan om iets nieuws te leren, zeker wanneer het een specifieke beroepsopleiding betreft. In de benadering van volwassenen moeten we proberen voortdurend expliciet te zijn waarom we ze bepaalde opgaven laten doen. Dit kan in het materiaal gebeuren, maar hierbij ligt nog meer een taak voor de docent.

Ook hebben we geleerd dat we de cursisten niet steeds de opgaven en in breuken en in geld op moeten laten schrijven. Het denken aan geld is een handig hulpmiddel bij het rekenen met breuken. Om de cursisten de analogie te leren is het nuttig om bij elk type opgave (optellen, aftrekken en vermenigvuldigen) enkele opgaven te geven waarbij eerst de geld- en dan de breukopgave wordt

gedaan en omgekeerd. Daarna bieden we kale breukopgaven aan waarbij nog wel ruimte is om analoge geldopgaven op te schrijven voor wie dat nodig is.

We werken in een schoolcultuur waar de cursisten individuele trajecten afleggen en klassikale uitleg, besprekingen of groepsgesprekken erg weinig voorkomen. De drie docenten die meewerken aan ons project zijn nauwelijks bekend met de uitgangspunten van realistisch rekenen. We hebben hen weliswaar een scholing van twee ochtenden gegeven en lichten onze opzet en ideeën zo goed mogelijk toe, maar er mag niet van hen verwacht worden dat zij het dan onmiddellijk in de vingers hebben.

Hier ligt een taak voor ons als begeleiders om hen voortdurend feed-back te geven, te bespreken waar moeilijkheden liggen en met hen te zoeken naar oplossingen die zoveel mogelijk tot ieders tevredenheid stemmen. We proberen dit onder meer te doen door in het materiaal voldoende voorbeelden en oplossingswijzen aan te bieden. Soms wordt dit tot een soort koorddans, we kunnen en willen geen schriftelijke cursus rekenen aanbieden, maar willen de cursisten ook niet laten zwemmen. In het materiaal leidt dit onvermijdelijk tot meer tekstgebruik dan in schoolboeken gebruikelijk is. En dat terwijl er juist veel allochtone cursisten aan deze opleiding deelnemen. Dit dwingt ons tot eenvoudig taalgebruik, maar ook weer niet te kinderachtig, bijvoorbeeld niet pijltje maar pijl, en niet rondje maar cirkel. Kortom, we moeten voortdurend alert te zijn om de cursisten op hun eigen niveau te benaderen.

## Noten

- [1] Dit zijn Corine van den Boer, Agaath Dekker-Groen en Nanda Querelle.
- [2] Dekker-Groen, A.M. (1993). Breuken. Eerste versie. Cursistenmateriaal en handleiding.

## Brochures Keuzebegeleiding Wiskunde A en B

Evenals voorgaande jaren zijn de brochures *Keuzebegeleiding Wiskunde A en B op het havo* te bestellen bij het project Wiskunde & Emancipatie aan de Hogeschool Holland. De brochures zijn niet veranderd ten opzichte van vorig jaar, er is wel een overzicht met actuele informatie aan de brochure voor docenten toegevoegd. In dit overzicht staat welke vakkenpakketen de verschillende vervolgstudies in het hbo stellen.

U kunt het apart toegevoegde overzicht, waarin de toelatingseisen van de verschillende vervolgoopleidingen staan weergegeven, ook los van de brochures aanvragen.

U kunt de brochures schriftelijk bestellen bij: Hogeschool Holland, sector HBO- $\beta$ , Wiskunde & Emancipatie, t.a.v. Inge Ottens, Postbus 261, 1110 AG Diemen, onder vermelding van: naam, adres en telefoonnummer van de school, aantal leerlingenbrochures (f 1,- per stuk), aantal docentenbrochures (f 2,- per stuk), excl. verzendkosten.

Voor informatie kunt u op dinsdag en vrijdag, tijdens kantooruren, bellen met de medewerkers van het project Wiskunde & Emancipatie, Hogeschool Holland, tel. 020-5601716.