De aansluiting met de bovenbouw

Is het nieuwe meetkunde-programma een goede voorbereiding op havo B en vwo B?

W.E. Groen, Vrije Universiteit, Amsterdam
C.J. van de Giessen, Isala College, Silvolde

Geen theezakjesmodel

Het is met de vernieuwing van de leerplannen voor wiskunde merkwaardig gegaan: eerst de bovenbouw vwo, toen de bovenbouw havo en tenslotte de onderbouw. Het nieuwe leerplan voor de onderbouw vormt dus het sluitstuk. De gekozen werkwijze kan er toe leiden dat wat er in de bovenbouw van het vwo geleerd moet worden model gaat staan voor wat er in de schooltypen die daar aan vooraf gaan, geleerd moet worden. De programma's voor havo en onderbouw zijn dan aftreksels van het programma van het vwo. En omdat het vwo moet opleiden voor het wetenschappelijk onderwijs, wordt in feite alles bepaald door de eisen die de universiteit aan de instromende studenten stelt.
In kringen van leerplanontwikkelaars is men zich terdege bewust van de gevaren van deze werkwijze. In de stukken over nieuwe leerplannen kan men dan ook lezen dat het zogenaamde 'theezakjesmodel' niet is gebruikt en dat men heeft gestreefd naar het creëren van programma's die geheel zijn toegesneden op de behoeften en mogelijkheden van de leerlingen van de betrokken schooltypen.[1]
Dit laatste is natuurlijk mooi en prijzenswaardig, maar toch zou het een beetje slordig zijn als leerlingen in de bovenbouw moeten gaan werken aan een wiskundeprogramma dat van recente datum is, terwijl ze in de onderbouw, ook met een nieuw programma, daar niet goed op zijn voorbereid.
De vraag lijkt daarom gewettigd: leidt het verwerpen van het theezakjesmodel samen met de gekozen werkvolgorde (van bovenbouw naar onderbouw) er niet toe dat er onaanvaardbare discontinuïteiten in de opbouw van de leerstoflijnen ontstaan? (Dat die vraag niet slechts academisch is, moge blijken uit het feit dat de aansluiting van bijvoorbeeld havo wiskunde A naar vwo wiskunde A niet geheel naadloos verloopt en evenmin de aansluiting van mavo naar havo). En omdat in de afgelopen dertig jaar juist de opvattingen over de doelen van meetkunde-onderwijs aan grote veranderingen onderhevig zijn geweest, is deze vraag voor de meetkundeleerstoflijnen van extra belang.

Wisselende ideeën over meetkunde

De verleiding is groot terug te gaan tot de jaren vijftig en zestig, te gaan verhalen over de situatie in het meetkunde-onderwijs in die tijd en over de eerste sporen van de ideeën achter de huidige veranderingen, die al in de vroege jaren dertig te vinden zijn bij mevrouw Ehrenfest. Aan die verleiding moet en kan weerstand worden geboden, omdat in dit nummer Ed de Moor daarover uitvoerig schrijft. Toch kan een enkele opmerking over het verleden niet ontbreken.
Bij de invoering van de nieuwe wiskunde-programma's voor de bovenbouw vwo was de meetkunde voor de B-leerlingen één van de drijvende krachten achter de vernieuwing. Het, al dan niet vermeende, gebrek aan ruimtelijk inzicht van aankomende studenten aan technische universiteiten leidde er toe dat de vectormeetkunde (ooit ingevoerd in het vak wiskunde II om de kloof tussen de wiskunde als wetenschap en de schoolwiskunde te dichten en om de deductieve methode te onderwijzen) een stapje terug moest doen ten gunste van meer 'meetkundige' methoden. Meetkunde had, ook in het vwo, niet meer als voornaamste doel het leren omgaan met een deductief systeem, maar diende vooral de oriëntatie in de ruimte en de ontwikkeling van het ruimtelijk inzicht. In de eerste generatie leerboeken voor het nieuwe vwo B-programma waren de vectoren dan ook bijna geheel verdwenen. Maar toen bleek dat leraren hun leerlingen buiten het leerboek om voorzagen van hulpstencils waarin allerlei vectormeetkundige methoden kort waren samengevat, verschenen in de volgende versie van die boeken toch weer hoofdstukjes over vectormeetkunde.[2]
In de formulering van het B-programma van het vwo (1985) is daarvoor ook wel enige rechtvaardiging te vinden, omdat de vectoren daarin nog wel worden genoemd. En kennelijk zijn de eindexamenopgaven van dien aard dat kennis van het werken met vectoren je goed van pas kan komen. Dat zou er op kunnen wijzen dat er nogal veel rekenachtige vragen met een getal als antwoord in de meetkunde-examenopgaven zitten en minder vragen die alleen op een redenering aansturen.
Bij het havo-programma (1990) was men inmiddels al

weer een stapje opgeschoven. Uit het B-programma werden de vectoren geheel weggelaten. De havo-leerling die opgevoed wordt volgens de omschrijving van het leerplan, heeft met vectoren geen kennis meer gemaakt en moet de meetkunde-opgaven met andere hulpmiddelen te lijf. Ook hier kun je de vraag stellen of de examenopgaven met enige kennis van vectorrekening gemakkelijker zijn op te lossen. Op die vraag komen we straks terug. Eerst kijken we globaal naar het nieuwe onderbouwprogramma voor meetkunde.

Vier aandachtsgebieden voor meetkunde in de onderbouw

In het *Achtergrondenboek*[3] worden voor de meetkunde vier grote inhoudelijke gebieden genoemd, te weten:

- *kijkmeetkunde* (kijklijnen, de rol van het standpunt, kijkhoeken, aanzichten en verklaringen, afbeeldingen in soorten, constructies)
- *meetkunde van vormen en figuren* (patronen, symmetrie, regelmaat, lichamen, doorsneden)
- *meetkunde over plaatsbepalen* (situaties waarin plaatsen gecodeerd zijn aangegeven, coördinaten op de aarde, plaatsbepaling op grond van twee gegevens door middel van een constructie)
- *rekenen in de meetkunde* (oppervlakten, inhouden, afstanden, hoeken, vergrotingsfactoren, verhoudingen).

Ga je in het *Trajectenboek*[4] na hoeveel tijd de ontwerpers voor de verschillende onderdelen inruimen, dan vind je voor het havo/vwo-traject voor de eerste drie klassen in totaal 95 lessen voor meetkunde en daarvan wordt het grootste deel besteed aan het rekenen in de meetkunde (34 lessen) en aan de meetkunde van vormen en figuren (30 lessen). Opvallend aan deze telling is, dat deze uitkomst niet op een sterke breuk met het verleden wijst. Zowel in de recente vectormeetkunde (in het havo en in het vwo) als in de stereometrie van voor 1968 speelde het berekenen van hoeken, afstanden, inhouden en oppervlakten een belangrijke rol.
De zogenaamde kijkmeetkunde heeft sterk de aandacht getrokken. In het *Achtergrondenboek* worden er 70 bladzijden aan gewijd, terwijl aan de meetkunde over vormen en figuren en aan het rekenen in de meetkunde tezamen maar ongeveer 45 bladzijden worden besteed. Toch speelt de kijkmeetkunde in de definitieve formulering van het programma maar een bescheiden rol. De herinnering aan de introductie van de verzamelingen in de schoolwiskunde in 1968 dringt zich op: iedereen had de mond vol over verzamelingen, maar in werkelijkheid speelden ze, zeker na enige tijd, een rol op de achtergrond. Misschien kun je zeggen dat de kijkmeetkunde meer een attitude van meetkunde-beoefening bevordert dan dat er zoveel begrippen en methoden uit voortkomen. De kijkmeetkunde wil nog eens benadrukken dat de meetkunde vooral de oriëntatie op de wereld om je heen tot doel heeft. Ze wil benadrukken dat meetkunde een praktisch vak kan zijn, dat je op meer plaatsen kunt gebruiken dan je denkt.
Maar zo nieuw zijn die ideeën niet. De gedachte dat de meetkunde niet gaat over de ruimte waarin wij leven, maar over denkbeeldige objecten, waarvan wij in onze omgeving gebrekkige afschaduwingen zien, was, ook in het vwo, al lang verlaten, evenals de gedachte dat het in de meetkunde vooral gaat om een kennis maken met een deductief systeem. Dat was immers de doodsoorzaak van de vectormeetkunde.
Een voorlopige conclusie is dan ook: De vernieuwing van de meetkunde in de onderbouw is minder spectaculair dan in de wandelgangen door sommigen werd gehoopt of door velen gevreesd. Ze vormt een terugkeer naar de lijn die in 1968 werd verlaten.

Een havo-examen

Welk soort vaardigheden zijn nodig voor het oplossen van de meetkunde-opgaven van het havo-B-examen? Er is nog geen traditie en met grote zekerheid kan er derhalve nog niet worden gesproken. Toch is het goed nu al vast te kijken of er van de voor de onderbouw geformuleerde meetkundedoelen in de havo-examenopgaven die tot nu toe geweest zijn, iets terug te vinden is. En of er in de onderbouw voldoende aandacht is voor het 'in de week leggen' van wat je op het havo-examen moet kunnen en kennen.
Als voorbeeld nemen we het havo-examen wiskunde B van de tweede termijn in 1992. In dat examen komen twee meetkunde-opgaven voor: opgave 1 en opgave 3. (Zie hiernaast.)
Het valt op dat opgave 1 geheel gericht is op het rekenen in de meetkunde. De vaardigheden en inzichten die worden getoetst zijn:

In vraag 1

- het aanbrengen van een standvlak op de ribbe AD (noem het snijpunt van dat vlak met AD S)
- het berekenen van $T'S$ via een evenredigheid in gelijkvormige driehoeken
- het gebruik van de tangens om de standhoek te vinden.

In vraag 2

- het toepassen van de stelling van Pythagoras (na via een evenredigheid bijvoorbeeld AT' te hebben berekend).

In vraag 3

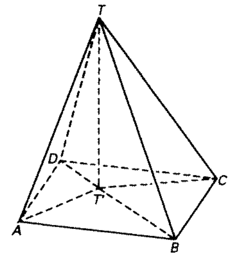
- werken met evenredigheden in gelijkvormige driehoeken (zogenaamde X-figuren) om het snijpunt van AT' met DC te vinden
- werken met de inhoudsformule van een piramide om de verhouding van twee inhouden te vinden, dan wel het inzicht dat de verhouding van de oppervlakten

Uit: havo examen wiskunde B 1992, tweede termijn

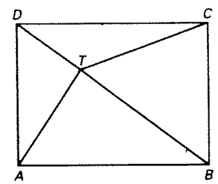
Opgave 1

Van piramide $T.ABCD$ ligt de top T op hoogte 12 boven het grondvlak $ABCD$.
Het grondvlak is een rechthoek waarin $AB = 12$ en $BC = 9$.
T' is de loodrechte projectie van T op het grondvlak. T' ligt zo op lijnstuk BD dat $BT' = 2DT'$ (zie figuur 1a).
In figuur 1b is het bovenaanzicht getekend.

figuur 1a



figuur 1b



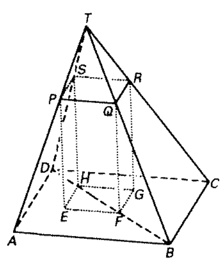
4p **1** □ Bereken de hoek van de vlakken TAD en $ABCD$ in graden nauwkeurig.

4p **2** □ Bereken de lengte van de ribbe AT.

Het vlak door AT loodrecht op het grondvlak deelt de piramide in twee delen.
5p **3** □ Hoe verhouden zich de inhouden van deze twee delen? Licht het antwoord toe.

Een vlak V dat evenwijdig is aan het grondvlak $ABCD$ ligt op afstand x onder de top T. $(0 < x < 12)$.
V snijdt de piramide volgens een rechthoek $PQRS$.
$PQRS$ is het bovenvlak van een balk $EFGH.PQRS$, waarbij $EFGH$ in het grondvlak van de piramide ligt (zie figuur 2).

figuur 2



In figuur 2 is de situatie getekend voor $x = 4$.

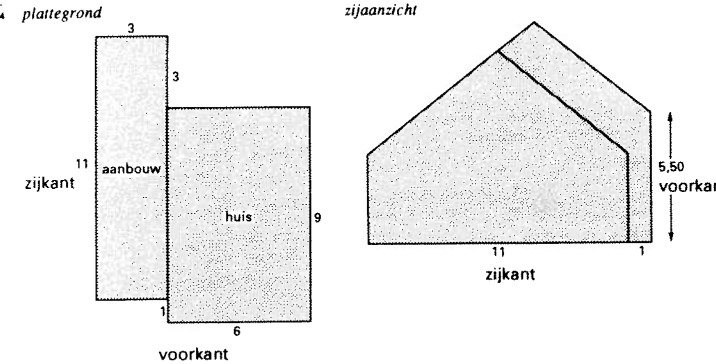
5p **4** □ Bereken voor deze situatie de inhoud van de balk.

7p **5** □ Onderzoek wat de maximale inhoud van de balk is, als V in hoogte varieert.

Opgave 3

Men wil een huis uitbreiden met een aanbouw aan één van de zijkanten van dat huis. In figuur 3 is een plattegrond van het huis met aanbouw getekend, waarin de maten van de muren zijn vermeld in meters. De hoogte van de voorkant van het huis is evenals de hoogte van de achterkant 5,50 meter (zie figuur 4).
Aan de voorkant van het huis springt de aanbouw 1 meter in en aan de achterkant steekt de aanbouw 3 meter uit.
Aan de achterkant liggen het dak van het huis en het dak van de aanbouw in één vlak. De hoogte van de voorkant van de aanbouw is gelijk aan de hoogte van de achterkant van de aanbouw.
De helling van alle daken bedraagt 36,9°.
In figuur 4 is, niet op schaal, een zijaanzicht getekend.

figuren 3 en 4

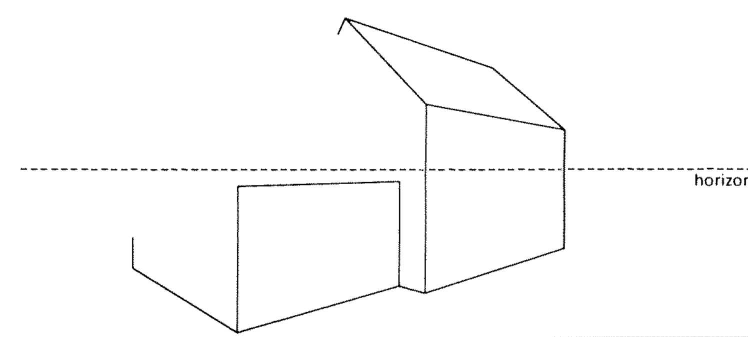


4p **9** □ Uit welke gegevens volgt dat het hoogste punt van het dak van het huis (de nok) zich midden boven het huis zonder aanbouw bevindt?

5p **10** □ Bereken de hoogte van de nok van het huis in centimeters nauwkeurig.

7p **11** □ Bereken de oppervlakte van het dak van de aanbouw.

Op de bijlage is een gedeelte van een perspectieftekening van het huis met aanbouw getekend.
9p **12** □ Maak de perspectieftekening op de bijlage af.



van de grondvlakken bij piramides met dezelfde hoogte gelijk aan de verhouding van de inhouden is.

In vraag 4
- het inzicht dat *PQRS* de produktfiguur is van *ABCD* onder de vermenigvuldiging ten opzichte van *T* met factor $\frac{4}{12}$
- het gebruiken van de inhoudsformule van een balk.

In vraag 5
- het generaliseren van de in vraag 4 gevolgde aanpak om de inhoudsfunctie op te stellen
- het berekenen van de uiterste waarde van de inhoudsfunctie.

Speurend in het *Trajectenboek*, kom je tot de conclusie dat al deze vaardigheden of in de onderbouw aan de orde komen of daar worden voorbereid. Weliswaar staan ze niet allemaal zo expliciet vermeld, maar bijvoorbeeld in de paragraaf *Doorsnede en helling* (bladzijde 136) staat: *De vorm beschrijven van de verschillende doorsneden van een vlak met kubus, piramide, cilinder en bol.* En ook: *Het begrip tangens van een hoek gebruiken bij berekeningen van hoeken en afstanden*, terwijl bij de samenvattende begrippen op die bladzijde de hellingshoek expliciet wordt genoemd.
In de paragraaf *Projecties gebruiken* (bladzijde 135) staan de situaties genoemd, die aanleiding geven tot het werken met evenredigheden in de vorm zoals je die in bovengenoemde examenopgave nodig hebt.
Hierbij moeten we natuurlijk bedenken, dat het *Trajectenboek* slechts de contouren aangeeft en dat de auteurs van schoolboeken binnen die contouren de juiste consistente lijnen moeten ontwikkelen. We mogen aannemen, dat analyses als de bovenstaande door die auteurs zeker ook worden gemaakt.

De tweede meetkunde-opgave in het herexamen havo 1992 is opgave 3. De vaardigheden die hier worden getoetst zijn:

In vraag 9
- het vaststellen welke gegevens in de tekst de conclusie van symmetrie wettigen.

In vraag 10
- het maken van een goede schets van een zijvlak van het huis
- het werken met de tangens van een hellingshoek.

In vraag 11
- weer het werken met een goed gekozen aanzicht
- berekenen van de oppervlakte via de cosinus van de hellingshoek.

In vraag 12
- omgaan met de regels van het perspectieftekenen.

Ook voor deze opgave geldt dat bijna alle vaardigheden en inzichten in de onderbouw in essentie al aan de orde zijn geweest of zijn voorbereid. Je kunt natuurlijk niet zeggen dat iemand na het nieuwe onderbouwprogramma te hebben doorgewerkt al in het begin van klas 4 havo deze opgave zou moeten kunnen maken, maar het programma reikt wel alle middelen aan om in de klassen 4 en 5 de gewenste vaardigheden en inzichten verder te ontwikkelen. Vraag 9 sluit aan bij de gedachte dat één van de doelen van het wiskundeonderwijs zou moeten zijn dat leerlingen relevante en niet relevante gegevens kunnen scheiden en de vragen 10 en 11 worden door de kijkmeetkunde grondig voorbereid.
Opmerkelijk in deze beide opgaven is dat er, uiteraard, bij alle vragen wel geredeneerd moet worden, maar dat in zeven van de negen vragen die redenering gericht is op een *berekening*. Wij hebben de indruk dat deze twee opgaven weliswaar ten opzichte van de vector-achtige meetkunde in het oude havo-programma een sterke verandering betekenen, maar dat ze heel goed aansluiten bij het stereometrie-onderwijs zoals dat werd gegeven in de hbs en het gymnasium tot de programmawijziging van 1968.
In de jaren 1961 tot 1968 werden in de stereometrie-examens zes typen vragen gesteld. In de tabel hieronder is te zien hoe vaak elk type in dat tijdvak voorkwam.

	gymnasium examen	hbs examen
bewijs	24	23
construeer	11	8
bereken	15	9
druk uit	16	17
teken	1	0
beschrijf verzameling	2	3

In die jaren werden er blijkbaar ook veel berekeningen in de meetkunde gevraagd. Als je de categorieën 'bereken' en 'druk uit' samen neemt, heeft dat type vraag de grootste frequentie. Direct valt natuurlijk de hoge frequentie in de categorie 'bewijs' op. Je kunt er aan zien dat er aan het redeneren met behulp van kenmerken en stellingen toen behoorlijk veel aandacht werd gegeven. Die categorie zal in de nieuwe meetkunde examens niet of nauwelijks voorkomen.
Er voor in de plaats is gekomen een grotere nadruk op aanzichten en het tekenen daarvan 'in ware vorm' en op de wijze van afbeelden van ruimtefiguren op een plat vlak (projectiemethoden). Aan de tweede meetkunde-opgave die hierboven als voorbeeld werd gebruikt, kun je dat ook zien. De basis voor vaardigheden die voor het beantwoorden van dat soort vragen nodig zijn, wordt in de onderbouw vooral met behulp van de kijkmeetkunde gelegd.
Eerder in dit artikel stelden we de vraag of kennis van

het rekenen met vectoren bij het maken van examenopgaven ruimtemeetkunde toch niet nuttig zou kunnen zijn. In het boek *Ik was wiskundeleraar*[5] vertelt Van Hiele aan Fred Goffree dat hij in zijn stereometrielessen zijn leerlingen leerde met vectoren te werken:

> ... "Met die vectoren kon je elk probleem kraken. Je kon, zo te zeggen, blind vliegen. Dat veranderde ineens alles. Plotsklaps waren alle onvoldoendes voor stereo weg .... De gecommiteerde .... vertelde dat hij de methode van Van Hiele maar niets vond, want iedereen kon het."

Als Van Hieles woorden ook voor de nieuwe ruimtemeetkunde zouden gelden, moeten we ons afvragen of het wel terecht is dat de vectoren geheel uit het programma verdwenen zijn. Het is nog te vroeg daarover een oordeel te vellen. Voor de hierboven genoemde examenopgaven lijkt ons het gebruik van vectoren geen voordelen op te leveren. De introductie van vectoren in de hierboven als eerste genoemde opgave doet een beroep op dezelfde vaardigheden als die welke je nodig hebt bij het beantwoorden van de vragen zonder het gebruik van vectoren. Je moet dan immers, na het invoeren van een assenstelsel bijvoorbeeld de normaalvector van de vlakken *TAD* en *ABCD* berekenen. Daarvoor heb je de coördinaten van *T* nodig en daarvoor moet je toch eerst de coördinaten van *T'* berekenen. Ook voor de overige vragen geven vectoren niet wat Van Hiele in het citaat hierboven beweert.

Bovenbouw havo en vwo

De twee opgaven die hierboven zijn genomen als uitgangspunt van een analyse vormen natuurlijk een te smalle basis voor een oordeel. Bij het vormen van dat oordeel moeten we om twee redenen vooral kijken naar de formulering van het meetkunde onderdeel van het havo-examenprogramma. In de eerste plaats omdat dat programma en de doelstellingen ervan veel uitvoeriger zijn geformuleerd dan het meetkunde onderdeel van het vwo-programma en in de tweede plaats omdat verwacht kan worden dat er voor het vwo een nieuw wiskunde B curriculum zal zijn tegen de tijd dat het eerste cohort leerlingen dat in 1993 naar het voortgezet onderwijs gaat in de bovenbouw is aangeland. (De commissie die voorstellen zal doen voor het nieuwe wiskunde-B-curriculum is met haar werkzaamheden begonnen).[6]

In de beschrijving van het havo meetkundeprogramma[7] treffen we negen onderdelen aan, die alle in het nieuwe onderbouwprogramma ergens worden voorbereid. In het nulde onderdeel (RM 0)[8] staat vermeld wat er van de onderbouw bekend zal worden verondersteld. Van de daar genoemde zaken valt alleen de cosinusregel in het *Trajectenboek* niet terug te vinden.

Enerzijds leidt bovenstaande beschouwing dus tot de conclusie dat het met de aansluiting van de meetkunde in het nieuwe onderbouwprogramma op de bovenbouw havo en vwo wel goed zit. Anderzijds blijft er toch een punt van zorg. Die zorg komt voort uit de vaststelling dat de vaardigheden die voor het rekenen in de meetkunde nodig zijn (werken met evenredigheden die samengaan met evenwijdige lijnen en vlakken, vergroten en verkleinen) ingebed moeten zijn in een systeem van stellingen en kenmerken, dat bij het redeneren houvast moet geven.

In het *Trajectenboek* worden de bouwstenen voor dat systeem pas in de derde klas havo en vwo genoemd. Naar onze mening is het dan te laat om zo'n systeem in het hoofd van de leerling nog tot volle wasdom te laten komen. Auteurs van schoolboeken moeten in het havo-vwo-traject al in de tweede klas met de opbouw van dat systeem beginnen, zodat leerlingen er over een langere periode mee kunnen werken. We denken daarbij aan kenmerken om evenwijdigheid van lijnen en gelijkvormigheid van figuren vast te stellen, aan de regels die belangrijk zijn bij het vergroten en verkleinen van figuren, aan eenvoudige redeneerschema's bij hoekberekeningen, enzovoort. Uiteraard pleiten wij niet voor een uitvoerig net van stellingen en bewijzen, maar voor een eenvoudig relatienet dat nodig is om de reken- en tekenopdrachten die wij in de nieuwe eindexamens havo en vwo verwachten tot een goed einde te kunnen brengen.

Noten

[1] Zie bijvoorbeeld hoofdstuk 1 in *Wiskunde 12–16, een boek voor docenten*. Freudenthal instituut, SLO, uitg. Educa, Culemborg, 1992.

[2] Vergelijk bijvoorbeeld *Moderne wiskunde bovenbouw VWO 5B en 6B* met de latere versie *Moderne wiskunde bovenbouw 5V-B en 6V-B*

[3] *Achtergronden van het nieuwe leerplan Wiskunde 12–16*. Freudenthal instituut, SLO, uitg. Educa, Culemborg, 1992).

[4] Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs, *Trajectenboek wiskunde 12–16*, Freudenthal instituut, SLO, juli 1992.

[5] *Ik was wiskundeleraar*; (vijf wiskundeleraren in gesprek met Fred Goffree); SLO Enschede 1985. De geciteerde zinnen staan op bladzijde 106.

[6] Zie 'Over het laatste nieuws', *Nieuwe Wiskrant, 12* (3), 1993.

[7] Uitleg O en W-regelingen, 14 maart 1990.

[8] RM 0: Vlakke meetkunde en goniometrie: Oppervlakte berekenen van driehoek en parallellogram en van samengestelde vlakdelen door middel van opsplitsen in delen of aanvullen tot een bekende vorm. Formules voor omtrek en oppervlakte van de cirkel. Het begrip gelijkvormigheid en het berekenen van lijnstukken met behulp van evenredigheden. Goniometrie van de driehoek. De stelling van Pythagoras en de cosinusregel.