Met de TI-81 voor de klas

F.J. Dijksterhuis
Nienoord College, Leek

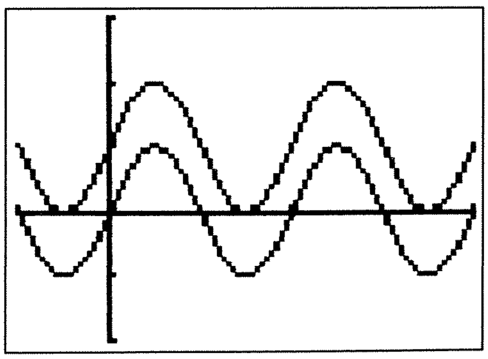
Inleiding

De TI-81 grafische rekenmachine heeft na verschillende artikelen in de Nieuwe Wiskrant en Euclides geen introductie meer nodig.[1] Dit artikel gaat over een bijzondere uitvoering van de TI-81: de set met transviewscherm waarmee het apparaat als demonstratiemiddel te gebruiken is. Met deze uitvoering kan de TI-81 benut worden als ondersteuning van de klassikale uitleg. In een afsluitend onderzoek tijdens de opleiding tot docent wiskunde aan de Universiteit van Groningen heb ik, onder begeleiding van Sieb Kemme, de mogelijkheden van de TI-81 bij gebruik voor de klas onderzocht. Doel van het onderzoek was het maken van een serie voorbeeldlessen. Deze lessen zijn bedoeld als inspiratiebron voor wiskundedocenten.[2]
In het onderzoek bekeek ik ook de invloed van de TI-81 op de interactie tussen docent en leerlingen. Ik heb lessen geobserveerd waarin de TI-81 voor de klas gebruikt werd. Bij een deel van deze lessen werd met door mij gemaakte voorbeeldlessen gewerkt. Naar aanleiding van de observaties verbeterde ik de voorbeeldlessen en trok ik conclusies over de invloed op de interactie tussen docent en leerlingen. De belangrijkste conclusie was dat de TI-81 werkt als een katalysator op de interactie in de klas. Zowel docent als leerlingen worden geactiveerd door de mogelijkheden die het apparaat biedt.

Voornaamste doel van het onderzoek was docenten praktische voorbeelden te geven van zinvol gebruik van de TI-81 voor de klas. De voorbeeldlessen zijn niet uitgevoerd zoals ze op papier staan; dat was ook niet direct de bedoeling. Het zijn lessen die zich zo in mijn gedachten afgespeeld hebben. Ze zijn bedoeld om docenten voorbereidend werk uit handen te nemen en hen een indruk te geven hoe ze de TI-81 kunnen benutten.
In een les waarin de TI-81 voor de klas gebruikt wordt, zou een bepaalde 'didactische route' gevolgd kunnen worden om het apparaat goed tot zijn recht te laten komen. Onder didactische route versta ik de manier waarop de klas in een les naar het einddoel gaat. De onderdelen van zo'n route komen in dit artikel stuk voor stuk aan de orde. Daarbij worden de mogelijkheden van de TI-81 bij gebruik voor de klas en enkele observaties beschreven. Als toelichting is een voorbeeldles over sinusoïden bijgevoegd.

Eerst de plaatjes

De grafische mogelijkheden vormen de grootste kracht van de TI-81. Met 'één druk op de knop' en zonder wiskundige omwegen kunnen grafieken worden getekend. Dit maakt het mogelijk plaatjes als uitgangspunt van de les te nemen.
Bij twee lessen in verschillende vwo 4 klassen heb ik sinusoïden geïntroduceerd met behulp van de TI-81. De leerlingen moesten leren wat het verband is tussen de parameters van de functie $y = a.\sin(px + q) + b$ en de vorm en plaats van de bijbehorende grafiek.
In de ene klas ben ik begonnen met een herhaling van transformatieregels voor functies. Daarmee moesten de leerlingen voorspellingen doen over vorm en plaats van een sinusoïde. Nadat ik ze uitgelegd had wat de gemiddelde output van een sinusoïde was, vroeg ik ze wat er gebeuren zou met de grafiek van $y = \sin(x)$ als de formule $y = \sin(x) + 1$ werd. Ze antwoordden dat de grafiek 1 omhoog zou gaan en dat de gemiddelde output 1 groter zou zijn. Het plaatje bleek hiermee in overeenstemming te zijn, maar voegde niet veel meer toe dan een controle van het antwoord. Het fungeerde slechts als illustratie bij het antwoord.



De les in de andere klas begon met het tonen van bij-

gaand plaatje van $y = \sin(x)$ en $y = \sin(x) + 1$. Ik vroeg de leerlingen wat het verschil tussen de twee grafieken was. Hun antwoord luidde dat de bovenste '1 hoger' lag. De volgende vraag was welke invloed de 1 in de tweede formule op de grafiek van $y = \sin(x)$ had.
De leerlingen antwoordden dat 'de hoogte' veranderd was. Zij zagen nu waar het om ging, maar het begrip 'hoogte' was wiskundig niet precies genoeg. Daarom legde ik uit dat de 'hoogte' van een sinusoïde wel 'gemiddelde output' wordt genoemd. Alle outputs gaan met 1 omhoog dus het gemiddelde ook, zoals in de grafiek te zien is. De algemene regel '$y = \sin(x) + b$ heeft gemiddelde output b' werd onderbouwd door nog enkele grafieken van de vorm $y = \sin(x) + b$ te tekenen. Daarna gingen we op dezelfde manier bezig met de algemene regels voor de verandering van amplitude en periode.

Uit deze ervaringen trok ik de conclusie dat de TI-81 voor de klas meer bijdraagt aan de les wanneer plaatjes startpunt van de les zijn en niet alleen als illustratie voor de theorie gebruikt worden. De TI-81 kan plaatjes zonder wiskundige omwegen te voorschijn brengen en de docent hoeft geen (wiskundige) uitleg vooraf te geven van wat er te zien is. Leerlingen zijn heel goed in staat naar plaatjes te kijken en te vertellen wat ze zien. Dat ze dat niet in de juiste, wiskundige woorden doen is geen probleem. De leerlingen worden aangesproken op intuïtieve kennis die vervolgens in wiskundig geformuleerde kennis omgezet kan worden. Zo wordt een stukje wiskunde gefundeerd op kennis die de leerlingen al eigen is. En dat gaat beter met plaatjes dan met formules. Met de TI-81 zijn eenvoudig plaatjes te tekenen en dat maakt het mogelijk een invalshoek voor de les te kiezen die beter bij de kennis van de leerlingen aansluit.

Voorbeeldlessen

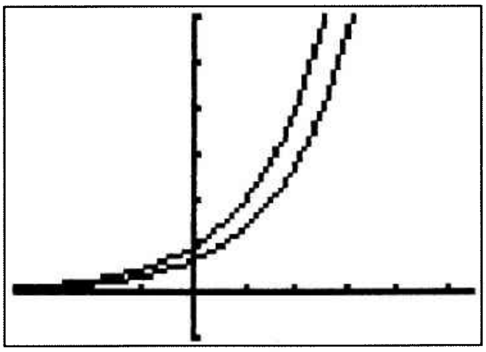
Voor zo'n les heb je dan wel geschikte plaatjes nodig. Niet elke grafiek laat zien wat er geleerd moet worden. Wat een goed plaatje is, verschilt per onderwerp. Geschikte plaatjes vormen daarom het eerste element van de voorbeeldlessen. Ik heb gezocht naar overzichtelijke grafieken, die de aandacht vestigen op een bepaald onderdeel van het functiebegrip. Daarnaast moeten de scherminstellingen handig gekozen worden. Het is mogelijk mooie coördinaten in beeld te krijgen door de range 'mooi' in te stellen. Instellingen van de range waarbij mooie coördinaten in beeld te krijgen zijn, ontstaan door voor de X-range een lengte te nemen die deler is van 95 (het aantal punten van het scherm in de breedte) en voor de Y-range één die deler is van 63 (het aantal punten in de hoogte). Dat legt beperkingen op aan de te gebruiken functies. Hoewel het gebruiken van 'mooie' functies indruist tegen de aard van het apparaat, is dat nodig zolang de leerlingen nog leren denken in termen van mooie uitkomsten. Ook kunnen radialen en een logaritmische schaalverdeling gesimuleerd worden. De voorbeeldlessen besparen docenten een hoop werk bij het zoeken van geschikte plaatjes. Vooraf wordt uitgelegd welke voorbereidingen met het apparaat nodig zijn. In de linkerkolom staan daarna de knoppen die tijdens de les ingedrukt moeten worden en de plaatjes die daar bij horen.

Wegwijzers langs de route

Plaatjes kijken gaat niet vanzelf. Om de leerlingen goed naar de plaatjes te laten kijken, moet hun blik op de relevante onderdelen gericht worden. Er zijn daarom wegwijzers nodig om de klas op de route te krijgen en te houden. Weldoordachte vragen bij de plaatjes kunnen fungeren als wegwijzer. Voor de voorbeeldlessen heb ik vragen gezocht, waarmee de leerlingen bij het kijken naar de plaatjes op het spoor van het onderwerp van de les gezet worden. Deze zijn in de rechterkolom verwerkt in een verzonnen dialoog tussen docent en leerlingen.

Het kijken wordt in gang gezet door geschikte *uitlokkers*: vragen die leerlingen aan het denken zetten en ze naar de juiste dingen laten kijken. Er bestaan verschillende typen uitlokkers. Afhankelijk van de soort les kunnen uitlokkers meer of minder open zijn. Ik geef hier twee voorbeelden van.

In een les in vwo 5 werd de formule voor de afgeleide van $y = 2^x$ gezocht. De leerlingen kregen het plaatje hieronder voorgeschoteld om het verband tussen de oorspronkelijke functie en de hellingfunctie te ontdekken.



De docent liet ze niet zomaar kijken maar stelde gerichte vragen: "Wat is de *vorm* van de hellingfunctie vergeleken met de oorspronkelijke?" Die was ongeveer hetzelfde, waarop de docent vroeg met welk getal 2^x *vermenigvuldigd* moest worden om de hellingfunctie te krijgen. Toen hadden de leerlingen al snel door dat je dat getal heel makkelijk bij de Y-as kon aflezen.

In een les in vwo 3 werd kennis over transformaties van de standaardparabool samengevat. De leerlingen wisten al waar het om ging en de docente kon naar aanleiding van een grafiek veel opener vragen stellen.
Ze tekende de grafiek van $y = a(x - p)^2 + q$ waarbij ze de waarden van de coëfficiënten vooraf in het apparaat had ingevoerd. Zonder dat ze hoefde aan te geven op

Voorbeeldles periodieke functies: sinusoïden

kennen: vermenigvuldiging van input met p geeft periode $2\pi/p$; vermenigvuldiging van output met a geeft amplitude $|a|$; verhoging van output met b geeft gemiddelde output b.

kunnen: bij functievoorschrift periode, amplitude en gemiddelde output van sinusoïde bepalen.

voorkennis: grafieken van *sinx*, *cosx*; transformeren functies.

vooraf op de TI.81 instellen

De parameters voor de zoekfunctie krijgen als volgt hun waarde:
2[sto ▶]A[enter] ; -1[sto ▶]B[enter]; 1,5[sto ▶]P[enter]

Radmode kiezen:
[mode], cursor met pijltjes naar 'rad', met [enter] wit op zwart maken.

Range instellen: [range], cursor met pijltjes naar grenzen bewegen, getallen invullen, eventueel met [del] fouten verwijderen, [enter]:
Xmin = -1 ; Xmax = 4 ; Ymin = -2 ; Ymax = 3

Functiebestand met [Y =] opvragen, met pijltjes cursor bewegen:
$Y_1 = \pi X$ (hoeft niet getekend te worden, dus de-activeren door cursor op = te zetten en met [enter] zwart op wit te maken, activeren gaat net zo)
$Y_2 = sinY_1$ (Y_1 opvragen met [2nd][vars][1])
$Y_3 = sinY_1+1$ (eerst de-activeren)
Functies veranderen: [del] voor verwijderen, [ins] voor invoegen van gegevens.

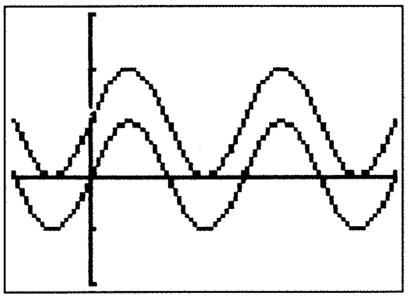
TI-81

y = *sinx* tekenen:
[graph]

klas

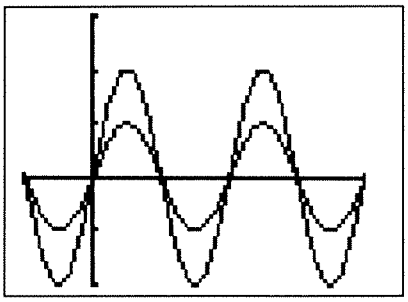
Uitleggen dat op de x-as waarden in π staan.

Y_3 activeren
[graph]



D(ocent): We gaan nu wat veranderen aan de formule en kijken wat er met de grafiek gebeurt.
Wat is er veranderd aan de grafiek?
L: Hij ligt hoger.
D: Hij ligt in zijn geheel hoger. Is de vorm veranderd?
L: Nee, hij is alleen verschoven.
D: De hoogte van een sinus-achtige grafiek – een sinusoïde – geef je aan met het begrip gemiddelde output. Dat is de horizontale lijn waar de grafiek omheen slingert.
D: Algemeen: $y = sin(x)+b$ heeft gemiddelde output b.

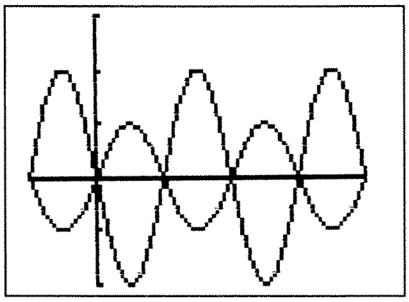
$Y_3 = 2sinY_1$
[graph]



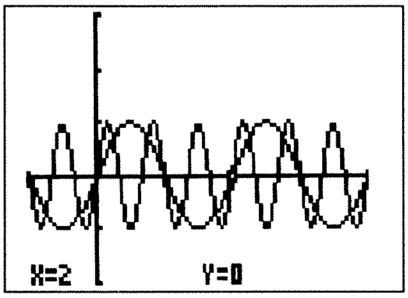
D: Nu gaan we de output vermenigvuldigen met een getal. We kiezen twee. Wat is de formule dan?
L: $y = 2sin(x)$ (wordt getekend)
D: Wat is er met de grafiek gebeurd?
L: Twee keer zo hoog geworden.
D: De grafiek slaat twee keer zo ver uit. Dat geef je aan met het begrip amplitude. De amplitude van een sinusoïde is de grootste uitslag ten opzichte van de gemiddelde output.

D. Ik teken nu *-2sinx*. Wat is de amplitude?
L: Twee?
D: Is er verder nog iets veranderd?
L: Hij is omgeklapt.
D: De grafiek begint met dalen in plaats van stijgen, zo-

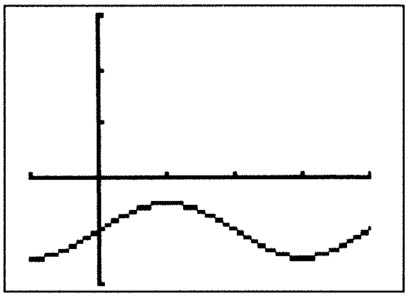
$Y_3 = -2sinY_1$
[graph}



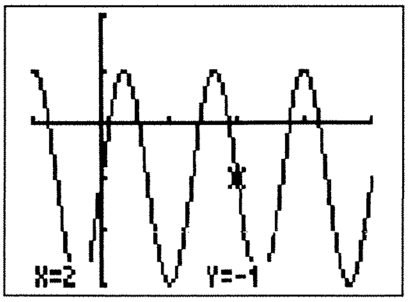
$Y_3 = sin3Y_1$
[trace]



$Y_2 = \bullet 5(sin.5Y_1) - 1$
[trace]



$Y_2 = AsinPY_1{+}B$
range: y = <-3, 2>



als de sinus. Hij is door de min gespiegeld in de x-as. Je hebt het spiegelbeeld van $2sinx$. Maar de amplitude is weer twee, want de uitslag ten opzichte van de gemiddelde output is dezelfde. De amplitude geef je altijd met een positief getal aan.
Algemeen: $y = asin(x)$ heeft amplitude $|a|$.

D: Wat kan er aan de sinus nog meer veranderen?
L: De periode.
D: Hoe zou je dat moeten doen?
L: ?
D: We hebben nog geen veranderingen aan de X gedaan. Wat gebeurt er met de grafiek als de periode kleiner of groter wordt?
L: Hij wordt uitgerekter.
D: Wat moet je dan doen met de functie?
L: Met een getal vermenigvuldigen.
D: Hij wordt breder of smaller als de periode verandert, voor een horizontale verandering moet je de input vermenigvuldigen. We nemen $Y = sin(3x)$.
Hoe is de periode veranderd?
L: Drie keer zo klein.
D: $y = sin(3x)$ heeft drie maal zo veel golven, dus de periode is drie keer zo klein. Wat is de periode?
L: Tweederde π.
(er kunnen nog meer geprobeerd worden)
D: $y = sin(x)$ heeft periode 2π; $y = sin(3x)$ heeft drie golven op hetzelfde stuk, na 2π is de grafiek drie keer herhaald. Eén golf is dus $2\pi/3$ lang en dat is de periode.

D: De begrippen periode, amplitude en gemiddelde output gebruik je om grafieken te beschrijven die van sinus zijn afgeleid. Als je de in- en output van $y = sin(x)$ verandert, veranderen periode, amplitude en gemiddelde output. Uit de getallen in het functievoorschrift van een sinusoïde kun je periode, amplitude en gemiddelde output afleiden.
Algemene regel: $y = asin(pt){+}b$ heeft periode $2\pi/p$, amplitude $|a|$, en gemiddelde output b.
D: $y = 0.5sin(0.5x) - 1$, wat weet je van de grafiek?
(Controle waarden periode, amplitude en gemiddelde output door onderzoek van de grafiek met trace.)

D: Nu moeten jullie met de grafiek de waarden bepalen van a, p en b van de formule $y = asin(px){+}b$.
D: Waar beginnen we mee, periode, amplitude of gemiddelde output?
D: Hoe bepaal je de getallen?
L: Amplitude is 2, want bovenin is hij 1 en onderin -3. Gemiddelde output is -1, want dat is de top min de amplitude. Periode is ongeveer $1{,}3\pi$.
D: Wat is het getal p dan?
L: Periode is $2\pi/p$, dus $p = 2\pi/1{,}3\pi = 1{,}5$.

welke onderdelen van de parabool de verschillende coëfficiënten betrekking hadden, vroeg ze welke waarden a, p en q hadden. Zonder omwegen zochten de leerlingen de coördinaten van de top. Nadat p en q bepaald waren wisten ze dat nu alleen de breedte van de parabool nog gevonden moest worden.

Naarmate het onderwerp de leerlingen beter bekend is, kunnen uitlokkers minder gericht zijn. Dat is bijvoorbeeld het geval bij samenvattende lessen, als de leerlingen al weten wat de relevante onderdelen van het plaatje zijn. Bij een nieuw onderwerp daarentegen, moeten uitlokkers sturend zijn. Ze geven aan waar de leerlingen naar moeten kijken: de vorm of de plaats van de grafiek; nulpunten, top of snijpunten.
De vragen van de docent mogen de oplossing niet verklappen. Het gaat erom dat de leerlingen zelf onder woorden brengen wat ze zien. Op wat ze zeggen, krijgen de leerlingen antwoord in de vorm van plaatjes. Met de TI-81 kan het kijken centraal blijven staan.

Openheid

De plaatjes in de TI-81 confronteren de leerlingen met de consequenties van hun gedachten. Een denkfout wordt zo meteen zichtbaar. Zo moesten de leerlingen van vwo 5 de machtsregel voor afgeleiden generaliseren naar gebroken en negatieve machten. De docent toonde het volgende scherm:

```
:Y1=X^N
:Y2=(X+0.001)^N
:Y3=(Y2-Y1)/0.00
1█
:Y4=
```

en vroeg of $Y3$ een goede benadering van de afgeleide opleverde. Daarop zei een leerling dat het getal 0.001 te klein was. De docent maakte er 5 van en koos voor N de waarde 2. De grafieken van $y = x^2$ en haar afgeleide waren welbekend en het plaatje toonde aan dat een delta van 5 niet goed kon zijn. De fout in de gedachtengang van de leerling werd zo eenvoudig aangetoond, terwijl zonder de TI-81 het tekenen van het plaatje nog een hele klus was geweest.
Doordat je zo gemakkelijk de ideeën van de leerlingen kunt oppakken, ligt het niet precies vast wat er in de les aan de orde komt. Bovenstaande excursie naar een delta met grootte 5 was vooraf niet gepland. De docent vond het wel zinvol hier even op in te gaan. Door de verrassende antwoorden kunnen er zijwegen ingeslagen worden. De route die bewandeld wordt heeft zo wel een duidelijke richting, maar is tamelijk breed.

Onverwachte bijdragen van leerlingen en het gemak daarop in te gaan, relativeren de noodzaak van uitgewerkte voorbeeldlessen. Ik denk dat het belangrijk is, dat de les een open structuur heeft. Het lijkt eigen aan gebruik van de TI-81 dat lessen onverwachte wendingen krijgen. Maar het probleem waar het in de les om begonnen is, moet centraal blijven staan. Al naar gelang de bijdragen van de leerlingen en de lesstijl van de docent kan er heen en weer gezwalkt worden. Dat mag, maar de docent moet de klas op het juiste spoor houden. Anders gaat ook het effect van de openheid verloren en verliezen de leerlingen de kern van de les uit het oog.

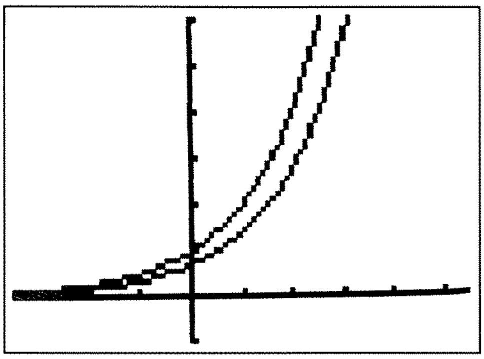
De TI-81 als katalysator

In mijn onderzoek bekeek ik niet alleen de mogelijkheden van het gebruik van de TI-81 voor de klas. Ik was ook geïnteresseerd in de invloed op de interactie tussen docent en leerlingen. Mijn conclusie was dat de TI-81 werkt als een katalysator voor de interactie tussen docent en leerlingen. Zowel leerlingen als docent worden geactiveerd.

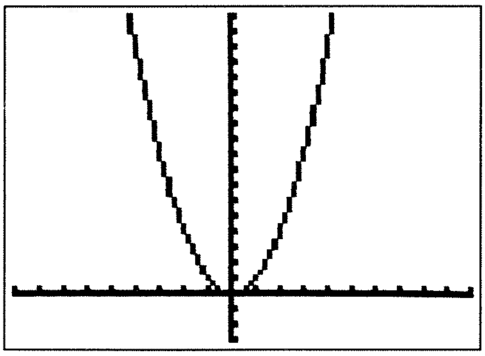
Leerlingen mogen meedoen
De leerlingen kijken plaatjes en worden gestimuleerd die te interpreteren. Gebruik van de TI-81 activeert de leerlingen vooral, doordat ze veel ruimte kunnen krijgen voor eigen inbreng. Hun antwoorden en suggesties kunnen snel en eenvoudig onderzocht worden. Zo kunnen de leerlingen bij de les betrokken worden. Een voorbeeld:
In vwo 3 behandelde ik de transformaties van de standaardparabool. We hadden al gezien wat er bij $y = x^2 + 5$ en $y = x^2 - 3$ gebeurde. Om een algemene regel voor $y = x^2 + b$ te onderbouwen, vroeg ik de leerlingen een functie te geven. Dat werd $y = x^2 - 2000$ met als resultaat een leeg scherm.
Ik vroeg waar hun mooie functie nu gebleven was. De leerlingen reageerden: “Hij zit ook helemaal onder” en “Kun je het scherm niet veranderen?” Ik stelde de range bij en de parabool kwam in beeld. Waardevol aan deze gebeurtenis was dat de leerlingen moesten nadenken over een situatie die ze zelf tot stand hadden gebracht.
Het is me opgevallen dat leerlingen snel doorhebben dat er wat met hun bijdragen gedaan kan worden. Ze kunnen hun ideeën onderzoeken en hun antwoorden toetsen. De leerlingen doen snel suggesties omdat ze kennelijk merken dat ze daar gemakkelijk respons op krijgen. Op die manier worden de leerlingen geactiveerd door het gebruik van het apparaat.

De docent moet bij de les blijven
De TI-81 houdt ook de docent actief, want de bijdragen van de leerlingen zijn nogal eens onverwacht. Ter plekke moet bekeken worden hoe daar iets nuttigs mee ge-

daan kan worden. De docent moet niet alleen de leerlingen activeren, maar tegelijk alert zijn op de bruikbaarheid van suggesties. Daarmee werd ik zelf in de eerste fase van mijn onderzoek geconfronteerd bij een demonstratie voor medestudenten. Ik had een les voorbereid over de afgeleide van $y = 2^x$, met als route het vinden van een vermenigvuldigingsfactor door $y = 2^x$ en haar afgeleide op elkaar te delen.



Bij het plaatje van beide grafieken stelde ik de vraag met welke transformatie de ene uit de andere kon zijn ontstaan. Daarop suggereerde iemand een horizontale verschuiving. Omdat ik daar niet op voorbereid was, moest ik even goed nadenken hoe die verschuiving dan te vinden was. Het vermoeden bleek juist te zijn en leidde zo heel mooi tot de formule $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$.
Ook een vwo 3 klas kan onverwachte dingen doen. Zo vroeg ik bij het plaatje van de standaardparabool zonder diepzinnige bedoelingen wat de top was.



Het bleek ineens dat dat nog niet helemaal duidelijk was, want volgens de leerlingen was die niet te zien. Waardoor ik alsnog moest gaan uitleggen wat de top van een parabool was en dat die wel degelijk in het plaatje zat.
Er zit iets tweeslachtigs in de rol van de docent bij gebruik van de TI-81 voor de klas. Aan de ene kant ligt het initiatief in handen van de leerlingen en kan de inbreng van de docent geminimaliseerd worden. Aan de andere kant moet de docent door zo'n open manier van lesgeven actief nadenken over de inhoud van de bijdragen van de leerlingen. Hij/zij heeft de mogelijkheid de leerlingen de illusie te geven slechts een intermediair tussen hen en het apparaat te zijn.

Besluit

De TI-81 kan natuurlijk niet alles en is niet perfect. Er zijn alternatieven in de vorm van software voor een pc met transview. De demonstratieset van de TI-81 is wel veel goedkoper (rond de vijfhonderd gulden). Nadeel is de beperkte beeldsterkte; een verduisterd lokaal is noodzakelijk. Het is een eenvoudig te bedienen apparaat waarmee je, dankzij een vrij lang snoer, de klas in kunt lopen.
Een les beschrijven als een af te leggen (didactische) route, roept associaties op met het meer gangbare gebruik van het begrip katalysator. Plaatjes tekenen zonder dat er zware algebraïsche exercities nodig zijn, maakt het mogelijk met de TI-81 voor de klas de didactische route loodvrij af te leggen.

Noten

[1] Zie bijvoorbeeld:
M. van Reeuwijk (1992), Een zakcomputer voor iedere leerling, *Nieuwe Wiskrant, 11* (3), 42-45.
M. Kindt (1992), Functieonderzoek begint met de grafiek I&II, *Euclides 67* (7, 8,) 200-204 en 227-230.
[2] Deze voorbeeldlessen zijn tegen kopiëer- en verzendkosten te verkrijgen bij: F.J. Dijksterhuis, Friesestraatweg 50, 9831 TD Aduard (05903-1255).

Themadag evolutie

Op *zaterdag 16 april 1994* organiseert de faculteit Wiskunde & Informatica van de Universiteit Utrecht een themadag voor docenten en leerlingen van 4 en 5 vwo. Als thema is *Evolutie* gekozen. Wiskunde en informatica spelen een belangrijke rol bij onderzoek (in verschillende disciplines) naar het verleden van onze wereld, maar ook bij het ontwerpen van toekomstscenario's en het doen van voorspellingen. Ook de evolutie van de wiskunde en de informatica zelf komt aan de orde. Het grootste gedeelte van het programma is op de leerlingen gericht; daarnaast wordt dit keer een speciaal docentenprogramma aangeboden.
Verder zal op deze dag ook de prijsuitreiking van de wiskunde A-lympiade plaatsvinden.

Wilt u in februari 1994 informatie en aanmeldingsformulieren ontvangen, schrijft u dan een briefje met uw naam (eventueel de naam van uw school) en adres onder vermelding van 'Themadag 1994' aan het Freudenthal instituut, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht.