

Meetkunde als omgeving voor redeneren

N. C. Verhoef

Hogeschool Windesheim, Zwolle

Meetkunde is weer terug op alle niveaus van het wiskundeonderwijs. In W12-16 is er aandacht voor de kijkmeetkunde, en in de bovenbouw komt de ruimtemeetkunde weer volop aan bod.

De Lerarenopleiding in Zwolle heeft het vak Meetkunde al vanaf de start, in 1979, een belangrijke plaats gegeven. We beginnen met Meetkunde 1, planimetrie. Vervolgens komt Meetkunde 2, meetkunde in de ruimte. In de hogere jaren kennen we als vervolg daarop de vakken Lineaire Algebra, Perspectief, Beschrijvende Meetkunde, Landmeetkunde, Projectieve Meetkunde, Transformatie Meetkunde en Analytische Meetkunde.

Inmiddels zijn we ruim twaalf en een half jaar verder. Op dit moment ervaren we een aantal problemen die zich toespitsen op de ruimtemeetkunde.

We ontdekten dat 'redeneren' een abstracte vaardigheid is, die in de loop der jaren steeds moeilijker is geworden voor onze studenten. Bovendien ontdekten we bij hen een gebrek aan voorstellingsvermogen.

Last but not least, waren het vooral meisjes die moeite hadden met meetkunde in de ruimte. Dat leverde hen ook een blokkade op bij het leren van lineaire algebra, omdat uitgegaan wordt van ruimtelijk inzicht. In 1991 werd dit laatste probleem zo groot, dat in een groep van twintig studenten vier van de acht meisjes na twee jaar hun propaedeuse niet haalden.

Het is natuurlijk niet zo, dat wij aan dit probleem in al die jaren niets gedaan hebben. Het probleem is echter ingewikkeld.

Meetkunde 1 wordt gegeven als het vak Bewijzen achter de rug is. Bij Meetkunde 2 wordt verondersteld dat de studenten kunnen redeneren in meetkundige contexten. Dit laatste is een onderdeel van het vak Bewijzen. Op het vak Meetkunde 2 volgt dan weer het vak Lineaire Algebra.

De onderdelen van het vak Bewijzen zijn de volgende:

- het kennen van hulpmiddelen bij het redeneren
- het kennen van regels voor een goed bewijs: logica en natuurlijke taal
- waarheidstabellen van samengestelde uitspraken
- het kennen en kunnen hanteren van bewijsschema's:

- syllogisme, modus ponens, geval onderscheiding
- direct bewijs
- bewijs uit het ongerijmde
- volledige inductie, het kunnen vinden van een bewijs: inductief redeneren
- systematische aanpak van een bewijs.

Bij het vak Bewijzen worden vooral voorbeelden uit de meetkunde gebruikt, zoals:

1. Bolmeetkunde:
Wat is nu een rechte lijn op de bol?
Gelden nu dezelfde definities nog?
Wat verstaan we dan onder evenwijdigheid?
Wat is de som van de hoeken van een rechthoek op de bol?
2. Bewijs dat twee driehoeken die vijf van de zes elementen (hoeken en zijden) gelijk hebben, toch niet congruent hoeven te zijn.
3. In hoeveel delen wordt de ruimte door vijf vlakken verdeeld?
In hoeveel delen wordt de ruimte door n vlakken verdeeld?

De onderdelen van het vak Meetkunde 1 zijn de volgende:

- het kunnen hanteren van bewijsschema's
- het kunnen hanteren van gelijkvormigheid en congruentie
- het kunnen construeren met slechts potlood, passer, liniaal
- hoeken, bogen, in-, om-, en aangeschreven cirkels
- koordenvierhoeken, raaklijnenveelhoeken en de Gulden Snede.

Als werkvorm gebruikten we het presenteren aan elkaar, als oefening voor het leraarsberoep. Inmiddels lukt dat niet meer. De studenten die de presentatie voorbereiden kunnen de stof niet meer overbrengen. Ze kunnen geen vragen beantwoorden en verzanden in de theorie van het vak.

De onderdelen van het vak Meetkunde 2 zijn:

- het construeren van doorsneden

- het construeren van snijpunten, lijnen, vlakken
- het construeren van afstanden van kruisende lijnen
- het construeren van hoeken van (kruisende) lijnen, van lijnen en vlakken, en van twee vlakken
- het construeren van uitslagen en tenslotte cilinders, kegels en bollen.

We werkten in het begin klassikaal, maar de verschillen tussen de studenten werden zo groot, dat aanpassing nodig was. We probeerden een serie alternatieve werkvormen.

Hoe ging het?

In de beginperiode lieten we, in de tijd dat het mode was om met sheets en overheadprojectoren te werken, de studenten aan elkaar presenteren.

Die aanpak leverde voor onszelf heel wat creatieve oplossingen op, het was soms net een stripverhaal, kleurrijk en de sheets kunstzinnig over elkaar heen geplakt. Maar er was een categorie studenten die aan niets anders toekwam dan overpennen. Ze hoorden niets en zagen niets, ze schreven alleen maar over. En vaak waren dat meisjes.

Later wilden we studenten zelf modellen laten maken, beïnvloed door de leerpsychologie die uit wil gaan van materieel handelen. Slechts een enkeling kregen we zo gek! Het leek wel of ze zich voor elkaar schaamden. We hoorden wel de verzuchting: "Oh, dat doe ik thuis wel, op mijn gemak, daar heb ik een heel handig model."

Om die gêné tegen te gaan zetten we zelf modellen in de klas. Een draadmodel van een kubus, van 1 bij 1 meter, allerlei dure Leybold plastic modellen, die je kunt vullen en kunt legen.

Maar uiteindelijk moesten we toch van die modellen af, en daar kwamen de problemen weer om de hoek kijken. Niet elk probleem was in de modellen 'neer te zetten'.

Ons draadmodel van een kubus was nog te klein, want je 'kon er niet zelf inkruipen'; vandaar dat we een spel gingen spelen, met stokken en draden, het totale leslokaal gebruikend als grote kubus. Ook hier, het gevoel van 'dat moet toch beter kunnen'. We bleven worstelen met vragen als: Hoe krijgen we studenten zover dat ze zelf een voorstelling in hun *hoofd* kunnen maken. Hoe krijgen we ze aan het *redeneren*?

Een laatste idee was om, met de intrede van het wiskundewerklokaal, een verplicht tentamen in te lassen waarin studenten elk een eigen (ander) model moeten maken. Met deze ervaringen zouden ze dan aan het vak Meetkunde 2 beginnen. Maar dat zou betekenen dat het curriculum van de propaedeutische moet worden aangepast, en we hebben nog geen eigen wiskundewerklokaal, veel geld is er niet, dus...

Door al die pogingen kwamen we in ieder geval tot het inzicht dat we met een zeer complexe problematiek te maken hebben.

Hoe leer je meetkunde in de ruimte?

Voor ruimtemeetkunde moet je beschikken over een correcte mentale voorstelling. Hoe breng je dat concept dan aan? Dat begint bijvoorbeeld met een tastbaar model, dan een tussenstap, daarna een tekening en het eindigt met een mentale voorstelling. Die mentale voorstelling moet steeds worden bijgesteld en daarvoor heb je een formele wiskundige logische taal nodig.

Als die aspecten aanwezig zijn en met elkaar sporen, kun je meetkunde in je hoofd te bedrijven. Dan zouden ook meisjes beter kunnen gaan functioneren. Redeneringen geven houvast, ze zijn niet langer gebaseerd op een toevallige gouden greep.

In onze cursus was het belangrijk om op een juist moment van het draadmodel van een kubus af te stappen, om te komen tot een mentaal concept.

Hoe gaat het?

Gewapend met een groot draadmodel van een kubus stapte ik het lokaal binnen. Er ontstond het volgende gesprek.

"Laten we maar eens gaan kijken in dit werkschrift."

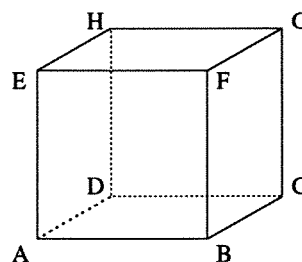


fig. 1

"Zien jullie daar onderaan in deze figuur een kubus?" Ja, iedereen ziet een kubus.

"Iedereen?" Iedereen.

"Jullie zeggen maar wat, jullie kunnen helemaal geen kubus zien, probeer dit draadmodel maar eens zo te verdraaien dat je dat plaatje krijgt."

"Nou, die lijnstukken zijn natuurlijk niet even lang."

"Bijvoorbeeld. Maar je zult nog meer moeten doen, probeer maar... Jullie zien hier een schema, en dat schema vertaal je in je hoofd met 'kubus'."

"Maar dat geeft toch niet?"

"Nee, het heeft zelfs bepaalde voordelen denk ik. Het schema laat precies zien wat de eigenschappen van een kubus zijn: alle ribben even lang, en twee aan twee evenwijdig, de hoeken tussen de ribben zijn steeds 90 graden..."

Dit is een aanzet om het model te laten liggen en te proberen alleen te redeneren, gecombineerd met een tekening. In dit voorbeeld vindt een onderwijsleergesprek plaats, maar die mogelijkheid is er niet altijd. Bovendien is het belangrijk dat studenten zelf leren redeneren. Je

zou 'redeneren' kunnen omschrijven als het bouwen van ketens van zinnen, die logisch uit elkaar volgen. In principe gaan we er dan van uit dat elke zin de uitdrukking is van een zekere 'toestand'.

Bij het opzetten van een redenering maak je voortdurend gebruik van uitspraken, beweringen, (vooronder)stellingen waarvan de juistheid wordt aangenomen. We kunnen dan naar de juistheid van die (vooronder)stellingen vragen. Om de juistheid ervan te bewijzen moeten we weer gebruik maken van andere (vooronder)stellingen. Enzovoort.

De vraag die opdoemt luidt: komt daaraan dan nooit een einde? Het antwoord luidt dat daar inderdaad een eind aan komt. Dat wil zeggen: ergens stuiten we op vooronderstellingen die niet meer te bewijzen zijn. Dat zijn dan de axioma's.

Een voorbeeld

We geven een voorbeeld van het 'redeneren' bij Meetkunde 2 uit onze eigen dagelijkse praktijk.

Er wordt in het werkschrift voornamelijk gewerkt met scheve parallelprojecties, een 'schema' eigenlijk. Een dergelijk schema dwingt tot het loslaten van een echt model (materieel) en dwingt daardoor ook tot redeneren.

In de tekening zie je allerlei paren evenwijdige lijnstukken. Welke zijn nu echt evenwijdig en welke schijnbaar?

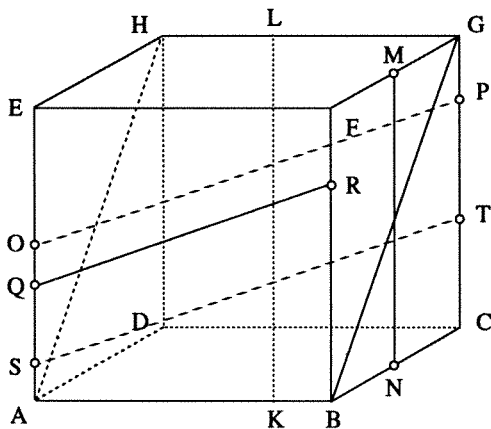


fig. 2

Dit probleem is op heel wat manieren op te lossen. Je kunt bijvoorbeeld kijken naar een bovenaanzicht. Deze aanpak of manier van oplossen werkt alleen in dit geval. Het kunnen opzetten van een redenering is een vaardigheid die vaker van pas komt.

De student zou kunnen redeneren:

" AH en BG zijn alleen evenwijdig als AH en BG in één vlak liggen en geen gemeenschappelijke punten hebben. AH en BG liggen in het vlak $ABGH$. Is dat wel een vlak? Ja, dit is een gevolg van de stelling: door drie niet op een rechte liggende punten gaat juist één vlak. Deze stelling is weer het gevolg van twee axioma's.

1. Door drie punten gaat minstens één vlak, en

2. Als een rechte en een vlak twee punten gemeen hebben, ligt de rechte helemaal in dat vlak."

Natuurlijk is zo'n redenering geen formeel bewijs, maar het lijkt ons niet zinnig om dat van de studenten te verlangen. Het is veel zinvoller om na te denken over redeneren binnen de kubus.

Hoe zou het moeten gaan?

Nog een laatste voorbeeld uit onze dagelijkse praktijk. Met de studenten, die moeite hadden met dit redeneren, ging ik een vraaggesprek houden. Pennen neer en met mij meeredeneren, alleen redeneren, tekeningen maak je in je hoofd. Het is gek om te zien dat alle ogen dan naar het oneindige schieten.

"We zien nu allemaal een 'kubus' ... ik trek nu twee diagonalen, één in het linkerzijvlak en één in het rechterzijvlak, zie je ze? Zijn ze evenwijdig?"

Dan volgt al vlug "Natuurlijk".

"Waarom dan?"

"Waarom? Die zijvlakken zijn toch evenwijdig?"

"Dat is niet voldoende".

"Waarom niet?"

"Er zijn toch ook ribben recht naar boven in zo'n zijvlak?"

"Oh ja, de richting"

Ik heb gemerkt dat het dan toch belangrijk is kort aan te geven wat de redenering nu precies is.

Het volgende paar lijnstukken uit figuur 2 is geen probleem:

" MN en LK zijn niet eens gelijkgericht!"

"Hetzelfde idee alleen een kwartslag gedraaid zien we bij QR en OP , terwijl ST en OP natuurlijk wel evenwijdig zijn, en QR en ST is van een zelfde soort als QR en OP !"

Terugblik

In ons geval zou het vak Meetkunde 2 zó ingericht moeten worden dat de studenten:

- eerst formuleren wat het probleem is
- hier een mentale voorstelling van kunnen maken
- stapsgewijs een plan maken om tot de oplossing te komen
- een aanzet maken tot constructie
- bij elke constructie het hoe en waarom kunnen aangeven.

Wij hopen dat vooral meisjes daar hun voordeel mee kunnen doen. Vooral bij hen hebben we geconstateerd dat zij behoefte hebben aan orde en structuur. Bij hen zien we ook veel constructies met verschillende kleuren en licht gearceerde vlakdelen in hun tekeningen.

Nogmaals, de ervaring leert ons dat het inderdaad werkt: "ruimte meetkunde, zo min mogelijk op papier en zoveel mogelijk in je hoofd".