Ruimtevisioenen in Platland

M. Kindt
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

Een aantal jaren geleden heb ik op het wintersymposium van het Wiskundig Genootschap een verhaal gehouden onder bovenstaande titel. Mijn goede voornemen van toen om dit verhaal pasklaar te maken voor de Nieuwe Wiskrant is een voornemen gebleven, totdat ik er onlangs door een collega aan werd herinnerd. En ja, na enig nadenken leek me het me wel een geschikte bijdrage voor dit meetkunde-nummer, zodoende.

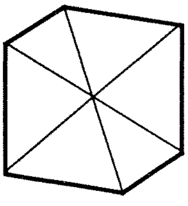
Flatland, a romance in dimensions

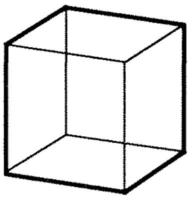
De kop van dit artikel is geïnspireerd door een merkwaardig boek, *Flatland*, geschreven door Edwin A. Abbott [1] en verschenen in het jaar 1884.
Op de kaft van mijn exemplaar (Dover Publications, 1952), staat te lezen: *the fourth dimension, humor, satire, logic combined into a science-fiction classic that has entertained generations.* Absoluut een krachtige aanbeveling voor iedere wiskundige die wel eens een boek leest. Wie was deze Abbott, en wat maakt zijn boek interessant? Over de eerste vraag wil ik kort zijn. Abbott (die Flatland schreef onder het pseudoniem A. Square) was predikant in Cambridge en daarna rector van de City of London School. Hij moet een veelzijdig educatief ontwerper zijn geweest, getuige het feit dat hij leerboeken publiceerde over zowel grammatica als theologie.
Van de inhoud van Flatland wil ik vooral het meetkundig gedeelte memoreren. Het verhaal speelt zich af in een 2-dimensionale wereld die bevolkt wordt door veelhoeken en lijnstukken. De Platlanders, behept met de gewoonten van de Victoriaanse tijd, zijn zeer klassebewust. Een regelmatige driehoek bijvoorbeeld heeft meer status dan een gelijkbenige soortgenoot met een scherpere tophoek dan 60°. Hoe kleiner de tophoek, hoe lager op de maatschappelijke ladder, en de vrouwelijke populatie is wel heel beklagenswaardig, want zij bestaat uit lijnstukken. Soms laat een gelijkbenige driehoek waarvan de tophoek zo'n 59° is, zich in het geheim via plastische chirurgie omvormen tot een gelijkzijdige, om hogerop te komen. De upper-class bestaat uit regelmatige veelhoeken met veel zijden: hoe meer cirkelachtig, hoe hoger. Materiaal genoeg voor een satire!

In meetkundig opzicht is het de schrijver te doen om via analogie-redenering het begrip hyperruimte denkbaar te maken. Zo heeft de ik-figuur, een intelligent vierkant, een keer een visioen van een 1-dimensionale wereld, waarbij hij de koning van 'lijnland' tevergeefs probeert uit te leggen dat er een tweede richting bestaat. Een andere passage handelt over Bol (a Stranger from Spaceland), die contact zoekt met de hoofdpersoon en hem probeert te overtuigen van het bestaan van een richting loodrecht op de beide richtingen ZN en OW. Tenslotte geeft Bol een aardige demonstratie door zich in Platland te vertonen: er verschijnt een klein cirkeltje dat eerst aanzwelt en vervolgens gaat krimpen en tenslotte verdwijnt in het Platland-niets. Het vierkant ziet dit verbijsterd aan en laat zich uitleggen hoe Bol door Platland is gegaan. Moraal: als op een goede dag uit het niets een bol in onze kosmos ontstaat die groter en groter wordt en daarna verschrompelt, dan is er een hypersfeer door de ruimte geschoven. (Ik droom er wel eens van dat met zo'n show het jaar 2000 wordt ingeluid). In het slot van het boek neemt Bol ons vierkant mee de ruimte in en laat hem kennismaken met een kubus, die in de 2-dimensionale ogen van onze held een (onregelmatige) zeshoek is. En met die zeshoek begint mijn verhaal.

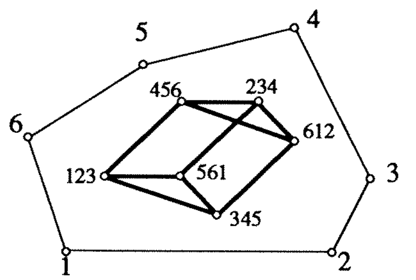
Ruimtelandse visie op platte figuren

De kubus gezien door het oog van de Platlander is volgens Abbot een zeshoek met de eigenschap dat de overstaande zijden twee aan twee parallel zijn. Zo'n zeshoek heeft een paar in het oog springende eigenschappen:
de drie hoofddiagonalen gaan door één punt en delen elkaar bovendien middendoor;
er zijn twee manieren om zo'n zeshoek te verdelen in drie parallellogrammen.



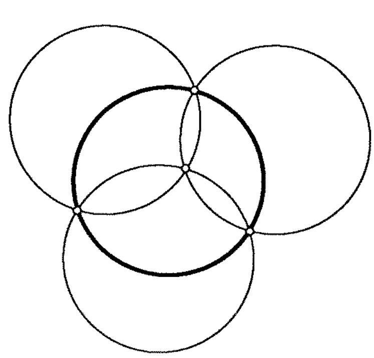


Vanuit het Ruimtelandse gezichtspunt zijn beide eigenschappen zo klaar als een klontje, maar voor de bewoners van Abbots wereld is een 'plat' bewijs nodig. Denk aan parallellogrammen op de paren overstaande zijden en het is niet moeilijk. De eerste eigenschap kan ook zo worden gezegd: de 'kubuszeshoek' is puntsymmetrisch. Het omgekeerde is duidelijk ook waar: elke puntsymmetrische zeshoek heeft overstaande zijden die paarsgewijs parallel en even lang zijn.
De tweede eigenschap zegt dat, als elk drietal opvolgende hoekpunten van een zeshoek wordt aangevuld met een vierde punt tot een parallellogram, er slechts twee nieuwe punten komen. Hoe zit dat nu bij een zeshoek die niet puntsymmetrisch is?

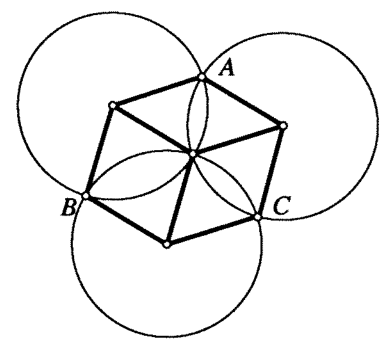


In zeshoek 123456 is bij elk drietal het parallellogrammakende punt geconstrueerd; bij 1, 2 en 3 het punt 123, enz. Ik krijg zes punten die een bekende structuur vertonen (zie ook [2]). Een structuur die voor ons als het ware uit het vlak springt. Zo kun je een Platlander vertellen over een driezijdig prisma. Maar moeilijk blijft het, zoals voor ons het hyperprisma: verschuif een viervlak in een richting buiten onze ruimte, en er ontstaat een 'polytoop' dat begrensd wordt door 2 viervlakken en 4 driezijdige prisma's. Denk je even in, om je net zo ongemakkelijk te voelen als een Platlander: zo'n hyperprisma heeft 8 hoekpunten, 16 ribben en 14 zijvlakken. Terzijde: het bewijs van de prismastructuur in de zeshoek lijkt lastig, tenzij ... je vectoren gebruikt.

Het wisselen van dimensie heeft verrassende effecten. Een treffend voorbeeld vond ik eerst bij Polya [3] en later bij Wells [4]. Laatstgenoemde spreekt van de stelling van Johnston (1916): *als drie even grote cirkels door één punt P gaan, dan is de cirkel die door de drie overige snijpunten gaat, even groot als de gegeven cirkels.*



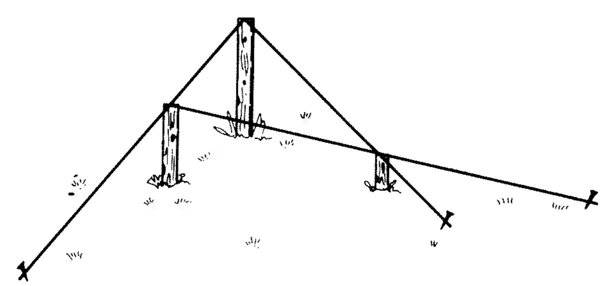
De drie middelpunten van de gegeven cirkels hebben dezelfde afstand (zeg r) tot steeds drie van de vier snijpunten. Teken die stralen en je krijgt een mooi plaatje:



Een kubuszeshoek opgebouwd uit drie ruiten! Het nog onzichtbare hoekpunt van de kubus is dan natuurlijk ook een hoekpunt van drie ruiten en heeft dus, plat gesproken, de afstand r tot elk van de snijpunten A, B en C! Een aardig staaltje van dimensiewisseling, niet waar? Voor Platlanders kan natuurlijk een beroep worden gedaan op de tweede stelling over de kubuszeshoek.

De stelling van Menelaos

Destijds bedacht ik voor *Lessen in Ruimtemeetkunde* het volgende sommetje:

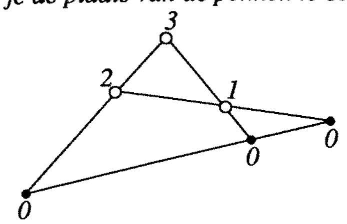


Op een vlak stuk grond staan drie paaltjes van ongelijke hoogte. Langs de toppen van de paaltjes worden touwen gespannen die met pennen in de grond worden vast gemaakt.

a. De drie pennen zullen op één lijn moeten liggen. Hoe kun je dit verklaren?
b. Wat zal er gebeuren met die lijn als van alle paaltjes een even groot stuk wordt afgezaagd?

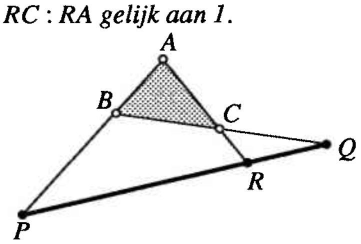
Het paste in een hoofdstuk over het snijden van vlakken, over het bepaald zijn van een vlak door drie punten, kortom in een hoofdstuk over incidentieregels, en was als zodanig een geslaagde opgave. Later kwam ik op het idee van een uitbreiding:
Veronderstel dat de paaltjes respectievelijk 3 dm, 2 dm en 1 dm hoog zijn. Hieronder zie je een bovenaanzicht van de paaltjes met daarbij vermeld de hoogtegetallen.

Hoe kun je de plaats van de pennen te construeren?



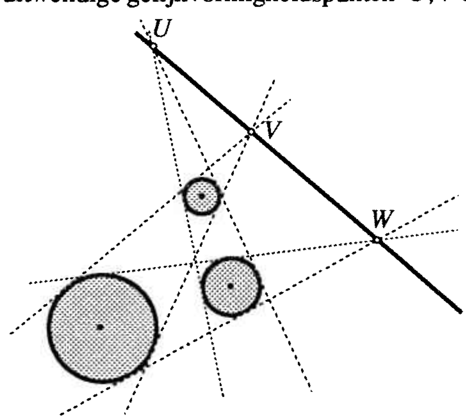
Een kwestie van verhoudingen. De pen-plaatsen (hoogte 0) worden bepaald door punten op de verbindingslijnen te construeren in respectievelijk de verhouding 3 : 2, 2 : 1 en 1 : 3. Het produkt van deze drie verhoudingen is precies gelijk aan 1 en dat is niet toevallig. Bij elk drietal lengten a, b en c (die natuurlijk wel alle drie verschillend moeten zijn) is dat produkt 1, mits de afstanden cyclisch geordend zijn. Vanuit mijn ruimtelijke visie weet ik dat de pennen op één lijn liggen of deftig gezegd 'collineair' zijn, en zo heb ik een klassieke meetkundestelling herontdekt:

Als P, Q en R achtereenvolgens op de zijden AB, BC en CA van driehoek ABC liggen, zo dat P, Q en R collineair zijn, dan is het produkt van de verhoudingen $PA : PB$, $QB : QC$ en $RC : RA$ gelijk aan 1.



Bij het onderzoek of het omgekeerde van de stelling ook waar is, stuit je op de moeilijkheid dat de verhouding van de afstanden tot twee punten de plaats niet vastlegt. Zo zijn er bijvoorbeeld twee punten P op de lijn AB met $PA : PB = 3 : 2$. De wiskundige weet daar wel raad mee en lost dit op door te werken met *gerichte verhoudingen*. Dat betekent dat hij $PA : PB$ positief rekent als de vectoren $\underline{PA}$ en $\underline{PB}$ gelijkgericht zijn en negatief als $\underline{PA}$ en $\underline{PB}$ tegengesteld gericht zijn. Daarmee is de omkeerstelling ook geldig.

Die drie paaltjes geven een saai bovenaanzicht en daarom maak ik nu dit plaatje van drie cirkels met bijbehorende 'uitwendige gelijkvormigheidspunten' U, V en W:



Voor de goede orde: het *uitwendig* gelijkvormigheidspunt' van twee ongelijke cirkels, is het punt van waaruit de ene cirkel moet worden vermenigvuldigd met een *positieve* factor, om de andere als beeld te krijgen. Als de kleinste van de twee niet geheel (of op één punt na geheel) binnen de andere ligt, dan zijn er twee gemeenschappelijke raaklijnen van beide cirkels die door dat uitwendig gelijkvormigheidspunt gaan.

De drie punten U, V en W lijken warempel collineair. Ook hier helpt een ruimtevisioen. Stel de paaltjes van zoëven zijn vervangen door pilonen, u weet wel die rode plastic kegels gebruikt door oefenmeesters en wegwerkers. Mijn pilonen zijn verschillend van hoogte, maar hebben steeds dezelfde tophoek, kortom ze zijn gelijkvormig. Ik plaats drie verschillende pilonen in een driehoek en span weer draden strak over de toppen om ze met pennen in de grond te steken. Die pennen moeten precies in de uitwendige gelijkvormigheidspunten staan, en daarmee wordt de stelling meteen duidelijk!

Voor de 2-dimensionalen is er een alternatief bewijs: pas de stelling van Menelaos toe op de driehoek gevormd door de drie middelpunten, meer zeg ik niet.

Deze zogenaamde stelling van Monge heeft nog een uitbreiding. Als het vlak waarop de drie kegels staan in de ruimte zweeft, kan ik een van de kegels aan de onderkant vastplakken; van de snijpunten van de verbindingslijnen van de toppen met het vlak zijn er nu twee een *inwendig* gelijkvormigheidspunt. De conclusie is snel gemaakt: van de drie inwendige gelijkvormigheidspunten is elk tweetal collineair met één uitwendig gelijkvormigheidspunt. Vermeldenswaard is nog de redenering van de ingenieur John Edson Sweet (zie ook [4]):

> Instead of three circles in a plane, imagine three balls lying on a surface plate. Instead of drawing tangents, imagine a cone wrapped around each pair of balls. The apexes of the three cones will then lie on the surface plate. On top of the balls lay another surface plate. It will rest on the three balls and will be necessary tangent to each of the three cones. Thus the apexes of the three cones will lie in both of the two plates, with is of course a straight line.

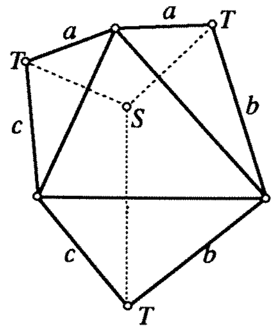
Dit bewijs is wat minder 'stoffelijk', maar buitengewoon fraai.

Het viervlak en de stelling van de drie machtlijnen

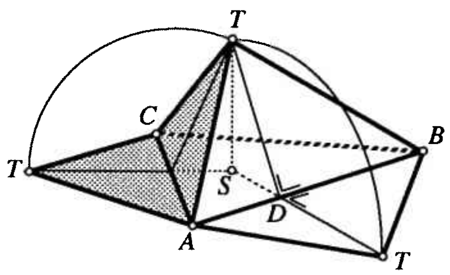
Er zijn verschillende manieren om ruimtelijke objecten in twee dimensies te representeren:

- een figuur als resultaat van een projectie (parallel of centraal) op een vlak;
- een serie doorsneden of een hoogtekaartje;
- een uitslag (populair: bouwplaatje).

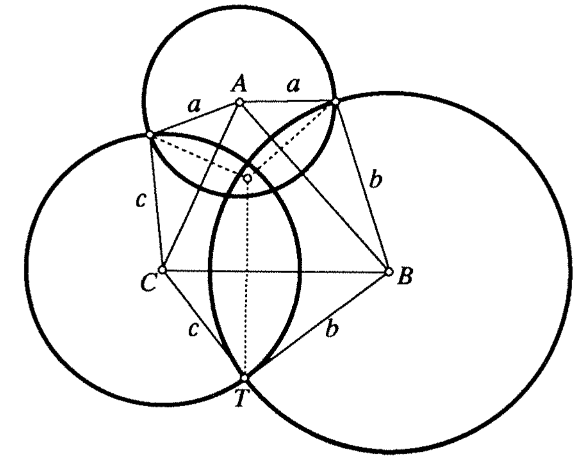
Tot hier toe was de grap steeds dat een planimetrische figuur opgevat werd als projectiefiguur van een ruimtelijk object. Ik wil het nu eens met een uitslag proberen. Neem een viervlak en klap de drie opstaande zijvlakken om, zó dat zij samen met de bodem in één vlak komen.



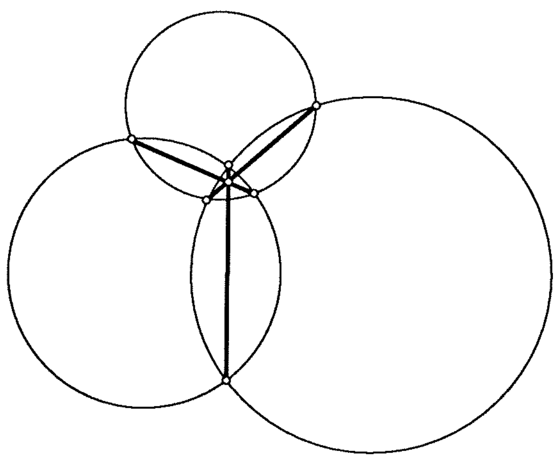
De top T van het viervlak krijgt drie kopieën in de uitslag. De loodlijnen uit die drie punten op de zijden van de bodemdriehoek gaan door één punt. Dit kan worden bewezen door het viervlak weer op te bouwen en te letten op het voetpunt S van de loodlijn op de bodem uit T en op de hoogtelijnen uit T in de drie zijvlakken.



Er geldt: AB is loodrecht op zowel de hoogtelijn TD in driehoek TAB als op de lijn TS. Gevolg: $AB \perp DS$.
En dus ligt de neergeslagen TD precies in het verlengde van DS. Dit geldt net zo voor de hoogtelijnen in de beide andere neergeslagen zijvlakken.
Zo heb ik weer een aardige planimetrische stelling:
Beschrijf driehoeken buitenwaarts op de zijden van een gegeven driehoek ABC zó dat uit elk hoekpunt van driehoek ABC twee gelijke zijden vertrekken; de loodlijnen uit de toppen van de drie nieuwe driehoeken op de zijden van driehoek ABC gaan dan door één punt.
Als je zo'n figuur zou construeren, doe je er goed aan cirkels te gebruiken met middelpunten A, B en C.



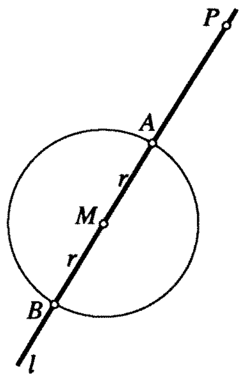
Symmetrie leert dat de loodlijn uit een punt T op een zijde van driehoek ABC de gemeenschappelijke koorde is van de twee cirkels waarmee T is geconstrueerd! Voorgaande stelling laat zich daarom vertalen in cirkeltaal:
Als drie cirkels elkaar twee aan twee snijden dan gaan de drie gemeenschappelijke koorden door één punt.
Dat klinkt een stuk eenvoudiger en deze stelling is dan ook klassiek. Wat niet klassiek is, is dat je hem kunt begrijpen door middel van alweer een ruimtevisioen. Zie de drie cirkels als equators van halve bollen die op één vlak liggen; het plaatje kun je dan ook lezen als een bovenaanzicht van die bollen. Elk paar halve bollen heeft als doorsnede een (halve) cirkel en die snijcirkels vertonen zich in het bovenaanzicht als de gemeenschappelijke koorden van cirkels. De drie halve bollen gaan natuurlijk precies door één punt (immers: het snijpunt van één snijcirkel met de derde bol, ligt in alle drie de bolvlakken). In het bovenaanzicht betekent dit dat de drie gemeenschappelijke koorden door één punt gaan.

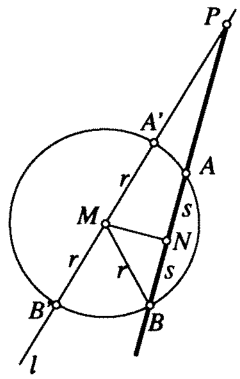


Een klassieke stelling heeft natuurlijk een klassiek bewijs. De bouwsteen die ik daarvoor nodig heb is het begrip *macht* van een punt ten opzichte van een cirkel.
Ter introductie eerst een hulpstelling: als de lijn l de cirkel (M,r) snijdt in de punten A en B dan geldt voor elk punt P van l dat $PA \cdot PB = PM^2 - r$.
Daarbij wordt met $PA \cdot PB$ het *gerichte produkt* bedoeld (het is positief als de vectoren $\underline{PA}$ en $\underline{PB}$ gelijk gericht zijn en negatief als zij tegengesteld gericht zijn).
Merk op dat de bewering triviaal is voor het geval P samenvalt met A of B. Voor het geval de lijn l door M gaat is de zaak zeer eenvoudig; er geldt dan (zie figuur op de volgende bladzij):

$$PA \cdot PB = (PM - r)\ (PM + r) = PM^2 - r^2$$

Voor het geval P niet door M gaat, vergelijk ik het produkt $PA \cdot PB$ op de lijn l met het produkt $PA' \cdot PB'$ op de lijn PM (waarbij A' en B' de snijpunten zijn van PM met de cirkel. Met gelijkvormigheid en het verband tussen omtrekshoeken en cirkelbogen is het bewijs dan gemakkelijk te geven, maar het kan ook met niet meer voorkennis dan de stelling van Pythagoras.





Bekijk de rechter figuur. MN staat loodrecht op de koorde AB en verdeelt die koorde in gelijke stukjes s.
Tweemaal Pythagoras levert op:

$$PM^2 = MN^2 + PN^2$$
$$r^2 = MN^2 + s^2$$
$$\overline{}$$
$$PM^2 - r^2 = PN^2 - s^2$$

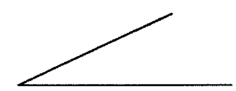
Verder geldt:

$$PN^2 - s^2 = (PN - s)\,(PN + s) = PA \cdot PB$$

En daarmee is het bewijs geleverd.
Het getal $PM^2 - r^2$ wordt de *macht* van P ten opzichte van de cirkel (M,r) genoemd. De macht van P is negatief, nul of positief al naar gelang P binnen, op of buiten de cirkel ligt.
Duidelijk is nu dat in het geval twee cirkels (M_1,r_1) en (M_2,r_2) elkaar snijden in A en B, er voor elk punt P van de lijn AB geldt: $PM_1{}^2 - r_1{}^2 = PM_2{}^2 - r_2{}^2$.
Ofwel: elk punt P van de lijn AB heeft gelijke machten ten opzichte van de beide cirkels. Het omgekeerde is ook waar, namelijk dat elk punt P met gelijke machten ten opzichte van beide cirkels op de lijn AB ligt. Vandaar dat die lijn de *machtlijn* van de beide cirkels wordt genoemd. Bij drie cirkels die elkaar twee aan twee snijden krijg ik zo drie machtlijnen. Het snijpunt van twee machtlijnen heeft gelijke machten ten opzichte van de drie cirkels en moet dus wel op de derde machtlijn liggen! De lezer heeft het al in de gaten: de structuur van de redenering is dezelfde als bij het bewijs dat de drie middelloodlijnen van een driehoek door één punt gaan. Het snijpunt van de drie machtlijnen wordt ook wel het *machtpunt* van de drie cirkels genoemd.
Ik merk op dat er ook een machtlijn bestaat bij twee cirkels die elkaar niet snijden, mits zij niet concentrisch zijn, en dat voor *elk* drietal niet-concentrische cirkels er een machtpunt is. Dit alles kan ook elegant met algebra worden bewezen. En om maar weer eens een dimensiesprong te maken: met $PM^2 - r^2$ is ook de macht van een punt P ten opzichte van de bol (M,r) gedefinieerd; twee bollen hebben een *machtvlak*, drie bollen een *machtlijn* en vier bollen een *machtpunt*. Dat laatste volgt door de machtvlakken van de bollen B_1 en B_2, B_2 en B_3, B_3 en B_4 te snijden. Gevolg: de 4 machtlijnen en de 6 machtvlakken van vier bollen gaan door één punt. En om nog een uitstapje te maken naar Hyperruimteland: het machtpunt van de hypersferen S_1, S_2, S_3, S_4 en S_5 ligt in de 10 machtruimten, de 10 machtvlakken en de 5 machtlijnen van die vijf vierdimensionale bollen.

Weg met de systeemscheiding

Planimetrie en stereometrie waren vroeger op school strikt gescheiden. Ik herinner me nog hoe, na drie jaar vlakke meetkunde, mijn wiskundeleraar vertelde dat een rechte hoek er voortaan ook zó kon uitzien:



Het was een schok. De problemen die veel leerlingen met stereo hadden, waren waarschijnlijk voor een deel terug te voeren op het feit dat hen drie jaar lang was afgeleerd met een drie-dimensionale blik naar meetkundefiguren te kijken. Onder invloed van de Van Hiele's zijn er in de jaren zestig alom schuchtere pogingen gedaan om het meetkunde-onderwijs te starten met de kubus, maar de echte doorbraak naar integratie van ruimte en vlak, is pas nu met de invoering van het nieuwe onderbouwprogramma een feit geworden. De zogenaamde kijkmeetkunde (beschreven in [5]), geeft daarvan prachtige voorbeelden.
Dit artikel laat zien hoe verrassend vruchtbaar de blikwisseling van dimensie soms kan zijn. Ik wil niet zeggen dat de voorbeelden voor het oprapen liggen, maar er zijn er echt nog veel meer. Een oude bekende is de stelling van Desargues (zie het artikel van Marianne Pranger in dit nummer) en in een vroeger nummer van de Nieuwe Wiskrant heeft Marco Swaen al eens een paar mooie staaltjes van ruimte-naar-vlak-en-terug-denken ten beste gegeven (zie [6]). Voor de leraren onder ons, bekijk de meetkunde die je op school tegenkomt eens vanuit de hier geschetste optiek en wie weet wat een rijkdom aan ideeën dat oplevert.

Literatuur

[1] Abbot, E. A. (1952) *Flatland*, Dover Publications.
[2] Bachmann, F. (1970-71). *n*-Gons, *Educational Studies in Mathematics*, *3*, 288-309.
[3] Polya, G. (1965). *Mathematical Discovery (II)*, Wiley.
[4] Wells, D. (1991). *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*, Penguin Books.
[5] *Achtergronden van het nieuwe leerplan Wiskunde 12-16 Band 2*, Freudenthal Instituut/SLO, 1992.
[6] Swaen, M. (1985). De kunst van het diepte-zien, *Nieuwe Wiskrant*, *4* (3), 13-15.