Grafen en matrices op de computer

Een experiment in 5 vwo

L.M. Doorman
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

Inleiding

Het onderwerp Leslie-matrices werd door het Hewet-project geïntroduceerd in wiskunde A voor het voortgezet onderwijs. Eén van de essenties van wiskunde A is het *mathematiseren.* Onder mathematiseren wordt dan vooral verstaan (Van der Kooij, 1986):

- Verschralen van de werkelijkheid om een wiskundig model op een praktijkprobleem te *kunnen* zetten.
- Het kiezen van het wiskundig model.
- De wiskundige technieken binnen het gekozen model gebruiken om tot een oplossing te komen.
- Het terugvertalen naar de werkelijkheid, met daaraan gekoppeld een evaluatie.

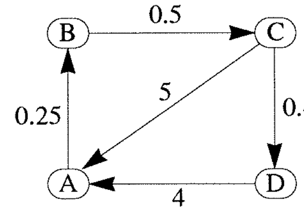
Bij het onderwerp Leslie-matrices komen al deze aspecten naar voren. De matrix is het model. De wiskundige technieken zijn de matrix-operaties: matrix $*$ vector en machtsverheffen. Het voorspellen van het lot van een populatie is de terugvertaling naar de realiteit. Bovendien hebben de matrix-operaties hier een betekenis. Het wordt inzichtelijk waarom de operaties hun specifieke vorm hebben. Het gebruik van de werkelijkheid heeft hier dus twee redenen. Ten eerste is het noodzakelijk om alle aspecten van het mathematiseren te oefenen en ten tweede is het een didactisch hulpmiddel bij het introduceren van de wiskundige technieken.
Problemen bij het onderwerp Leslie-matrices rijzen snel als het grote matrices betreft. Dit is met realistische contexten vaak het geval. Het rekenen met grote matrices en het doorrekenen van een groot aantal generaties is tijdrovend. Tijd die ten koste gaat van de andere vaardigheden bij dit onderwerp. Het spreekt voor zich dat een computer, van welk formaat dan ook, hier van dienst kan zijn.
Onlangs is op het Freudenthal Instituut het programma *Grafen&Matrices* ontwikkeld dat onder andere bij Leslie-matrices kan worden gebruikt. De resultaten van een klein experiment zijn zeer hoopgevend en kunnen dit onderwerp wellicht nieuw leven inblazen.
Eerst volgt hier een korte beschrijving van het onderwerp Leslie-matrices, gekoppeld aan de voor- en nadelen van het gebruik van een graaf en van een matrix.

Leslie-matrices

Leslie-matrices worden gebruikt voor het onderzoeken van de groei van leeftijdsklassen van een populatie. In de figuur hieronder is een Leslie-matrix van een konijnenpopulatie met vier leeftijdsklassen afgebeeld. Iedere leeftijdsklasse staat voor een jaargang van deze konijnen. Ze worden niet ouder dan drie jaar. De getallen zijn afgerond, dit betreft namelijk een introductie op het onderwerp uit de werkbladen. Er is gegeven dat 25% van de nuljarigen (A) hun eerste levensjaar overleeft. Van de éénjarigen (B) overleeft 50% en van de tweejarigen overleeft 40%. Verder brengt ieder tweejarig konijn gemiddeld vijf nakomelingen op de wereld en ieder driejarig konijn vier:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Een matrix



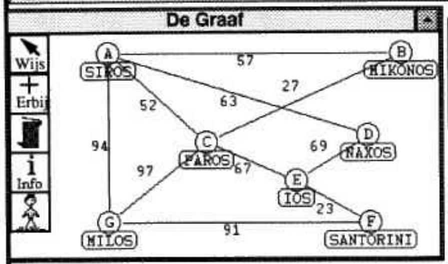
Een graaf

Uit een artikel in de Wiskrant van november 1982 blijkt dat destijds vooral aan de matrix als model gedacht werd: *Wat je wilt, kunt en moet doen is het oefenen in het opstellen van zo'n matrix* (de Lange en Vonk, 1982). Geen wonder. Het onderwerp is Leslie-matrices. Maar geeft de bijbehorende graaf niet een veel duidelijker beeld? In het Hewet-rapport staat: *De betekenis van diverse matrix-operaties in verschillende contexten zal voldoende aandacht moeten krijgen en verder zal het verband van matrices met grafen en netwerken een rol kunnen spelen.* Het verband tussen matrices en grafen bij dit onderwerp betekent echter vaak éénrichtingsverkeer: gegeven de graaf of een situatiebeschrijving, stel de bijbehorende matrix op. De keuze wordt meestal niet aan leerlingen overgelaten. Een belangrijke reden om leerlingen een matrix op te laten stellen is om ermee te gaan rekenen. Met de graaf kan dat echter ook, zeker op het niveau van havo en vwo wiskunde A. Het is zelfs

Enkele mogelijkheden van het computerprogramma Grafen&Matrices

CYCLADEN.MG

Bestand Vensters Reken Plaatje Herstel F1=Help



De Verbindingen

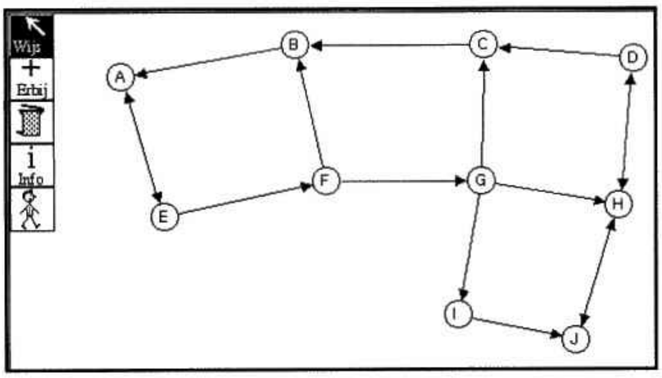
	A	B	C	D	E	F	G
A		57	52	63			94
B	57		27				
C	52	27			67		97
D	63				69		
E			67	69		23	
F					23		91
G	94		97			91	

De Kortste Routes

	A	B	C	D	E	F	G	
A		57	52	63	119	142	94	527
B	57		27	120	94	117	124	539
C	52	27		115	67	90	97	448
D	63	120	115		69	92	157	616
E	119	94	67	69		23	114	486
F	142	117	90	92	23		91	555
G	94	124	97	157	114	91		677

Hiernaast staat een graaf van een aantal Griekse eilanden uit de Egeïsche zee. Standaard zijn de graaf en de verbindingsmatrix in beeld. Het is ook mogelijk om een afstandstabel op te vragen, hier is dat het onderste venster op het scherm. Veranderingen in één van de vensters zorgen ervoor dat ook de andere vensters aangepast worden. Het is ook mogelijk om rondreizen langs de eilanden te maken. Het programma toont dan de route en de lengte van de route.

Dit is een gedeelte van een stratenplan. In de meeste straten is alleen éénrichtingsverkeer toegestaan. Hieronder staan de matrix met de verbindingen en de matrix met de kortste routes tussen de kruispunten.
In de werkbladen staat dat de straat FG wordt opgebroken. De vraag is welke straat of straten tweerichtinsverkeer moeten toestaan opdat alles weer bereikbaar is. Leerlingen kunnen experimenteren of hun oplossingen controleren met het programma.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A		1			1					
B			1			1				
C				1			1			
D								1		
E	1									
F					1					
G						1				
H				1			1			1
I							1			
J								1	1	

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	2	1	2	3	1	2	3	4	6	5
B	3	4	1	2	2	1	2	3	5	4
C	4	5	6	1	3	2	1	2	4	3
D	5	6	7	2	4	3	2	1	3	2
E	1	2	3	4	2	3	4	5	7	6
F	2	3	4	5	1	4	5	6	8	7
G	3	4	5	6	2	1	6	7	9	8
H	4	5	6	1	3	2	1	2	2	1
I	4	5	6	7	3	2	1	8	10	9
J	5	6	7	2	4	3	2	1	1	2

Het programma is nog niet te koop. Het is wel beschikbaar voor experimenten. Informatie hierover kunt u krijgen op het Freudenthal instituut bij Michiel Doorman, tel. 030 - 611611.

eenvoudiger om vanuit de graaf de volgende populatie te berekenen dan om via een matrixvermenigvuldiging dit te doen. Op den duur ben je natuurlijk sneller klaar met machten van matrices. Vooral als je beschikt over bijvoorbeeld een grafische rekenmachine waarmee je deze berekeningen kunt uitvoeren.
In [Schmidt, 1989] beschrijft Schmidt een toepassing van overgangsmatrices. De situatie modelleert hij met een graaf en hij laat zien hoe je hiermee de volgende toestand berekent. De matrix wordt pas functioneel als een vermoeden over een trend moet worden aangetoond. Dan heb je ook direct zware middelen als eigenwaarden en eigenvectoren nodig. Het lijkt dat de matrix van pas komt zodra je een trend wilt voorspellen.
In het vervolg van dit artikel zal echter blijken dat het ook mogelijk is om eenvoudig een trend te bepalen met de gegevens in de graaf, zonder de matrix.
Het ligt daarentegen voor de hand om bij het onderwerp Leslie-matrices toch matrices te gebruiken. Dit onderwerp zit namelijk ook in het leerplan om de matrixoperaties een betekenis te geven. Het is voor berekeningen van 1, 2 of 3 generaties weliswaar natuurlijker en eenvoudiger om met de graaf te rekenen, maar het maakt de matrixoperaties inzichtelijk. In de eerste rij van de matrix staan de waarden van de pijlen naar A, in de tweede rij de waarden van de pijlen naar B, etc. Zonder dat je de matrix voor de vector zet, voer je toch al snel een matrixvermenigvuldiging uit. Al met al voldoende redenen om het rekenen met een matrix èn met een graaf aan bod te laten komen.
Tot slot valt op dat bij wiskunde A begrippen als eigenwaarden en eigenvectoren slechts impliciet aan de orde komen. Hooguit wordt intuïtief duidelijk gemaakt dat volgens een Leslie-matrix populaties op den duur groeien, uitsterven of stabiel blijven. Dit is een bijzondere eigenschap van dit model. In de werkelijkheid veranderen gedurende de tijd vaak de overlevingskansen en de hoeveelheden nakomelingen.

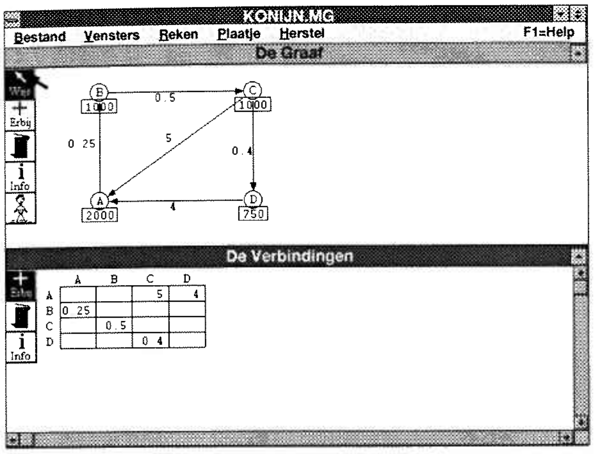
Computergebruik bij Leslie-matrices

De eerste Hewet-experimenten startten in het begin van de tachtiger jaren. Het computergebruik stond destijds nog in de kinderschoenen. Men was optimistisch over de veranderingen: *Computers komen de school binnen; de periode van onderwijs zonder computers wordt binnenkort afgesloten* (Vonk, 1981). In het Hewet-project wordt geprobeerd het lesmateriaal met computergebruik te ondersteunen. Computers werden hier gebruikt voor het uitvoeren van een groot aantal matrixvermenigvuldigingen. We schrijven 1982; een experimentele serie lessen met computers rond Leslie-matrices:
Haarlem gebruikte centrale verwerking door het OC. (...) Schrapfouten blijven een probleem bij centrale gegevensverwerking, maar het programma levert wel altijd een resultaat door bij ontbrekende gegevens aan te vullen. Dit maakt de fouten juist leerzaam. Verder zal de tijd die de postzending vergt het noodzakelijk maken dat deze leerstof wordt afgewisseld met een ander onderwerp. (de Lange en Vonk, 1982)
OC staat voor het Onderwijs Computercentrum waar toen een computer stond, destijds een begrip, nu vergeten. Tegenwoordig hebben alle scholen hun eigen computers, hoewel de meeste van deze computers momenteel ook al weer verouderd zijn. Nog slechts enkele scholen zijn overgeschakeld op de hedendaagse systemen die ook in de basisscholen staan. Deze systemen zijn voorzien van MsWindows. Programma's die werken onder MsWindows presenteren zich volgens de MsWindows-standaard en zijn met een muis te bedienen. De standaard en de muis maken de bediening eenvoudiger dan die van de meeste conventionele software.
Op het Freudenthal instituut is het computerprogramma *Grafen&Matrices* ontwikkeld. Een programma waarmee je grafen kunt tekenen en matrices kunt veranderen. Als je iets in de matrix verandert, dan verandert dat ook in de graaf. En omgekeerd, als je iets in de graaf verandert dan verandert er ook iets in de matrix, tenzij het slechts het verplaatsen van een knoop betreft.
De matrix geeft je wiskundige technieken om met het model verder te rekenen. Je kunt machten van matrices berekenen en kijken wat er met een populatie zal gebeuren. Andere weergaven van de situatie die je in beeld kunt krijgen zijn een bevolkingspiramide en een grafiek van de populatiegroottes tegen de tijd. Als je doorrekent worden deze weergaven simultaan aangepast.
Bij het programma zijn werkbladen gemaakt die op veel leerstof aansluiten, vanaf het nieuwe onderwerp rond grafen en tabellen in de onderbouw tot aan het werken met Leslie-matrices bij wiskunde A op het vwo. De schermafdrukken op de pagina hiernaast geven een beeld van de mogelijkheden van het programma. Een versie werkt onder MsWindows en een aangepaste versie op zogenaamde AT's (met muis). Hier komen verder alleen de mogelijkheden van het programma aan bod die betrekking hebben op Leslie-matrices.

De konijnen in de les

Het computerprogramma *Grafen&Matrices* biedt leerlingen twee mogelijkheden om een probleem weer te geven: de graaf en de matrix. Als ze één van de twee kiezen geeft het programma automatisch de andere. Het verband tussen de graaf en de matrix is dan direct zichtbaar. Vervolgens kun je met het model gaan rekenen en kijken wat er op den duur met de populatie gebeurt. Eventueel kun je een kleine verandering aanbrengen en de gevolgen onderzoeken. Met het programma hebben een aantal experimenten plaatsgevonden. Telkens met slechts een paar leerlingen, omdat er geen computerlokaal met MsWindows-machines voorhanden was. Het laatste experiment was op het college de Klop te Utrecht, waar drie leerlingen uit 5 vwo A gedurende drie lessen met het programma werkten. Eén van de opgaven

uit hun werkbladen betrof bovenstaand voorbeeld van de konijnen.
Eerst tekenen ze de graaf, de matrix verschijnt direct op het scherm. Na het tekenen van een nieuwe knoop wordt de matrix groter en na het tekenen van een verbinding verschijnt op de overeenkomstige plek een 1 in de matrix. In de matrix en in de graaf kun je de waarden voor de verbindingen veranderen. In de graaf kun je aantallen bij de leeftijdsklassen invoeren:



In de graaf is te zien dat de huidige verdeling van de populatie (2000, 1000, 1000, 750) is. De tijdseenheid is een jaar. Het programma kan de verdeling van volgend jaar berekenen. Tijdens het rekenen veranderen de aantallen in de labels van de knopen.
De eerste vraag in de werkbladen is: bereken hoeveel nakomelingen de nuljarigen van nu uiteindelijk zullen produceren. Een leerling maakt een goede berekening: 2000 nuljarigen zorgen voor 1650 nakomelingen. Hieraan verbindt hij geen consequenties voor het lot van de konijnen. Om het lot te onderzoeken gaat hij rekenen en kijkt hoe de aantallen in de graaf veranderen:

$$\begin{bmatrix}2000\\1000\\1000\\750\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}8000\\500\\500\\400\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}4100\\2000\\250\\200\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}2050\\1025\\1000\\100\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}5400\\512.5\\512.5\\400\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}4162.5\\1350\\256.25\\205\end{bmatrix}$$

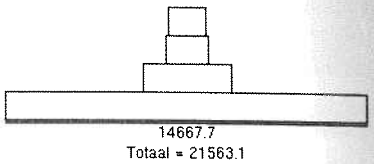
Eerst denkt hij dat de populatieomvang zal stijgen, maar na verloop van tijd is hij daar niet meer zo zeker van. In deze representatie kun je helaas niet de huidige aantallen vergelijken met die van bijvoorbeeld de beginpopulatie (tenzij je ze opschrijft). De andere twee leerlingen werken samen en hebben al snel een grafiek erbij gehaald. Een extra venster verschijnt op het scherm zodat je de graaf en de grafiek van de populatieomvang in de loop der tijd tegelijk kunt bekijken. Als je dan een volgende generatie laat berekenen, wordt de grafiek getekend. Je kunt kiezen tussen een grafiek van iedere leeftijdsklasse of een grafiek van de totale populatieomvang of een bevolkingspiramide. Ze bekijken de grafiek van het totaal.

In de grafiek herkennen ze direct het lot van de konijnen: "Sterft uit."
Hierna wordt bekenen wat met de konijnen zal gebeuren als de overlevingskans van de tweejarigen 0,9 wordt (als gevolg van beschermende maatregelen). De grafiek verschijnt op het scherm. "Het lijkt wel exponentieel!" roept één van de twee.

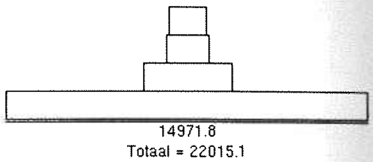
Wat gekund had

Vragen naar de groeifactor stonden niet in de werkbladen, maar kunnen dan wel worden gesteld. Met de getallen bij de bevolkingspiramide is namelijk de groeifactor te berekenen:

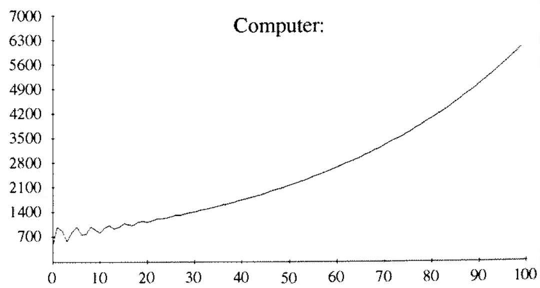
50e generatie:

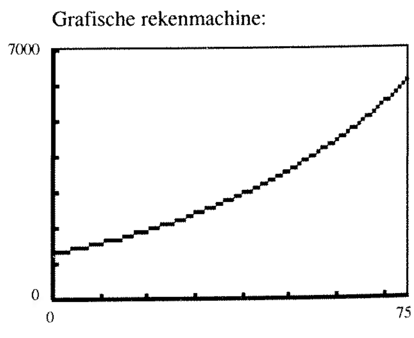


51e generatie:



Zo kan het begrip eigenwaarde hier in ieder geval impliciet aan de orde komen. Bovendien, als je een groeifactor berekend hebt, kun je die snel controleren met behulp van bijvoorbeeld een grafische rekenmachine. Laten we even uitgaan van de situatie waarin een leerling op dit moment zijn grafische rekenmachine uit de tas haalt. Hier is de groeifactor ongeveer 1,02 (= 22015,1 / 21563,1). De populatie groeit exponentieel vanaf de 25e generatie. Na het instellen van het gewenste domein [0, 75] en bereik [0, 7000] bij de grafische rekenmachine, geeft dit de volgende plaatjes:

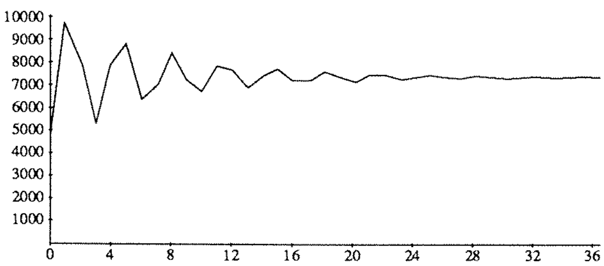




Bij de rekenmachine is dan F(X) = 12821,6 A^X, waarbij 12821,6 de populatieomvang van de 25e generatie is en A de groeifactor: 22015,1 / 21563,1.

Verder met de les

Tot slot moeten ze bepalen hoeveel gejaagd mag worden opdat de populatie stabiel blijft. Ze vinden dat 75% van de 2-jarigen moet overleven voor het volgende verloop:



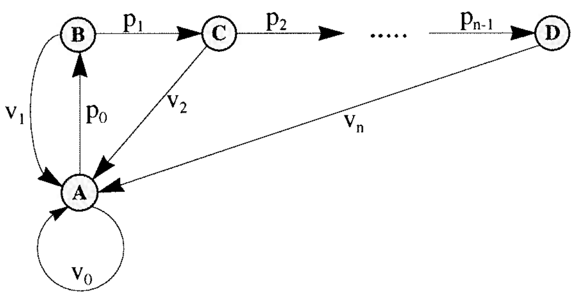
Voldaan kijken ze naar het scherm.

Deze 75% vonden ze door verschillende overlevingskansen te proberen. Het blijkt echter voldoende om te berekenen hoeveel nakomelingen de nuljarigen uiteindelijk zullen produceren. Als dat minder is dan de startomvang zal de populatie op den duur uitsterven, als het meer is, dan zal de populatie op den duur gaan groeien en als het precies evenveel is dan zal er evenwicht ontstaan. Het bewijs hiervoor is niet eenvoudig en maakt gebruik van de karakteristieke polynoom van de matrix.

De wiskunde

In deze paragraaf gaan we iets dieper in op de wiskunde die met dit onderwerp te maken heeft.

De algemene vorm van een Leslie-graaf:



Een eigenvector *ev* van de matrix *M* bij deze graaf is een populatieverdeling die stabiel is, of in de volgende generatie een veelvoud van zichzelf is: $M{\cdot}ev = \lambda{\cdot}ev$. In beide gevallen blijft de verhouding tussen de leeftijdsklassen onderling hetzelfde. Het getal λ is de eigenwaarde van eigenvector *ev*. De eigenwaarde en eigenvector van een matrix zijn vooral bij Leslie-matrices belangrijk. Ze zijn namelijk bepalend voor de populatiegrootte en de onderlinge verhoudingen binnen de populatie op de lange termijn. De groei van de populatie op de lange termijn wordt bepaald door de grootste absolute eigenwaarde $\bar{\lambda}$ (de dominante eigenwaarde) van *M*. Dat is dan precies de groeifactor uit de vorige paragraaf. De verhoudingen tussen de leeftijdsklassen worden bepaald door de eigenvector *ev* bij $\bar{\lambda}$.

Het blijkt dat bij Leslie-matrices altijd slechts één van de eigenwaarden positief is, de andere zijn negatief of complex en zijn in absolute waarde kleiner dan die positieve eigenwaarde (zie Cullen, 1985). Bovendien blijkt er een verband te bestaan tussen $\bar{\lambda}$ en de *overlevingsverwachting* $\bar{p}_0$ van de populatieklasse A. Deze overlevingsverwachting $\bar{p}_0$ is de kans om van populatie klasse A, weer in de populatieklasse A terecht te komen. Met andere woorden de som van: de kansen om in iedere populatieklasse te komen vermenigvuldigd met het aantal kinderen dat vanuit die klasse geproduceerd wordt:

$\bar{p}_0 = v_0 + p_0{*}v_1 + p_0{*}p_1{*}v_2 + ... + p_0{*}p_1{*}...{*}p_{n-1}{*}v_n$ (volg de cyckels in de graaf).

Het blijkt dat als $\bar{p}_0 > 1$ dan is $\bar{\lambda} > 1$ en als $\bar{p}_0 < 1$ dan is $0 < \bar{\lambda} < 1$. Dit is van belang voor het model, omdat een $\bar{\lambda} > 1$ betekent dat de populatie op den duur zal groeien en anders zal uitsterven. Een schets van het bewijs.

Met volledige inductie kun je aantonen dat het karakteristieke polynoom van een Leslie-matrix de volgende vorm heeft:

$p(\lambda) = \lambda^{n+1} - v_0\lambda^n - p_0v_1\lambda^{n-1} - .... - p_0p_1p_2\cdots p_{n-1}v_n$

De nulpunten van het karakteristieke polynoom geven de eigenwaarden van de matrix. In dit polynoom is al de overlevingsverwachting te herkennen.

Stel nu dat $\bar{p}_0 > 1$, dan is $p(1) = 1 - v_0 - p_0v_1 - .... - p_0p_1p_2\cdots p_{n-1}v_n = 1 - \bar{p}_0$ en dus $p(1) < 0$. Vervolgens garandeert de vorm van het karakteristieke polynoom (de hoogste macht heeft een positieve coëfficiënt) dat er een nulpunt voor $\lambda > 1$ is en dus is $\bar{\lambda} > 1$.

Als $\bar{p}_0 < 1$, dan is $p(1) > 0$ en $p(0) < 0$ en dus is er een nulpunt tussen 0 en 1 en dus is $0 < \bar{\lambda} < 1$.

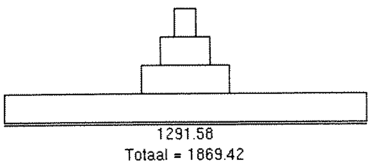
Deze overlevingsverwachting is met de graaf snel te berekenen. De overlevingsverwachting van de nuljarige konijnen in de vorige paragraaf is:

$0{,}25 * 0{,}5 * 5 + 0{,}25 * 0{,}5 * 0{,}4 * 4 = 0{,}825$.

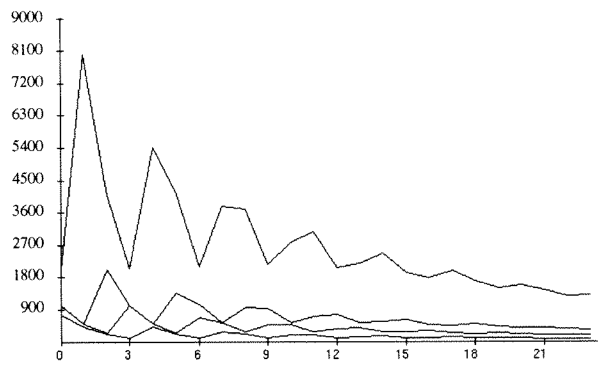
De dominante eigenwaarde zal dus kleiner dan één zijn en de populatie zal op den duur uitsterven. Zo is dus met de graaf snel te bepalen of de populatie op den duur zal uitsterven of zal groeien.

In de vorige paragraaf werd niet ingegaan op het verband tussen hogere machten van de Leslie-matrix en de eigenvector van de matrix. Iedere Leslie-matrix heeft een dominante reële eigenwaarde. Dus als er een Lesliematrix *M* en beginwaarde *v* gegeven zijn, dan is er een eigenvector met een dominante reële eigenwaarde. Dat wil zeggen dat op den duur de onderlinge verhoudingen tussen de leeftijdsklassen, de verhoudingen van de eigenvector *ev* bij $\bar{\lambda}$ benadert: $M^n * v \approx a * ev$ (met *n* groot genoeg en *a* een scalar). Dit geldt voor iedere beginwaarde *v*. Als je voor *v* de vector (1, 0, .., 0) neemt, dan zie je dat de eerste kolom van M^n de vector *ev* moet benaderen. Hieronder zie je de 22^e macht van de matrix, en de bevolkingspiramide van de 23^e generatie van de konijnen:

	A	B	C	D
A	0.093	0.325	0.529	0.305
B	0.019	0.093	0.163	0.092
C	0.011	0.038	0.093	0.06
D	0.006	0.018	0.031	0.018



In de grafiek zijn ook de verhoudingen tussen de leeftijdsklassen op den duur te zien:



Wat voegt de computer toe?

Een reden die in 1982 aanleiding gaf voor het gebruik van computers is nu nog steeds geldig. De computer kun je het rekenwerk laten doen. Met grote matrices vele generaties berekenen is geen probleem. Dit maakt het onderwerp levendiger en realistische contexten hoef je in de klas niet te vermijden.
Doordat het programma niet stuurt kun je leerlingen *zelf* laten kiezen hoe zij tot een antwoord willen komen. Ze kunnen eerst een aantal keer de volgende generatie laten berekenen en proberen de aantallen in de graaf te interpreteren, of bijvoorbeeld direct de grafiek erbij halen en hierin aflezen wat de toekomst van de populatie is. Door deze vrijheid kunnen ze zelf de verschillende methoden op hun waarde beoordelen en ontdekken welke aanpak voor welke doeleinden het meest geschikt is. Bovendien motiveert een trend die ze zelf gevonden hebben meer voor verder onderzoek dan een gegeven trend of grafiek.
Dankzij de snelle feed-back van het programma worden leerlingen niet afgeleid door ingewikkelde of tijdrovende berekeningen. Zo krijgen ook de andere vaardigheden die met dit onderwerp gemoeid zijn de aandacht. Verbanden zijn direct te zien en het begrip kan zo snel verkregen worden.
Bovendien blijkt uit dit experiment de waarde van het met z'n tweeën werken achter één computer. Er gebeurt iets op het scherm wat ze samen moeten verklaren en samen moeten ze strategieën uitzetten voor het vervolg. Als de één zegt: "Het lijkt wel exponentieel!", dan is dit ook een waardevol moment voor de ander.

Met het programma experimenteren leerlingen en bekijken ze snel veel verschillende gevallen. Door het werken met het programma leren leerlingen de gevolgen van een situatie te onderzoeken en de informatie waar ze om vragen, te interpreteren. Vervolgens moeten ze de situatie kunnen veranderen om bijvoorbeeld uit te zoeken wanneer een evenwicht optreedt. Dit experimenteren kan eerst in het wilde weg, maar op een gegeven moment moet er wel een redenering aan vooraf gaan. Twee, wellicht herkenbare problemen bij zulke processen zijn:
1. Hoe voorkom je dat leerlingen maar wat proberen en min of meer toevallig een antwoord vinden?
2. Tijdens het experimenteren van de leerlingen worden in een betrekkelijk korte tijd allerlei conclusies getrokken en hypothesen geformuleerd naar aanleiding van wat er op het scherm gebeurt. Hoe zorg je ervoor dat hiervan iets wordt vastgelegd? Het moet voor de leerlingen mogelijk zijn om later iets van dat proces terug te vinden zodat niet alles bij het verlaten van het computerlokaal vergeten is.
De vraagstelling in de werkbladen moet deze problemen ondervangen. Leerlingen nemen soms over wat ze op het scherm zien en schrijven de betekenis of de interpretatie erbij. Ook wordt van ze gevraagd om vooraf te formuleren wat ze denken dat er gebeuren zal, hetgeen ze daarna met het programma kunnen controleren.

Conclusies

Belangrijke aspecten van wiskunde A als het modelleren en het interpreteren en vergelijken van de verschillende weergaven kunnen met het programma *Grafen&Matrices* een meer prominente plaats krijgen. De graaf is een heel overzichtelijk model voor de situaties die hier genoemd zijn. Bij deze situaties is er op den duur sprake van een trend. Die is in één oogopslag te zien in de grafiek of in de bevolkingspiramide, verder is het verband tussen machten van de matrix en meerstapswegen in de graaf op het scherm te volgen.
De begrippen eigenvector en eigenwaarde komen met zo'n computerprogramma in ieder geval impliciet binnen het bereik van het onderwijs. Dat er sprake is van exponentiële groei zie je in de grafiek. In de piramide, die op den duur nauwelijks nog van vorm verandert, zie je de vaste verhouding tussen de leeftijsklassen.

Literatuur

H. v.d. Kooij (1986), Wiskunde A en het examen, *Nieuwe Wiskrant 5* (4), 57-60.
J. de Lange Jzn. en G. A. Vonk (1982), Klapmutsen in gevaar? *Nieuwe Wiskrant 2* (2), 44-52.
G. A. Vonk (1981), Onderwijzen ondanks computers? *Nieuwe Wiskrant 1* (1), 54-56.
M. R. Cullen (1985), *Linear modals in biology*, Ellis Horwood, Chichester.
V. Schmidt (1989), Overgangsmatrices, *Euclides*, *64*, 94-198.