Een foutje van Edgar Allan Poe

Puzzelrubriek

A.J. Goddijn
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

Een diner en veel reacties

Orange jelly with figs! Niet Edgar's lievelingstoetje lezen we in *Lionizing*. Toch was dat het dessert bij het boekendiner van 2 oktober j.l. in de Beurs van Berlage te Amsterdam waar Allan (1809-1849) de meest besproken afwezige was. Jan Wolkers las zijn (eigen) verhaal *De bretels van Jupiter* voor, waarin hij Poe op briljante wijze meetkundeles geeft. Dat levert mij de nieuwe opgave op voor deze keer. Wie niet geïnteresseerd is in reacties op de puzzelrubrieken van *Nieuwe Wiskrant 12*, nr. 3 over de wet van Benford en die van de meetkunde-special *12*, nr. 4 spoede zich nu naar het laatste onderdeel van deze rubriek: de misser van de scarabee.
De vorige twee rubrieken leverden in totaal 62 bladzijden aan reacties van zeven inzenders op. Dat is op zich een wiskrant vol en ik moet dus selecteren. We beginnen met Benford, dat wil zeggen de rubriek van de *Nieuwe Wiskrant 12*, nr. 3.

De Nederlandse gemeenten volgens Benford

Mike Staring rekende aan meetkundige rijen van de vorm $N(t) = N_0p^t$, waarbij p een klein beetje groter dan 1 is; $t = 0, 1, 2, ...$ Hij rekent voor dat er tussen $a.10^n$ en $(a + 1).10^n$ zo'n ${}^{p}log\,(\frac{a+1}{a})$ getallen uit die rij liggen, op 1 of 2 randgevallen na.
Dat is onafhankelijk van n. Daarbij is a een van de getallen 1, 2, ..., 9. Met andere woorden: ${}^{p}log\,(\frac{a+1}{a})$ van de getallen van N_0p^t die tussen 10^n en 10^{n+1} liggen, begint met cijfer a. Door optellen, over a = 1 t/m 9, komen we dan tot de vaststelling dat juist de fractie ${}^{10}log\,(\frac{a+1}{a})$ begint met cijfer a.
Dat geldt voor elk gebied $[10^n, 10^{n+1}]$. Dat betekent dat, als p dichtbij 1 ligt, N_0p^t, $t = 1, 2, ...$ een Benford-rij is, in die zin dat de begincijfers van de getallen uit die rij volgens de wet van Benford verdeeld zijn.
Nu kun je de inwonertallen van de Nederlandse gemeenten zien als een toevallige greep uit een tabel met zulke getallen, omdat je bijvoorbeeld aanneemt dat

- de Nederlandse gemeenten op een 'toevallig' moment ontstaan zijn
- de inwonertallen licht exponentieel groeien
- de inwoneraantallen niet erg klein zijn.

Een suggestieve bijdrage!

Deze telmethode loopt zeker spaak bij $p = 2$, omdat er dan te weinig getallen 2^t in $[10^n, 2.10^n]$ vallen om de 'randgevallen' weg te moffelen.
Echter, zo merkt Jan van Bolhuis op, er valt altijd precies één tweemacht in het interval $[10^n, 2.10^n]$. Dat volgt uit het verdubbelkarakter van 2^t.

Kies nu de t die 2^{t+1} juist 2.10^n laat passeren:

$$10^{n-1} < 2^t < 2.10^n < 2^{t+1}$$

We zien na logaritme nemen, dat $\frac{n}{t} \to {}^{10}log\ 2$, als $n \to \infty$. Nu is n het aantal machten van 2 onder de 10^n die met het cijfer 1 beginnen en t dat aantal in totaal; zo gezien staat hier dan juist de bewering dat een fractie ${}^{10}log\ 2$ van de 2-machten in het tientalligstelsel met het cijfer 1 begint.

In dit charmante bewijs heeft de 2 een dubbelrol: die van grondtal van de macht èn die van cijfer in 2.10^n. Generalisatie van het bewijs zit er dus waarschijnlijk niet in.
Jan van Bolhuis stuurde een stuk van een uitgebreid artikel van zijn hand, waarin hij langs een andere weg dan in de *Nieuwe Wiskrant 12*, nr. 3 tot het algemene resultaat over meetkundige rijen van de vorm $c.r^n$ komt.
De kern is dat weer naar de rij $\{n\ log\ r\}_{n=1}^{\infty}$ wordt gekeken en bewezen moet worden dat die rij gelijk verdeeld modulo 1 is, als $log\ r$ irrationaal is.
Maar Jan Bolhuis gebruikt nu dat de rij
$\{n.a \pmod 1)\}_{n=1}^{\infty}$ erg regelmatig is als wel geldt $a \in \mathbb{Q}$, en benadert dan een irrationaal getal zoals bijvoorbeeld $log\ 7$, met een breuk die er héél dichtbij ligt.
Daarvoor gebruikt hij de theorie der kettingbreuken, waarmee het mogelijk is een irrationaal getal a met een breuk $\frac{p}{q}$ te benaderen, zodat

$$(a - \frac{p}{q}) < \frac{1}{q^2}.$$

Volgens die theorie zijn er oneindig veel van die breuken en zijn er dus ook zeer grote q's beschikbaar. Daarmee is het gedrag van $\{n.a \pmod 1\}_{n=1}^{\infty}$ ook voor irrationale a goed in kaart te brengen, omdat het gedrag van de eerste q getallen erg lijkt op dat van de eerste q van $\{n\frac{p}{q} \pmod 1\}_{n=1}^{\infty}$.

Jan van Bolhuis beschrijft dit gedrag in zijn bijdrage veel gedetailleerder. Met deze korte opmerkingen blijft er echter weer wat uit te zoeken voor de liefhebber!

Schaalinvariantie

Neem nu eens aan, suggereert Hessel Pot, dat bij een afstandstabel (afstanden tussen Nederlandse plaatsen bijvoorbeeld) de eerste-cijfer-verdeling er uit ziet zoals bijvoorbeeld in de turftabel (tabel 1a) hieronder.

afstanden in kilometers	
begint met	aantal
1	卌 卌
2	卌 卌
3	卌 卌
4	卌 卌
5	卌 卌
6	卌 卌
7	卌 卌
8	卌 卌
9	卌 卌

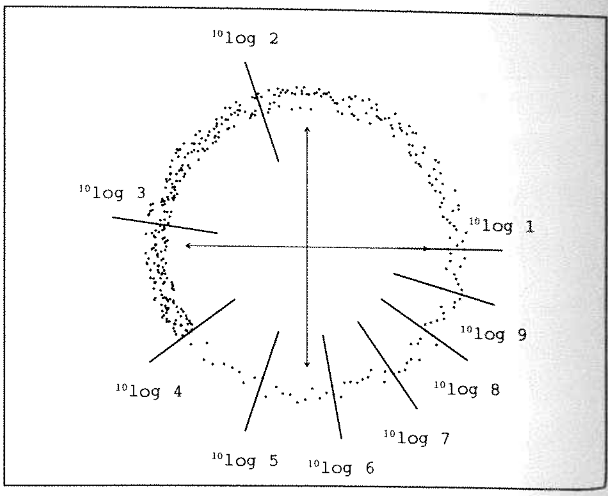
tabel 1a

afstanden in halve kilometers	
begint met	aantal
1	卌 卌 卌 卌 卌
2	卌
3	卌
4	卌
5	卌
6	卌
7	卌
8	卌
9	卌

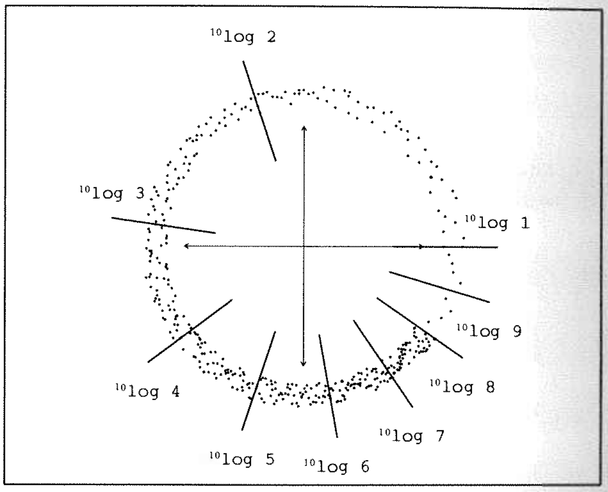
tabel 1b

Stel nu dat we de Wet op de Maten veranderen, alles moet voortaan in halve kilometers. Gevolg: tabel 1b. En dat is dan ineens heel raar!
Natuurlijker zou een verdeling zijn, die juist onder schaalverandering een zelfde eerste cijferverdeling geeft. De individuele eerste cijfers veranderen dan wel, maar hun totaalverdeling niet. Benford's verdeling doet juist dat. Wie zich de cirkelplaatjes van de vorige keer voor de geest haalt, ziet dat in die plaatjes schaalverandering slechts een draaiing van de grijze puntenring is. Zie figuur 1.
Kortom: schaalinvariante verdelingen hebben een *egale* grijzing in de cirkelvoorstelling. En dat was – zie *Nieuwe Wiskrant 12*(3) – equivalent met 'Benford'.

Hessel Pot nodigt u ook nog uit voor het volgende:
Kom langs met een lijnstuk naar keuze. Hessel Pot grijpt (per toeval) een lijnstuk uit zijn la. De beide lijnstukken worden op elkaar gedeeld, het kleinste op het grootste. Is het eerste cijfer van het quotiënt een 1, 2 of 3, dan verliest u, is het 4, 5, 6, 7, 8 of 0, dan wint u.
Waarschijnlijk heeft Hessel Pot het rustig na alles over Benford. Kies een ander slachtoffer voor deze weddenschap!



De getallen n= 1, 2, 3, .., 400, afgebeeld als (^{10}log n) (mod 1) op de wijze van Nieuwe Wiskrant 12, nr. 3.



De getallen n = 2, 4, ..., 800 op dezelfde manier afgebeeld. Het is een draaiing van het vorige plaatje.

fig. 1

De rest is meetkunde – Thebault voorop

Opgave 101 ging over vierkanten op de zijden van een parallellogram. Voor Maurits Dienske en Jan Guichelaar was het niet te veel gevraagd te bewijzen dat de middens van die vierkanten zelf een vierkant vormen. Ik volg in figuur 2 nu Jan Guichelaar.
PBQ en RCQ zijn congruent. Dus $PQ = RQ$.
Maar $\angle BQP$ en $\angle CQR$ *voegen iets toe en halen iets af van* $\angle CQB$. Dat 'iets' is twee keer hetzelfde.
Ergo: $\angle RQP = \angle CQB = 90°$.
Net zo voor de andere zijden. $PQRS$ is dus vierkant.
Hoe leid je nu de cosinusregel hieruit af? Dat is enigszins een kwestie van smaak, maar de bedoeling is wel: ga uit van dat vierkant.
Met de belettering van figuur 2:
c^2 = oppervlak van het vierkant $PQRS$.
Dat is, kijk goed naar de tekening:
pgrm $ABCD + \Delta APB + \Delta BQC + \Delta CRD + \Delta DSA$.

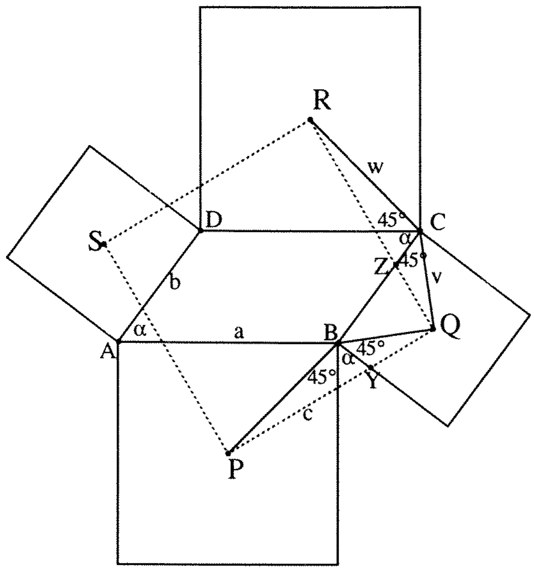


fig. 2

Daarbij moeten zorgvuldig stukjes verlegd worden. In de tekening: $\Delta QCZ = QBY$, enzovoort.
In de aangegeven hoeken en zijden uitgedrukt:
$c^2 = ab \sin a + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}w^2$.
Met $\sin a = -\cos(90+a)$, $a = v\sqrt{2}$, $b = w\sqrt{2}$ leidt dat tot:

$$c^2 = v^2 + w^2 - 2vw\cos(a + 90)$$

juist de cosinusregel in ΔRCQ!
Hoe kòm je daar nu op? Toch wel door te onderkennen dat ΔPBQ in de hele situatie een grote rol speelt en doordat we c^2 als vierkant al hadden. De rest volgde vrij 'natuurlijk'.

H. Zunneberg verwijst nog naar de stelling dat drie gelijkzijdige driehoeken, geplaatst op de zijden van een willekeurige driehoek, met hun drie zwaartepunten weer een gelijkzijdige driehoek opleveren.
Die stelling kent diverse bewijzen. Zunneberg verwijst naar een bijdrage van eigen hand in *Euclides 61*(10), waarin een bewijs met behulp van het punt van Fermat wordt gegeven. Dat is het punt in een driehoek van waaruit de zijden alle drie onder 120° worden gezien. (Dit punt heet ook wel: punt van Toricelli. De Fransen en Italianen betwistten elkaar in de zeventiende eeuw op nog meer punten wie 'de eerste' was!)

De vaas

De vaas van opgave 98 beelden we nogmaals af (figuur 3).
Maurits Dienske berekende snel de oppervlakte van het horizontale doorsnede-vierkant op hoogte x (zie figuur 4).
Omdat de hoogte 20 cm en de basis 10 cm is, geldt: $AR = BS = \frac{1}{2}x$. Daarmee is PQ, de zijde van het doorsneden vierkant te berekenen.

$$PQ^2 = (10 - \tfrac{1}{2}x)^2 + (\tfrac{1}{2}x)^2$$

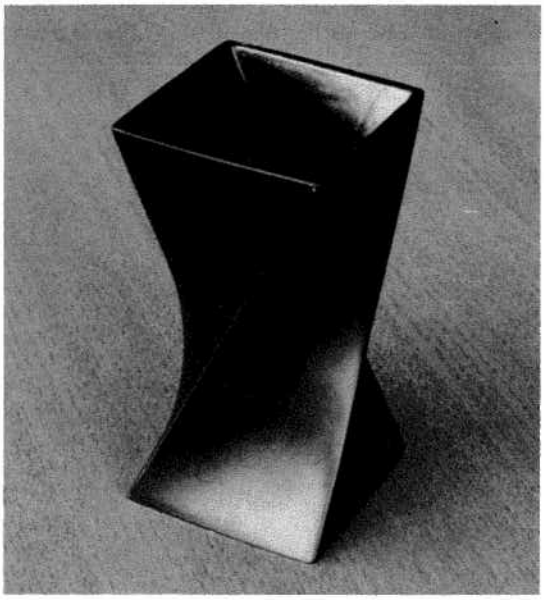


fig. 3

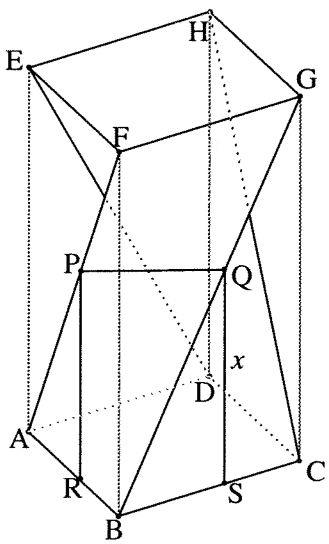


fig. 4

De inhoud van de vaas blijkt $\frac{2}{3}$ van de omhullende balk te zijn. Integreer de oppervlakte naar de hoogte:

$$\int_0^{20} (10 - \tfrac{1}{2}x)^2 + (\tfrac{1}{2}x)^2 = \tfrac{2}{3} \cdot 2000 \text{ cm}^3$$

Als ik schrijf dat ik tandenknarsend met rekenen aan de oppervlakte van de vaas ben gestopt, dan daagt dat Maurits Dienske en Jos Groot alleen maar uit.
Maurits Dienske begint met gewoon eens te exploreren. Wat vinden we bijvoorbeeld als we de zijde van het vierkant integreren naar x, van 0 tot 20. Dat is vast niet goed, maar het is een eerste stap:

$$\int_0^{20} (100 - \tfrac{1}{2}x)^2 + (\tfrac{1}{2}x)^2\, dx.$$

Dat is ook:

$$\int_0^{20} \sqrt{\frac{1}{2}(x-10)^2+50}\ dx$$

Dit valt naar een integraal over $\sqrt{1+u^2}$ om te substitueren. Gebruik daarna $u = sinh(t)$. Maar benaderen mag ook, het wordt ongeveer 162 cm^2.
Eigenlijk kun je dit zien als: vat de vaas op als een stapel dunne tegels van ongelijke grootte, draai ze recht en kijk alleen naar de zijkanten van de tegels.
Maar, zo verlies je de torsie in het oppervlak. Maurits Dienske vervormt het echte oppervlak vervolgens door het in schuine strookjes te verdelen, niet in de rechte die de voorgaande benadering suggereert; dan is rekening gehouden met de draaiing van de strookjes. Door dat eerst te doen met een vaas van gelijke tegels vindt hij dat er wegens de torsie met ongeveer 1.09 moet worden vermenigvuldigd. Zo vindt hij $1.09 * 162\ cm^2 \approx 177\ cm^2$.
Te waarderen is, vanuit de puzzelredactie gezien, dat van zo'n lastig probleem een gedeeltelijke oplossing wordt ingestuurd die het denkproces weergeeft. Wiskundigen publiceren – helaas – vaak slechts hun uiteindelijke gladde bewijzen en niet het verslag over het geploeter, waar juist de research plaatsvindt.
Jos Groot werkte anders. Zo'n oppervlak probeer je voor te stellen door een functie van twee variabelen, $f(x, y)$. Zoals er een formule is voor de booglengte van de grafiek van $y = h(x)$

$$\int_a^b \sqrt{1+h'(x)^2}\,dx$$

is er ook een voor de oppervlakte van $z = f(x, y)$ boven gebied G:

$$\int_G \sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}\ dx\,dy$$

Controleer dit maar met $z = ax + by$ en $G = \{0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1\}$
Dan moet eerst de juiste $f(x, y)$ voor deze situatie gevonden worden en daarna gerekend worden.
Jos Groot kende de *Nieuwe Wiskrant* alleen van horen zeggen en werkte daardoor met diverse verwante vazen. Zoals de vaas waarvan de vierkante dwarsdoorsnede constante grootte heeft en gelijkmatig draait: de schroefvormige vaas.
Zijn laatste poging gaat wel over 'onze' vaas, maar de berekening is toch benaderend; zijn resultaat voor één zijvlak:

$$\left(\frac{9\sqrt{2}\,ln(\frac{2\sqrt{10}+11}{9})}{16}+\frac{\sqrt{5}}{4}\right) .\ 200 \approx 216\ cm^2$$

Lastig is het om de juiste $f(x, y)$ te vinden. Je kunt bijvoorbeeld het xy-vlak als diagonaal vlak van de balk om de vaas kiezen. De vergelijking van één zijvlak is dan:

$$z = f(x, y) = \frac{x^2\sqrt{2}}{40}+\frac{xy}{10}+\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Figuur 5 gebruikt dezelfde belettering als figuur 4.

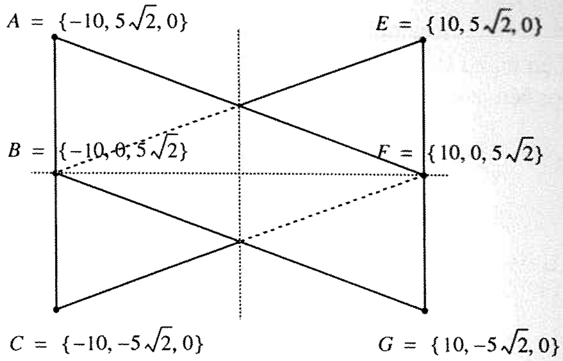


fig. 5

Dat de lijnstukken AB en FG liggen op het door f gegeven oppervlak. Voor vaste x geeft f steeds een verbindingslijnstuk tussen de twee lijnen AF en BG.
De integraal over G (parallellogram ABGF in figuur 5) exact uitwerken lukt niet. Benaderen met behulp van DERIVE leidt mij naar 167 cm^2. Derive hielp ook bij het correct via vectoren berekenen van $f(x, y)$, het differentiëren, kwadrateren, optellen en vereenvoudigen.
Moet het 177, 167 of 216 cm^2 zijn? Is het onmiddellijk duidelijk dat het kromme oppervlak minder dan 200 cm^2 moet zijn, omdat het binnen de omhullende balk ligt?
Zo simpel is zelfs dat laatste niet: het gaat om een zadelvlak.

Andere meetkundige opgaven

Maurits Dienske reageerde ook op de opgaven 95, 96, 102, 103 en 104. Opgave 95 gaat over herhaald perspectief. Dat wil zeggen het in perspectief brengen van een perspectiefafbeelding. Maurits begint met dictator Tapioca als vierkante kop. Zijn eerste tekening is figuur 6.

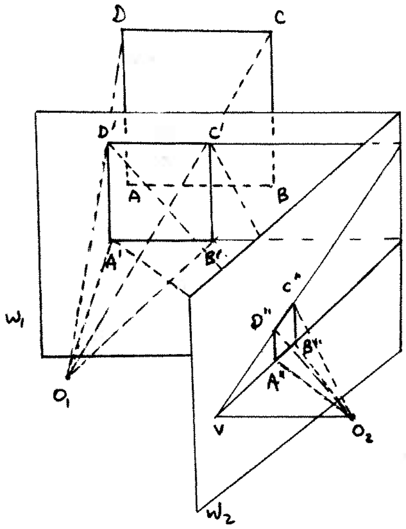


fig. 6

ABCD is de dictator zelf, w_1 het televisiescherm, w_2 het vlak van de striptekening.

Nu laat hij O_1 en de afstand van $ABCD$ tot w_1 vrij.
De vraag is: Kun je $ABCD$ door één centrale projectie op $A''B''C''D''$ afbeelden? Dat wil zeggen: is het mogelijk O_1 en w_1 zo te kiezen dat de lijnen AA'', BB'', CC'', DD'' door één punt gaan?
Het uiteindelijke antwoord (ja!) wordt gevonden via een combinatie van kijkmeetkunde en projectieve meetkunde.

Opgave 104: verspringende schroeflijn.
We herhalen maar weer de illustratie (figuur 7).

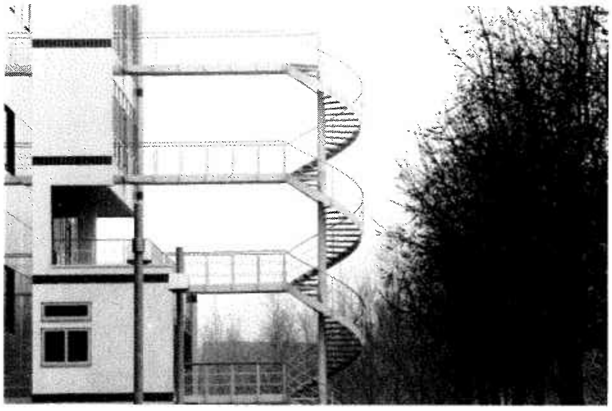


fig. 7

De hoeken in de sinuslijn ontstaan doordat de vlonders naar de verdiepingen een onregelmatig grote traptrede van de wenteltrap op de foto bevatten. Rekenen met de knik in de leuning valt niet echt mee. Beter is het de foto op de knik horizontaal door te knippen en de stukken uit elkaar te schuiven tot een correcte sinusoïde mogelijk is. De ontbrekende fractie levert de hoek die de brede trede maakt. We hielden een foto achter (zie figuur 8).

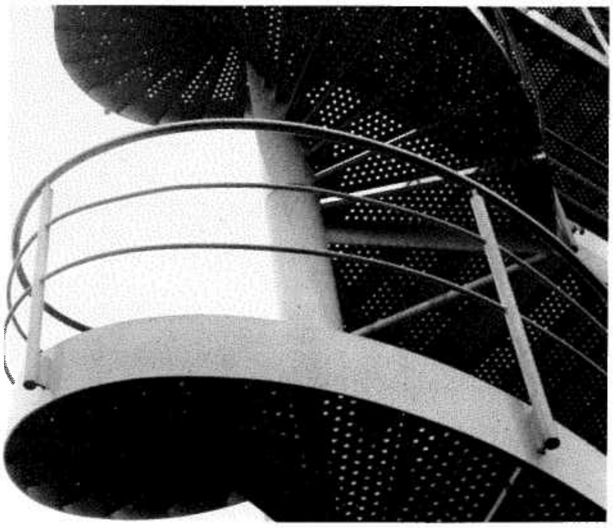


fig. 8

Een Euclidicht

De laatste bijdrage van Maurits Dienske die ik hier opneem: de vertaling van een van de Euclidiennes van Guillevic:

Evenwijdige lijnen

We gaan, de ruimte is groot,
we lopen zij aan zij,
we willen praten.

Maar wat de een vertelt,
weet de ander al.

Want sinds de oorsprong,
uitgewist, vergeten,
bleef het verhaal gelijk.

In een drom elkaar ontmoeten,
liefde en vervulling vinden.

Niemand komt ooit verder
dan in de ander en zichzelf.

De misser van de Scarabee

In het verhaal *De Gouden Tor* laat Edgar Allan Poe een begraven schat ontdekken. Eerst wordt een bericht op een gevonden stuk perkament zichtbaar gemaakt door voorzichtig verwarmen. Dan wordt het gedecodeerd.
Dat alleen al beslaat bladzijden, het wordt in detail met letterfrequenties van het Engels toegelicht. Via het gedecodeerde bericht belanden we uiteindelijk in een boom, waar een negerslaaf, Jupiter, een loodlijn door het linkeroog van een in de boom verstopte schedel moet laten zakken. Vanaf de boom moet een lijn worden getrokken naar het loodpunt en die lijn moet vijftig voet worden verlengd. Dáár graven.
Men vindt echter in de kuil, die vier voet groot is, niets. Maar dan blijkt dat Jupiter door het van hèm uitgeziene linkeroog het lood, waarvoor een mysterieuze gouden tor wordt gebruikt, liet zakken. Fout, dat was niet het linkeroog van de schedel.
Alles opnieuw! Nu stuit men eerst op twee vergane lijken en daarna op een kist met inhoud.

Opgave 106
Er is iets meetkundigs mis met dit verhaal. Wat?

Lees desnoods het originele verhaal en eventueel daarna *De bretels van Jupiter* van Jan Wolkers.

Inzendingen zoals altijd naar Aad Goddijn, Freudenthal instituut, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht.