Knopen

A.B. van der Roest
Ichthus College, Veenendaal

Aanleiding

Op zaterdag 4 januari 1992 organiseerde het Wiskundig Genootschap een symposium onder de titel 'Wiskunde ontwikkelt'. Eén der sprekers was Prof. dr. D. Siersma die sprak over *Knopen en vlechten oud en nieuw*. Dit artikel ontstond naar aanleiding van die lezing. Na de inleiding volgt eerst globaal de geschiedenis van de knopentheorie, daarna beknopt de knopentheorie zelf. Ook zal ik enkele voorbeelden uitwerken. Het is misschien verstandig de paragraaf over de geschiedenis tot het laatst te bewaren, omdat er termen in voor komen die pas later uitgelegd worden.

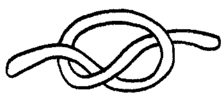
Ik heb dankbaar gebruik gemaakt van de aantekeningen van de heer Siersma en van de afstudeerscriptie van drs. E. Klieverik.

Inleiding

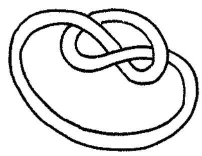
Bij knopen zult u niet meteen aan een wiskundig begrip denken. Het is veel meer een term uit de wereld van matrozen en zeeverkenners. Toch is het ook voor een wiskundige een interessant begrip. De wiskundige houdt zich dan vooral bezig met het classificeren van knopen en hoe knopen van elkaar onderscheiden kunnen worden. Misschien vraagt u zich af of dat een zinvolle bezigheid is?
Zeker wel. Een actueel voorbeeld: omstreeks 1980 zijn er verschillende biologen bezig geweest om vanuit de knopentheorie het DNA-molecule te bestuderen. Hierdoor kreeg men meer inzicht hoe een DNA-molecule zich splitst. Ook bij de quantumveldentheorie wordt de knopentheorie toegepast. Hierbij worden de lijnen van de knopen in verband gebracht met deeltjes die over deze lijnen lopen en invloed van elkaar ondervinden.

Wat is een *knoop*? Het antwoord op deze vraag is makkelijk voor te stellen. Neem een touwtje en leg er een knoop in, niet te strak aantrekken, en las de uiteinden van het touwtje aan elkaar. Het resultaat is een knoop zoals we die bestuderen.

touwtje

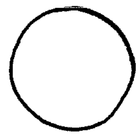


knoop in touw



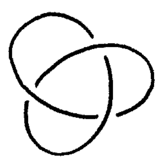
einden van het touw aan elkaar gelast

De meest eenvoudige knoop is derhalve een touwtje waarvan we de uiteinden aan elkaar vast lassen. We noemen dit de triviale knoop. (Ik teken de touwtjes nu verder als lijntjes.)

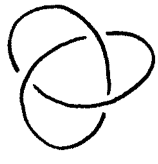


triviale knoop

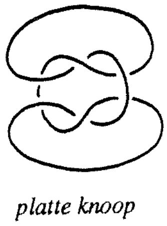
Nog een paar eenvoudige knopen en een paar bekende knopen:



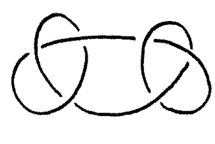
linkshandige klaverbladknoop



rechtshandige klaverbladknoop



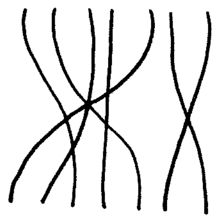
platte knoop



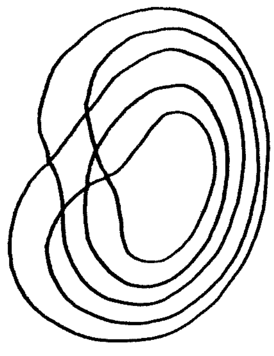
oude wijvenknoop

Wanneer we meerdere touwtjes gebruiken, noemen we de knoop een *schakel*. (Merk op dat de platte knoop ook makkelijk als een schakel te tekenen is.)
Knopen noemen we hetzelfde als de ene knoop door vervorming van het touwtje (of de touwtjes) overgaat in de andere knoop. Bij het vervormen is het niet toegestaan het touwtje door te knippen. Knopen zijn verschillend als ze uit een verschillend aantal touwtjes bestaan of wanneer het nodig is een touwtje door te knippen om ze in elkaar over te laten gaan. Nu is het omslachtig om bij twee knopen uit te zoeken of ze hetzelfde zijn, door te proberen de ene knoop te vervormen tot de andere knoop. Daarom is men in de wiskunde knopen gaan onderscheiden en classificeren door er veeltermen aan toe te kennen. Voor het toekennen van veeltermen gebruikt men vaste regels zodat twee knopen die hetzelfde zijn altijd dezelfde veelterm krijgen. Als twee knopen verschillende veeltermen hebben, zijn ze ook echt verschillend. Het omgekeerde is echter niet waar; twee knopen die dezelfde veelterm hebben zijn niet altijd hetzelfde.

Een *vlecht* is een verzameling touwtjes die elk bij een verschillend punt op een horizontale rij beginnen en van daar af alleen maar naar beneden lopen. Ze mogen elkaar kruisen. Onderaan moeten ze ieder bij een verschillend punt op een horizontale rij eindigen. Tegenover ieder punt op de bovenste horizontale rij waar een touwtje vertrekt ligt dus precies één punt op de onderste horizontale rij waar een touwtje aankomt; dit hoeft niet hetzelfde touwtje te zijn.
Een *gesloten vlecht* is een vlecht waarbij ieder punt onderaan met z'n tegenoverliggende punt bovenaan verbonden is, zonder dat deze verbindingstouwtjes onderling vervlochten zijn.



vlecht

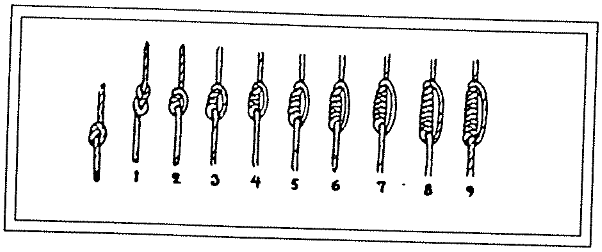


gesloten vlecht

Alle knopen en schakels zijn als een gesloten vlecht weer te geven.

Geschiedenis

Als een numerieke toepassing komen we knopen tegen bij de Inca's. Door één of meerdere knopen in een touwtje te leggen werden getallen voorgesteld.



(In het kader van dit artikel zijn deze ook interessant, daar ze niet in elkaar over te voeren zijn.)
Knopen zoals we nu bestuderen zien we voor het eerst in de geschiedenis bij Carl Friederich Gauss. Er is een aantekenblaadje gevonden, gedateerd 1794, waarop schetsen staan van dertien verschillende knopen met hun engelse naam. Waarschijnlijk is het een uittreksel van een engels boek. Later zal Gauss nog enkele andere knopen er aan toevoegen.
Johan Benedict Listing (1806-1907) was de eerste die knopen voorstelde als geknoopte cirkels en diagrammen gebruikte. Een diagram verkreeg hij door een knoop te projecteren op het platte vlak. Vervolgens probeerde hij een invariant te bedenken hetgeen hem niet echt gelukt is. Zijn grootste verdienste was echter dat hij een invariant probeerde te vinden aan de hand van een knoopdiagram. Een invariant vinden is steeds de kern geweest van de knopentheorie.

Omstreeks 1867 werd er weer vooruitgang geboekt. Sir William Thomson (1824-1907) Lord Kelvin en Peter Tait (1831-1901) stortten zich op de knopentheorie omdat zij de structuur van de materie probeerden te begrijpen. Volgens Thomson zou de bouw van een atoom gedeeltelijk de vorm van kleine knopen hebben. De knopen die hiervoor in aanmerking komen moesten kinetisch stabiel zijn. Door Tait werd een eerste knopentabel opgesteld. Hij rangschikte de knopen naar het aantal kruisingen. De tabel met knopen met kruisingsgetal tot tien wordt nu nog steeds gehanteerd. Het opstellen van een tabel was een zeer tijdrovende zaak. Little, met wie Tait zijn tabellen vergeleek, schijnt zes jaar nodig gehad te hebben om een complete tabel samen te stellen.

Omtrent de eeuwwisseling werd er een topologische benadering van de knopentheorie ingevoerd. Henri Poincaré (1854-1912) introduceerde de fundamentaalgroep. Daarna werd de algebraïsche topologische invariant voor een schakel gevonden: de zogenaamde knoopgroep. Wirtinger introduceerde een algemene methode om een representatie te geven van een knoop-groep. Tietze liet in 1908 zien dat de klaverbladknoop niet gelijk was aan de triviale knoop.
James Alexander (1888-1971) ontdekte in 1928 een invariant van een knoop in de vorm van een veelterm. Met behulp van een knoopdiagram definieerde hij een matrix. De veelterm verkreeg hij door de determinant te ne-

men. Met zijn veelterm toonde Alexander aan dat alle 35 knopen met acht of minder kruisingen, uit de knopentabel van Tait, verschillend waren.

In 1932 definieerde Kurt Werner Friedrich Reidemeister (1893-1971) drie soorten bewegingen die met een knoopdiagram mogen worden uitgevoerd, zonder dat de bijbehorende knoop verandert; dit zijn de zogenaamde Reidemeister-bewegingen.
John Horton Conway introduceerde de wirwar. Dit is een gedeelte van een knoopdiagram waaruit een aantal strengen, meestal vier, voortkomen. Hiermee vond hij een relatie voor de Alexander veelterm, echter alleen gebruikmakend van het knoopdiagram en dus zonder een determinant uit te rekenen.
In 1925 heeft Emil Artin (1898-1962) de vlechtgroep B_n ingevoerd, terwijl Alexander in 1923 al inzag dat elke knoop ook op te vatten was als een gesloten vlecht. In 1936 stelde A.A. Markow dat twee gesloten vlechten als schakels equivalent zijn als ze door een eindig aantal elementaire bewegingen gesloten kunnen worden. Hij bewees deze stelling niet; het bewijs werd in 1974 gepubliceerd door Joan Birman.
In 1934 voerde H. Seifert de later naar hem genoemde Seifertoppervlakken in. Dit zijn vlakken die de knoop als rand hebben. Het meest eenvoudige Seifertoppervlak is dus de cirkelschijf, die de triviale knoop als rand heeft.
Vaghan Jones ontdekte in juli 1984 een nieuwe veelterm als invariant van georiënteerde knopen. Deze veelterm kan veel knopen van hun spiegelbeeld onderscheiden, waaronder de klaverbladknoop. Kort hierna ontdekten een achttal mensen gelijktijdig en onafhankelijk van elkaar een generalisatie van de Conway-veelterm en de Jones-veelterm, de HOMFLY-veelterm. HOMFLY is een acroniem gevormd door de eerste letters van de achternaam van zes van de acht ontdekkers.
Louis Kauffman stelde nog een andere veelterm op. Hij voerde toestandsmodellen in. Door nu alle kruisingen volgens zijn toestandsmodel uit elkaar te halen ontstaat er een veelterm.

Knopentheorie

Een knoop is een ééndimensionale kromme ingebed in de ruimte R_3 zo dat begin- en eindpunt samenvallen en de kromme zichzelf niet snijdt. Nu moeten we ons afvragen of een knoop werkelijk geknoopt is, en of een tweetal knopen hetzelfde zijn, dat wil zeggen dat ze niet in elkaar overgezet kunnen worden.

Eerst een drietal definities (u mag ze ook overslaan).

1. Een knoop is een inbedding van een eindige verzameling cirkels in R_3. Wanneer een knoop uit meerdere componenten bestaat, spreken we van een schakel.
2. Twee inbeddingen $k_0\ k_1: X \to Y$ zijn ambient isotoop wanneer er een inbedding H bestaat met de volgende eigenschappen:
   $H: Y \times I \to Y \times I$, $H(y,t) = (h_t(y), t)$, $y \in Y$ en $t \in I$
   met $k_1 = h_1 k_0$ en $h_0 = id_y$
3. Twee knopen zijn equivalent wanneer ze ambient isotoop zijn.

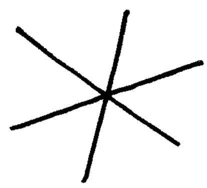
Deze toch wel formele definities hebben we gelukkig niet nodig, omdat er een hanteerbaarder manier is om te zien of knopen equivalent zijn. Belangrijkste van de definities is het begrip ambient isotoop. Twee knopen k_0 en k_1 zijn ambient isotoop, wanneer er een homomorfisme bestaat zodat k_1 beeld is van k_0.

Door een knoop die in de ruimte ligt op een vlak te projecteren, kan men een *knoopprojectie* krijgen. Voor een knoopprojectie moet een net plaatje ontstaan van één of meerdere krommen in het vlak. Onder een net plaatje wordt verstaan dat de volgende situaties in de projectie niet voorkomen:

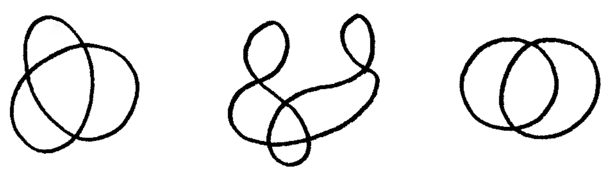
geen knik in de kromme

geen raakpunt tussen verschillende delen van de kromme

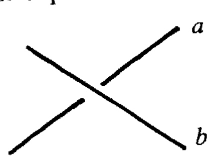
geen kruispunt van meer dan twee kruisende lijnen



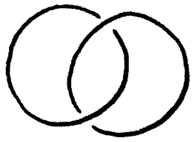
De volgende tekeningen zijn nette knoopprojecties:



Een knoopprojectie kan men zich voorstellen als de schaduw van de knoop. In een knoopprojectie is niet te zien hoe de lijnen elkaar kruisen. Wanneer in de projectie wel wordt aangegeven welke lijn onder de andere doorloopt, dan ontstaat een *knoopdiagram*.
Bij een knoopdiagram is als volgt aangegeven dat lijn a onder lijn b doorloopt.

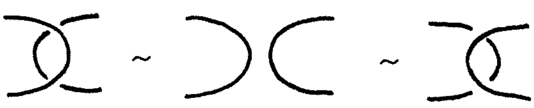


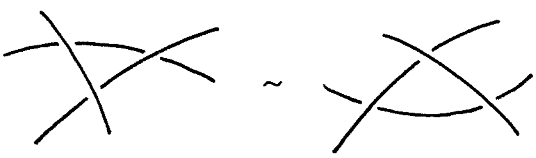
De volgende tekening is een knoopdiagram:



Van één knoop zijn verschillende diagrammen te maken. Reidemeister heeft laten zien dat verschillende diagrammen die bij één knoop horen door drie standaard bewegingen in elkaar over zijn te zetten. Deze drie bewegingen heten de *Reidemeister-bewegingen*:

R_1: 

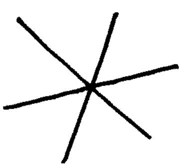
R_2: 

R_3: 

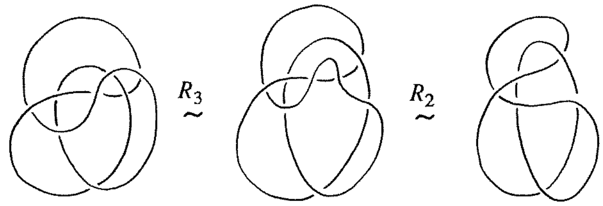
Opvallend is dat deze drie bewegingen corresponderen met de drie situaties die een projectie niet netjes maken.

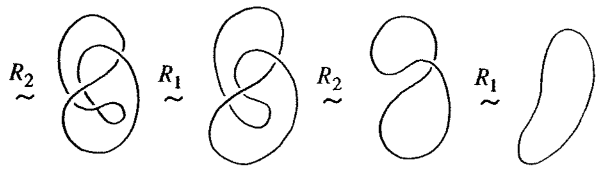
R_1 met 

R_2 met 

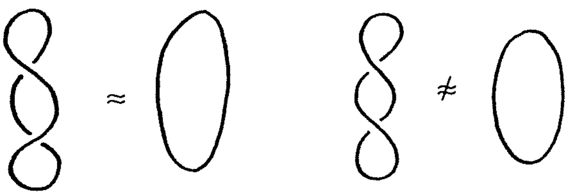
R_3 met 

Reidemeister heeft bewezen dat de knoopdiagrammen van twee ambient isotope knopen met behulp van de Reidemeister-bewegingen in elkaar veranderd kunnen worden. Ambiente isotopie geeft dus dezelfde equivalentie als de equivalentie die wordt gegeven door de drie Reidemeister-bewegingen. De equivalentie geven we aan met ~, dus bijvoorbeeld $K \sim K'$.
De Reidemeister-bewegingen zijn voldoende om twee knoopdiagrammen van een knoop in elkaar over te laten gaan, maar ze zijn ook noodzakelijk, zoals uit onderstaand voorbeeld blijkt.

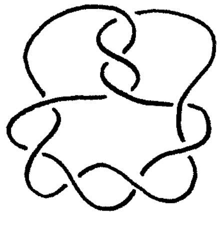




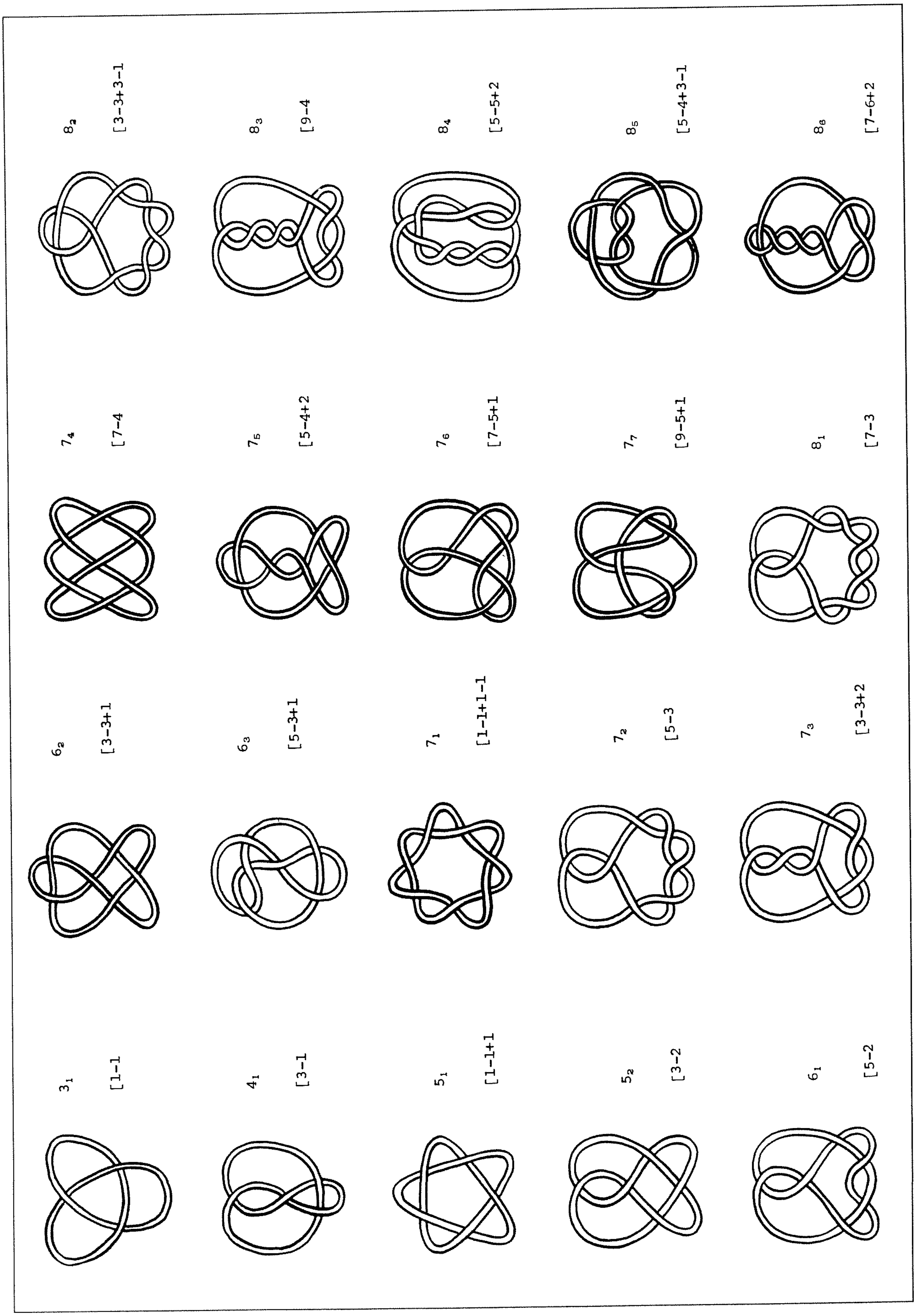
Een andere equivalentierelatie voor knoopdiagrammen wordt door de Reidemeister-bewegingen R_2 en R_3 voortgebracht en heet de reguliere isotopie; notatie ≈. (Dus regulier en R_1 geeft ambiente isotopie.)



Van de knoopdiagrammen zijn overzichten gemaakt door Tait en anderen. Elke knoop krijgt twee getallen. Het eerste getal is het *kruisingsgetal*, dit is het minimum aantal kruisingen van alle mogelijke knoopdiagrammen van een knoop; het tweede getal geeft de plaats aan die de knoop inneemt in de rij met knopen van zijn kruisingsgetal. Het eerste getal wordt vaak groot geschreven en het tweede schuin rechts onder het eerste getal. Voorbeeld 9_3.

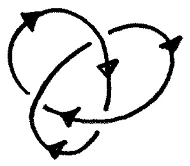


In de knopentabel staan ook nog rijtjes getallen zoals [3 – 3 + 1. (Dit rijtje hoort bij de knoop 6_2.) Deze getallen verwijzen naar het *Alexanderpolynoom*, dat verderop in dit artikel besproken wordt.
Voorbeeld: de knoop 6_2 heeft de toevoeging [3 – 3 + 1; dit betekent dat het Alexanderpolynoom
$3 - 3(x + x^{-1}) + 1(x^2 + x^{-2})$ is.



3_1 [1-1
4_1 [3-1
5_1 [1-1+1
5_2 [3-2
6_1 [5-2
6_2 [3-3+1
6_3 [5-3+1
7_1 [1-1+1-1
7_2 [5-3
7_3 [3-3+2
7_4 [7-4
7_5 [5-4+2
7_6 [7-5+1
7_7 [9-5+1
8_1 [7-3
8_2 [3-3+3-1
8_3 [9-4
8_4 [5-5+2
8_5 [5-4+3-1
8_6 [7-6+2

Op de pagina hiernaast staat een gedeelte van de knopentabel (overgenomen uit *Knots and links* van D. Rolfsen).
Knopen werden tot nu toe voorgesteld door een aantal lijnen in de ruimte. Als we de lijn of lijnen een richting geven ontstaat de georiënteerde knoop.

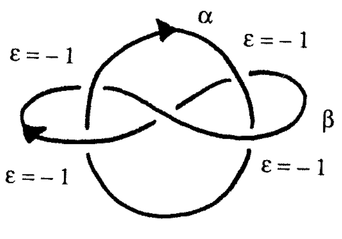


georiënterende knoop

Voor deze georiënteerde knopen gelden dezelfde equivalentie-relaties als voor gewone knopen.
Een knoop die uit meerdere componenten bestaat (er zijn meerdere touwtjes nodig om de knoop te maken) noemden we een schakel. Het aantal componenten van een knoop L geven we aan met $|L|$. Voor georiënteerde schakels met twee componenten definiëren we het schakelgetal. Daartoe voegen we aan iedere kruising het getal 1 of –1 toe, en wel als volgt:

Zij $L = \alpha \cup \beta$ een schakel bestaande uit twee componenten α en β.
Zij $\alpha \sqcap \beta$ de verzameling kruisingen van α en β. Het schakelgetal $lk(\alpha,\beta)$ wordt gedefinieerd door:

$$lk(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \alpha \sqcap \beta} \varepsilon(p)$$



$$lk(\alpha,\beta) = \tfrac{1}{2}(-1 + -1 + -1 + -1) = -2$$

Het schakelgetal blijft gelijk voor ambient isotope schakels. Dit is in te zien door te kijken wat er gebeurt met het schakelgetal bij de Reidemeister-bewegingen.
Naast het schakelgetal van een knoop K kennen we ook het verstrengelingsgetal:

$$\omega(K) = \sum_{p} \varepsilon(p)$$

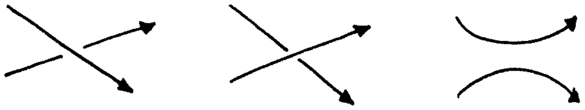
Het verstrengelingsgetal is geen invariant voor de knoop, want door een verandering van het knoopdiagram met behulp van de eerste Reidemeister-beweging is het verstrengelingsgetal te veranderen.

Knoopveeltermen

Om knopen te classificeren zijn zogenaamde knoopinvarianten gedefinieerd. Een knoopinvariant is een functie van de isotopie klassen van knopen naar een algebraïsche structuur. De knoopinvarianten die tot nu toe genoemd zijn: het aantal componenten van een knoop en het schakelgetal voor knopen die uit twee componenten bestaan. Beide getallen veranderen niet door de Reidemeister-bewegingen en dus niet voor ambient isotope knopen. Nadeel is dat er nog maar weinig knopen hiermee te onderscheiden zijn. Daarom worden knoopveeltermen ingevoerd. We bespreken er hier één en noemen enkele andere.
We spreken af dat een kruispunt in een diagram positief is als de richting van het onderste en het bovenste touwtje dezelfde is wanneer de bovenste draad tegen de wijzers van de klok ingedraaid wordt tot ze samenvallen. Zijn de richtingen tegengesteld dan heet het kruispunt negatief.

positief *negatief*

Tussen drie knopen bestaat een weefrelatie wanneer hun diagrammen gelijk zijn op één kruispunt na. Het eerste diagram heeft een positief kruispunt, het tweede een negatief en het derde heeft op dat punt een splitsing.



K_+ K_- K_0

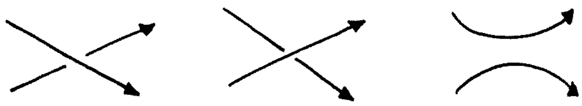
We gaan nu de Alexander-veelterm op een recursieve wijze afleiden. We beginnen met de volgende axioma's:

Axioma 1
Aan iedere georiënteerde knoop of schakel K wordt een Laurent veelterm $\Delta_K(t) \in Z[t^{\frac{1}{2}}, t^{-\frac{1}{2}}]$ toegevoegd. Equivalente knopen en schakels krijgen dezelfde veeltermen.

Axioma 2
Als $K \sim O$ (de triviale knoop) dan $\Delta_K(t) = 1$

Axioma 3:
Als drie knopen of schakels maar op een klein stukje

verschillen, zoals hieronder

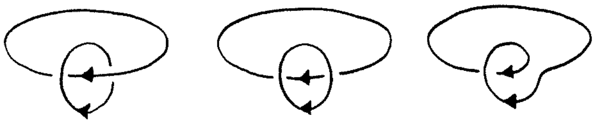


K_+ K_- K_0

dan $\Delta_{K_+} - \Delta_{K_-} + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta_{K_0} = 0$

Als L een gespleten schakel is, dan is $\Delta L(t) = 0$. Een gespleten schakel zijn twee schakels die naast elkaar getekend worden. Ze zijn dus niet geschakeld.

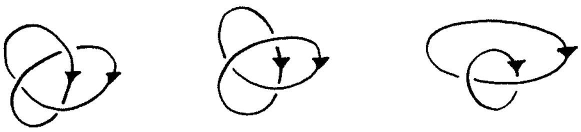
Berekening van de Alexander-veelterm voor de rechtshandige klaverbladknoop:



K_+ K_- K_0

$\Delta_{K-} = 0, \Delta_{K_0} = 1, \Delta_{K+} - \Delta_{K-} + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta_{K_0} = 0$

Dus $\Delta_{K_+} = -(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})$



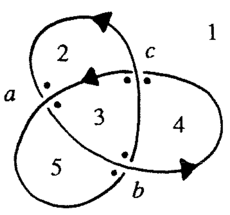
K_+ K_- K_0

$\Delta_{L_-} = 1, \Delta_{L_0} = -(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})$

$\Delta_{L_+} - \Delta_{L_-} + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta_{L_0} = 0$

Dus $\Delta_{L_+} = 1 + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})^2 = t - 1 + t^{-1}$

Alexander had een andere manier om zijn veelterm uit te rekenen. Hij gebruikte de determinant van een matrix, de zogenaamde Alexander-matrix. Ik zal dat met een voorbeeld illustreren.
We nemen weer de rechtshandige klaverbladknoop. Het knoopdiagram heeft drie kruisingen, a, b en c, en verdeelt het vlak in vijf vlakdelen, zeg 1, 2, 3, 4 en 5.



We kiezen nu een oriëntatie. We lopen als een insekt, zoals Alexander schreef, over de knoop en bij de onderdoorgangen zetten we links een markering. De Alexander-matrix wordt nu als volgt opgesteld:
- de kolommen krijgen de nummers van de vlakdelen
- de rijen krijgen de letters van de kruispunten
- de elementen van de matrix zijn 0,1 en t
- een element krijgt de waarde 0 als het kruispunt niet in het bijbehorende vlakdeel ligt, de waarde 1 als het vlakdeel niet gemarkeerd is en als het vlakdeel wel gemarkeerd is de waarde t.

In bovenstaand voorbeeld wordt de matrix dus:

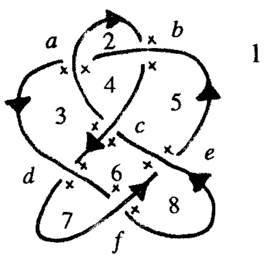
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & t & t & 0 & 1 \\ 1 & 0 & t & 1 & t \\ 1 & 1 & t & t & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

We laten nu twee kolommen van *aangrenzende* vlakdelen weg. Hiermee krijgen we altijd een vierkante matrix en hiervan berekenen we de determinant. In ons voorbeeld kunnen we kolom drie en vier weglaten. De matrix wordt nu:

$$\begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & 0 & t \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

en de bijbehorende determinant: $t^2 - t + 1$.
Zoals we zien geeft dit op een factor t na hetzelfde resultaat als de afleiding op de recursieve manier.

Ter oefening kunnen we nog een tweede voorbeeld nemen. We rekenen de Alexander-veelterm van de 6_2 knoop uit. Volgens de knopentabel moet de uitkomst zijn: $3 - 3(x + x^{-1}) + (x^2 + x^{-2})$. Of zoals je het ook kan schrijven: $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 1$.
We nummeren de vlakdelen en de kruispunten weer en zetten de markeringen als in het vorige voorbeeld.



De matrix wordt nu:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & t & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 1 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 & 1 & t & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & t & t & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 1 & t \end{bmatrix} \end{array}$$

Na het weglaten van twee aangrenzende vlakdelen zeg 3 en 4 wordt de matrix:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 1 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & t & t & 0 \\ 1 & 0 & t & t & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & t & 1 & t \end{bmatrix} \end{array}$$

Hiervan moeten we de determinant uitrekenen. Dit doen we door het ontwikkelen van die determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 1 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & t & t & 0 \\ 1 & 0 & t & t & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & t & 1 & t \end{vmatrix} = 1* \begin{vmatrix} 1 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & t & 0 \\ 0 & t & t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & t & 1 & t \end{vmatrix} - 1* \begin{vmatrix} t & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 \\ 1 & 0 & t & t & 0 \\ 1 & t & t & 0 & 1 \\ 1 & 0 & t & 1 & t \end{vmatrix}$$

Als we dit proces herhalen krijgen we tenslotte:

$$1 * \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} - t * \begin{vmatrix} t & 1 \\ t & t \end{vmatrix} + t^2 * \begin{vmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{vmatrix} - t^2 * \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} +$$

$$t^2 * \begin{vmatrix} t & 1 \\ t & t \end{vmatrix} - t^3 * \begin{vmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{vmatrix} - t^2 * \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} + t^3 * \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} =$$

$$-t-t^3+t^2+t^4+t^2+t^4-t-t^3-t^5+t^2+t^4-t^3 = t^5-3t^4+3t^3-3t^2+t$$

Naast de Alexander-veelterm kennen we ook de Conway- en de Jones-veelterm. Deze drie veeltermen gaven reden tot generalisatie. De gegeneraliseerde veelterm heeft de naam HOMFLY-veelterm naar zes van de acht ontdekkers.

Tenslotte

Kunnen we nu ook nog iets doen met de knopentheorie op school? Volgens mij wel. Een aardige oefening is het tekenen van een knoop. Als dat niet meteen lukt dan mogen we weten dat het zelfs een tekenaar als Escher niet altijd meteen lukte. Hij verzuchtte eens toen hij met zijn gravure van een knoop bezig was: "Een perspectivische heksentoer. Ben ik dan zo stom, dat ik het moeilijk vind?" Verder is van Escher bekend dat hij vaak eerst een ruimtelijk model maakte voor hij ging tekenen. Dat deed hij ook bij de knoop.
Andere mogelijkheden voor in de klas zijn het maken van knoopdiagrammen en zelfs ook, met behulp van de Reidemeister-bewegingen, het onderzoeken of knopen equivalent zijn. Het opstellen van een knoopveelterm is tenslotte iets voor de echte liefhebbers, waarbij eventueel ook nog Alexander's oorspronkelijke methode aan bod kan komen. Uitdaging genoeg lijkt me. Jammer dat er zo weinig 'laatste lessen' zijn!

Literatuur

- Birman, Joan S. (1991): Recent Developments in Braid and Link Theory, *The Mathematical Intelligencer 13*(1), 52-66.
- Neuwirth, L. (1979), The Theory of Knots, *Scientific American*, June.
- Rolfsen, D. (1976): *Knots and Links.*
- Crowell, R.H. and R.H. Fox (1963)*: Introduction to knot theory.*